

DINÁMICA DE VIGAS FISURADAS. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE ENSAYOS DINÁMICOS DE FLEXIÓN EN TRES PUNTOS

L. Rubio, J. Fernández-Sáez, C. Navarro

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Universidad Carlos III de Madrid
Avda. de la Universidad, 30. 28911 Leganés (Madrid)

Resumen. En este trabajo se realiza un análisis simplificado del comportamiento de vigas fisuradas sometidas a cargas dinámicas, utilizando el método de las funciones de influencia como alternativa al clásico de superposición modal. Los resultados se aplican a la modelización de ensayos dinámicos de flexión en tres puntos y, en particular, a la evaluación del factor de intensidad de tensiones a partir del conocimiento de la carga dinámica aplicada sobre la probeta. Estos resultados numéricos se comparan con los obtenidos numéricamente por el método de los Elementos Finitos.

Abstract. In this work a simplify analysis of the behaviour of cracked beams subjected to dynamic load is performed using the influence coefficient method as an alternative to the classical modal analysis. This procedure has been applied to analyse the dynamic three point bending tests and, particularly, the stress intensity factor has been determined from the dynamical force applied on the specimen. In order to validate the method, results have been compared to those obtained with the FEM

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento de componentes fisurados sometidos a cargas dinámicas ha suscitado un gran interés en los últimos años por diversos motivos. Por un lado, la aplicación de los criterios de tolerancia al daño al diseño de componentes mecánicos y estructurales, exige el conocimiento del comportamiento del componente en las condiciones de servicio, teniendo en cuenta la posible presencia de fisuras contenidas en él. En muchos casos las cargas de operación que se deben considerar son de tipo dinámico. Además, es necesario conocer las propiedades de fractura del material en las condiciones de operación. Cuando se desea evaluar la tenacidad de fractura del material en condiciones dinámicas, se recurre a ensayos de flexión en tres puntos en péndulo Charpy [1] o, si se requieren velocidades de sollicitación más elevadas, a ensayos de flexión dinámica realizados con dispositivos basados en la barra Hopkinson modificada [2-4].

También, el análisis vibratorio de estructuras fisuradas permite estimar la posición y tamaño de las fisuras, si se dispone de modelos adecuados que relacionen las frecuencias naturales del sistema fisurado, con las variables citadas (posición y tamaño de los defectos) [5-7].

Aunque los anteriores análisis se pueden llevar a cabo mediante simulaciones numéricas, por el método de los Elementos Finitos, por ejemplo, es conveniente disponer de modelos simplificados que predigan, con precisión suficiente, el comportamiento de componentes fisurados sometidos a cargas dinámicas, sin recurrir a los métodos numéricos citados que son computacionalmente más costosos.

En este trabajo se presenta un procedimiento, basado en el método de las funciones de influencia, para analizar el comportamiento de vigas fisuradas sometidas a cargas dinámicas. El método se ha aplicado al análisis de ensayos de flexión dinámica en tres puntos, y, en particular, a la evaluación del factor de intensidad de tensiones a partir del conocimiento de la carga dinámica aplicada sobre la probeta.

2. MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE INFLUENCIA

El método de las funciones de influencia es un método alternativo al tradicional de superposición modal para el análisis de la dinámica de vigas. El método es aplicable a un sistema unidimensional continuo, como la viga de Euler-Bernouilli de la figura 1. El desplazamiento vertical de una sección, $u(x,t)$, se puede expresar mediante la ecuación [8]:

$$\int_0^L g(x, \xi) m(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + u(x, t) = u_{est}(x, t) \quad (5)$$

donde la función $g(x, \xi)$, es la función de influencia, que representa el desplazamiento que sufre la sección que se encuentra situada a una distancia x del apoyo izquierdo, cuando, en la sección situada a una distancia ξ de dicho apoyo, se aplica una carga unidad. La función $p(x, t)$ representa la carga dinámica aplicada al sistema (ver figura 1).

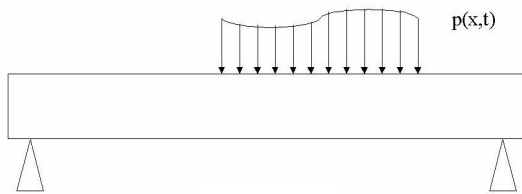


Fig 1. Viga sometida a una carga distribuida

En un caso dinámico, la carga distribuida toma la forma:

$$\int_0^L g(x, \xi) m(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + u(x, t) = u_{est}(x, t) \quad (5)$$

$f(x, t)$ representa las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga y $m(x)$ la masa por unidad de longitud de la misma. Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3) se obtiene la ecuación integral:

$$\int_0^L g(x, \xi) m(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + u(x, t) = u_{est}(x, t) \quad (5)$$

donde $u_{est}(x, t)$ representa los desplazamientos estáticos que produciría la fuerza exterior y que vendrían dados por:

$$u_{est}(x, t) = \int_0^L g(x, \xi) f(\xi, t) d\xi \quad (6)$$

Si en vez de modelizarse la viga como una viga de Euler-Bernouilli, se considera como una viga de Timoshenko, en la que el efecto del esfuerzo cortante y de la energía de rotación de las secciones deben ser tenidas en cuenta, los movimientos generalizados de la viga, $\delta(x, t)$, estarían constituidos por dos variables independientes, el desplazamiento vertical de la

secciones, $u(x, t)$, y el giro de éstas, $\theta(x, t)$, alrededor de un eje perpendicular al plano x-y, es decir:

$$\delta(x, \xi) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ \theta(x, t) \end{pmatrix}$$

En ese caso la ecuación (5) se escribe:

$$\int_0^L C(x, \xi) M(\xi) \frac{\partial^2 \delta(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + \delta(x, t) = \delta_{est}(x, t) \quad (7)$$

siendo $M(x)$ la matriz de masas generalizadas

$$M(x) = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}$$

en la que ρ es la densidad del material, A es el área de la sección transversal e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga; $\delta_{est}(x, t)$ es el vector de movimientos generalizados estáticos producidos por las cargas exteriores, $f(x, t)$, y $C(x, \xi)$ es la matriz que contiene las funciones de influencia y que viene dada por:

$$C(x, \xi) = \begin{pmatrix} C^{yy}(x, \xi) & C^{yz}(x, \xi) \\ C^{zy}(x, \xi) & C^{zz}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

cuyo significado físico es el siguiente (ver figura 2):

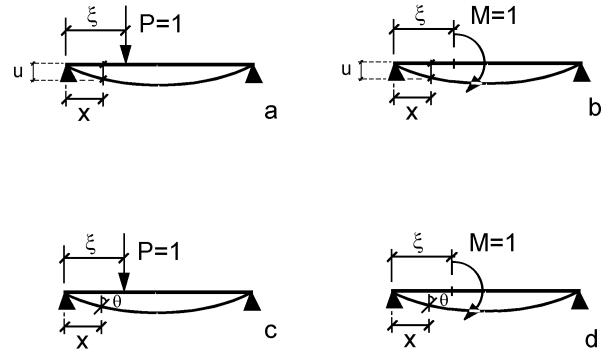


Fig 2. Significado de las funciones de influencia

a) $C^{yy}(x, \xi)$ es el desplazamiento vertical, u , de un punto x cuando en el punto ξ se aplica una carga vertical unidad (figura 2a)

b) $C^{yz}(x, \xi)$ es el desplazamiento vertical, u , de un punto x cuando en el punto ξ se aplica un momento unidad de eje perpendicular al plano x - y (figura 2b)

c) $C^{xy}(x, \xi)$ es el giro alrededor del eje perpendicular al plano x - y , θ , de una sección x cuando en el punto ξ se aplica una carga vertical unidad (figura 2c).

d) $C^{zz}(x, \xi)$ es el giro alrededor del eje perpendicular al plano x - y , θ , de una sección x cuando en el punto ξ se aplica un momento unidad con el mismo eje que el del giro (figura 2d).

Naturalmente, estas funciones de influencia se construyen de manera que se cumplen las condiciones en los extremos de la viga.

Todo lo expuesto hasta este punto es válido para el análisis dinámico de vigas de Timoshenko, fisurada o no. La diferencia estriba, exclusivamente en el cálculo de las correspondientes funciones de influencia aplicables a cada caso. En este trabajo, la presencia de la fisura se ha tenido en cuenta suponiendo que la viga está constituida por dos partes que se unen en la sección fisurada mediante dos resortes, ver figura 3. de tal manera que las funciones que representan los desplazamientos y giros de la viga presentan discontinuidades en la sección fisurada. Las amplitudes de las discontinuidades en los desplazamientos y giros son proporcionales, respectivamente, al esfuerzo cortante, Q , y el momento flector M_f , transmitidos por la sección fisurada, es decir:

$$\Delta u = C_q Q \tag{8a}$$

$$\Delta \theta = C_m M_f \tag{8b}$$

Las constantes de flexibilidad, C_q y C_m dependen de la longitud de la fisura y de la geometría de la sección. Para una sección rectangular, se pueden encontrar las expresiones para dichas constantes en diversas referencias [9,10]. Sobre la base de estas hipótesis, las funciones de influencia se pueden calcular, por ejemplo, aplicando los teoremas clásicos de Mohr adaptados para vigas fisuradas [9].

La resolución numérica de la ecuación (7) se puede abordar, (ver Rubio [4]), transformándola en un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden (n es el número de nudos en los que se discretiza la viga), que en forma matricial se expresa:

$$CRM \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} + \delta(x, t) = \delta_{est}(x, t) \tag{9}$$

donde C es la matriz de funciones de influencia de dimensión $2n \times 2n$, R es la matriz diagonal de la misma dimensión que depende del algoritmo de integración empleado y M es la matriz de masa generalizada de la misma dimensión, también diagonal, en la que los n primeros términos toman el valor ρA y los n últimos el valor ρI . La ecuación (9) se puede transformar en:

$$\frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} = (CRM)^{-1} (\delta_{est}(x, t) - \delta(x, t)) \tag{10}$$

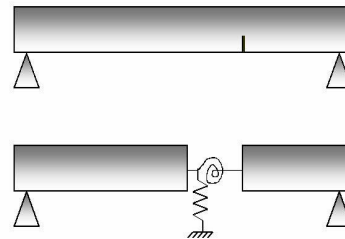


Fig. 3. Modelo para la viga fisurada

El sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden resultante tiene la particularidad de que no aparece en ellas la derivada primera de las funciones incógnita. Para resolver este tipo de sistemas, se puede utilizar la regla de Stoerm, tal y como se recoge en [4].

El método expuesto en el apartado anterior es válido para la determinación de desplazamientos de vigas de Timoshenko con cualquier condición de apoyo y con cualquier situación de la fisura, lo que lo convierte en un método muy versátil para el cálculo de desplazamientos de vigas fisuradas sometidas a cargas dinámicas.

3. APLICACIÓN A ENSAYOS DE FLEXIÓN EN TRES PUNTOS

La formulación anterior se puede aplicar a la determinación del factor de intensidad de tensiones de probetas sometidas a ensayos dinámicos de flexión en tres puntos (FITD), figura 4. Estos ensayos se pueden analizar considerando las probetas como vigas de Timoshenko de sección rectangular simplemente apoyadas con una fisura en su sección central y sometidas a una carga dinámica aplicada puntualmente en la misma sección que contiene a la fisura.

Las expresiones de las funciones de influencia para la citada geometría se encuentran recogidas en Rubio [4].

Aplicando a este caso el método de las funciones de influencia antes descrito, se obtienen los desplazamientos de la probeta, y en particular, el desplazamientos del punto de aplicación de la carga, u_p , como:

$$u_p(t) = u(L/2, t).$$

A partir de este desplazamiento, se puede calcular el factor de intensidad de tensiones, $K_I(t)$, haciendo uso de la expresión :

$$K_I(t) = \frac{3}{2} \frac{\beta}{B\sqrt{W}} \frac{u_p(t)}{C_0 + C_c(\alpha)} k_\beta(\alpha)$$

donde B y W son el espesor y el canto de la probeta respectivamente, β es el cociente entre la distancia entre apoyos y el canto de la probeta W, α representa el cociente entre la longitud de la fisura a y el canto de la probeta W, C_0 y $C_c(\alpha)$ son funciones que representan la flexibilidad de la probeta fisurada y $k_\beta(\alpha)$ es una función adimensional que depende de las variables α y β . Las expresiones generales de $C_c(\alpha)$ y $k_\beta(\alpha)$ se recogen en la referencia [11].

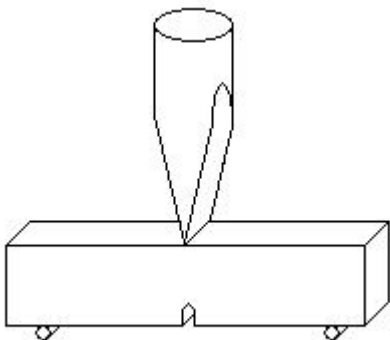


Fig. 4. Ensayo de flexión en tres puntos

4. COMPARACIÓN CON RESULTADOS NUMÉRICOS

Para comprobar la bondad del método propuesto para la determinación del FITD, se han comparado los resultados con los obtenidos numéricamente por el método de los Elementos Finitos mediante el programa comercial ABAQUS [12].

En la simulación se ha utilizado una probeta de aluminio de módulo de elasticidad $E= 79$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu=0.33$ y densidad $\rho=2800$ kg/m^3 y cuya geometría se muestra en la figura 5.

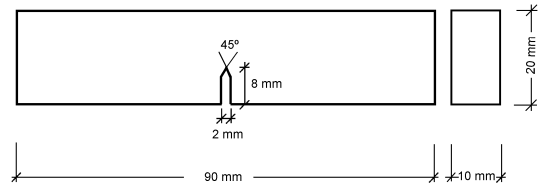


Fig 5. Geometría de la probeta de flexión en tres puntos.

Dadas las condiciones de simetría del problema se ha modelizado media probeta con 1180 elementos bidimensionales de 4 nudos en deformación plana y con integración reducida, refinando la malla en la zona del extremo de la fisura. La malla de la probeta utilizada para la simulación numérica se puede observar en la figura 6.

Para simular los apoyos se ha impedido el desplazamiento vertical del nudo situado a una distancia de 40 mm de la sección fisurada.

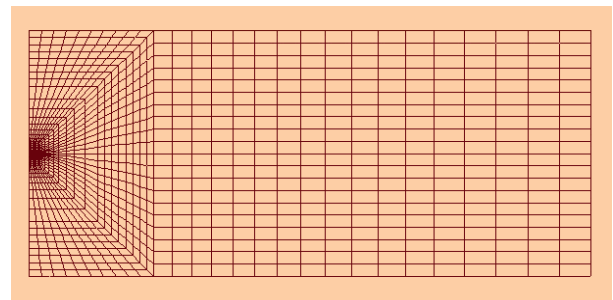


Fig 6. Malla de la probeta de flexión en tres puntos:

Se han analizado dos casos de carga:

- a) Ensayo de flexión en tres puntos a alta velocidad de deformación. Para simular este caso, se aplicó una carga puntual variable con el tiempo, en la misma sección de la fisura, que se muestra en la figura 7.
- b) Ensayo de flexión en tres puntos a velocidades de deformación intermedias. Para este caso se escogió la misma malla que para el caso anterior, y la carga aplicada fue la que se muestra en la figura 8.

En las figuras 9 y 10 se muestra la evolución del FITD obtenido por el método analítico desarrollado y su comparación con el obtenido numéricamente en los dos casos analizados. Para el caso del ensayo alta velocidad de deformación, figura 9, se observa una coincidencia de resultados hasta valores del tiempo del orden de 35 μs . Para valores de tiempo superiores, se observa una discrepancia en los resultados obtenidos por los diferentes procedimientos.

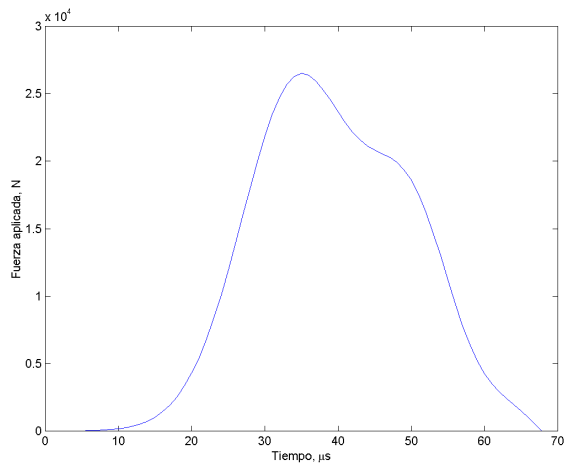


Fig. 7. Fuerza aplicada en el ensayo a alta velocidad de deformación

En el caso del ensayo a velocidades de deformación intermedias, sin embargo, figura 10, se observa una excelente concordancia en todo el intervalo de tiempo.

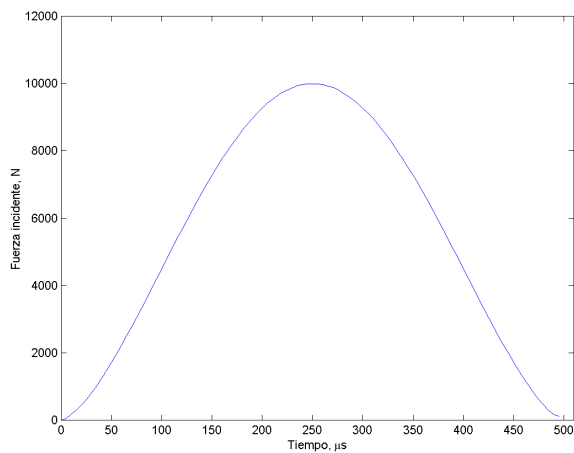


Fig. 8. Fuerza aplicada en el ensayo a velocidades de deformación intermedias.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un procedimiento para la determinación de los desplazamientos y giros de vigas fisuradas sometidas a cargas dinámicas, basado en el método de las funciones de influencia. Este método puede ser aplicado a vigas fisuradas con cualquier condición de apoyo.

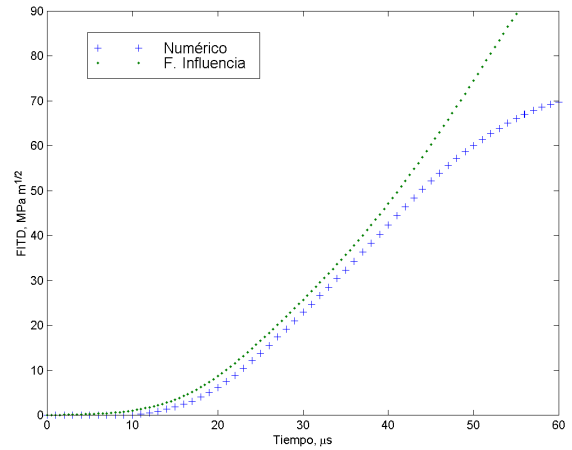


Fig 9. Evolución del FITD en el ensayo a alta velocidad de deformación.

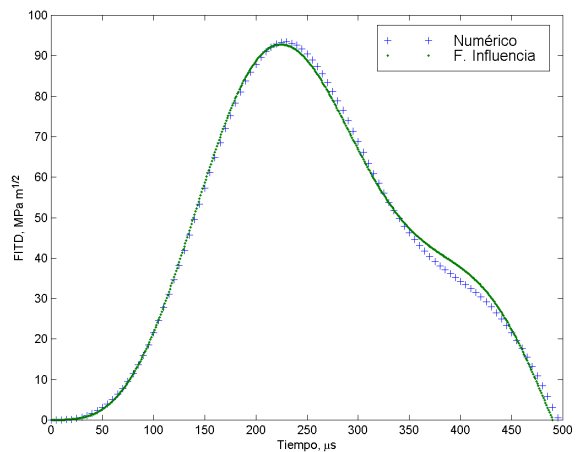


Fig 10. FITD a velocidad de deformación intermedia.

El método se ha aplicado, específicamente, al análisis de vigas de Timoshenko simplemente apoyadas con una fisura en su sección central y sometidas a una carga dinámica en esa misma sección. Esta configuración sirve para analizar los ensayos de flexión dinámica en tres puntos que se realizan para obtener la tenacidad de fractura dinámica de iniciación del material.

En particular, se ha obtenido por este método la evolución del FITD para dos condiciones de carga dinámica y los resultados se han comparado con los obtenidos numéricamente mediante el método de los Elementos Finitos. Esta comparación ha puesto de manifiesto la bondad del método y su aplicabilidad a este tipo de ensayos dinámicos.

6. REFERENCIAS

- [1] Kobayashi, T. "Analysis of impact properties of A533 steel for nuclear reactor pressure vessel by instrumented Charpy test", *Engineering Fracture Mechanics*, 19, 49-65,(1984).
- [2] Yokoyama, T. "Determination of dynamic fracture-initiation toughness using a novel impact bend test procedure", *Journal of Pressure Vessel Technology*, 115, 389-397 (1993).
- [3] Bacon, C., Färm, J. y Lataillade, J.L. "Dynamic fracture toughness determined from load point displacement", *Experimental Mechanics*, 9, 217-223 (1994).
- [4] Rubio, L. "Determinación de parámetros de fractura dinámica a altas velocidades de deformación", Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid (1999).
- [5] Cawley, P. y Adams, R.D. "The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies". *Journal of Strain Analysis*, 14, 49-57,(1979)
- [6] Dimarogonas, A.D. y Papadopoulos, C. "Vibrations of cracked shafts in bending". *Journal of Sound and Vibrations*, 91, 583-593, (1983)
- [7] Gudmunson, P. "Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches and other geometrical changes", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30, 339-353. (1982)
- [8] Meirovitch, L. "Analytical Method in Vibrations, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 2 ed. (1967).
- [9] Valiente, A., Elices, M., Ustáriz, F. "Determinación de esfuerzos y movimientos en estructuras lineales con secciones fisuradas", *Anales de Mecánica de la Fractura*, 7, 272-277 (1990).
- [10] Tada, H., Paris, P. y Irwin, G. "The stress analysis of cracks handbook", Del Research Corporation, 2º Ed. St Louis, Missouri, (1985).
- [11] Guinea, G.V., Pastor, J.Y., Planas, J. y Elices, M., "Stress intensity Factor, compliance and CMOD for general three-point-bend beam", *International Journal of Fracture*, 89, 103-116, (1998).
- [12] Hibbitt, H.D., Karlson, B.I. y Sorensen, E.P. *ABAQUS Standard User's Manual, Version 5.8* (1998).

AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PB98-0027, financiado por Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica