

NUEVAS TECNICAS DE TRATAMIENTO DE SINGULARIDADES EN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

F. Díez Sacristán, L. Gavete Corvinos, F. Michavila Pitarch

Departamento de Cálculo Numérico e Informática.

E.T.S. Ingenieros de Minas

Universidad Politécnica de Madrid

En este artículo se considera el tratamiento por elementos finitos de las singularidades en el estudio de la fractura elástica. Para hacerlo, se presentan tres tipos de elementos finitos singulares en los que se analizan las formas aproximadas de la deformación. Algunos de estos elementos se pueden utilizar en la modelización de otras singularidades en campos escalares. Con todo ello, se da una visión de las técnicas numéricas de --tratamiento de singularidades y se demuestra la aplicación del elemento de Aalto al tratamiento de la fractura en regimen elástico.

In this article we consider the finite element treatment of linear elasticity and particularly of the strain singularities of linear elastic fracture. In order to do this we analyze the approximate strain forms of three different singular finite elements. For such elements we demonstrate the circumstances under which the approximate strain forms possess the -required singular strain behavior. Some of the singular finite elements can be used in order to treat other singularities. - We demonstrate that Aalto's element can be applied in linear -elastic fracture.

1.- INTRODUCCION

El resultado de un análisis elástico mediante el MEF de una pieza fracturada consiste en energías, desplazamientos, tensiones y deformaciones a través de la estructura. A partir de estos datos existen varios métodos para derivar los factores de intensificación de tensiones. En cualquier caso, y como es bien sabido, en un entorno del vértice de la fisura el campo de tensiones y desplazamientos es singular, dado que presenta la forma \sqrt{r} ; por otro lado, el método de los elementos finitos standard utiliza espacios interpoladores polinomiales, lineales o cuadráticos, que por tanto no representan adecuadamente el comportamiento en \sqrt{r} de aquellas magnitudes. Por esta razón, conviene modelizar adecuadamente la zona fracturada, al objeto de poder calcular -- más precisamente desplazamientos y tensiones y, en definitiva, obtener más -- exactamente los factores de intensificación, y es así que han surgido gran número de técnicas especiales (en el campo del MEF) para simular la singularidad /1/, /2/, /3/, /4/ y /5/.

Se han empleado un gran número de técnicas especiales para simular la singularidad /1,2,3,4,5/. La eficiencia y exactitud de los elementos empleados -- variará pero generalmente estos elementos presentan algunos puntos débiles -- tales como la pérdida de la continuidad entre elementos, la incapacidad de -- modelizar cargas térmicas debido a la pérdida de los términos de deformación constante y la programación necesaria, que a veces puede ser extremadamente tediosa.

Uno de los métodos mejores y más simples para modelizar la singularidad es la técnica desarrollada por Barsoum /6 y 7/ y Hensell and Shaw /8/ que se origina al llevar el nodo intermedio del elemento isoparamétrico cuadrático incompleto a la cuarta parte del lado, en aquellos lados que contienen el punto singular. Además en este elemento se conserva la continuidad, así como la -- posibilidad de tratar cargas debidas a cambios de temperatura (ya que conserva el término de deformación constante). La exactitud conseguida es muy grande y se puede aplicar a cálculos elásticos y dinámicos /9/.

Otra aproximación utilizada para generar la singularidad en las deformaciones y tensiones fue introducida por Akin/10 y 11/. Ciertas singularidades se pueden generar mediante cambios en las funciones de base de aproximaciones de los desplazamientos. Sin embargo el método es poco exacto y en algunos casos no se modeliza adecuadamente la singularidad.

La implementación del método es simple pero es fácil equivocarse con los elementos isoparamétricos. Además hay que emplear fórmulas especiales de integración numérica y técnicas de extrapolación muy poco exactas para el cálculo de los factores de intensificación de tensiones.

Ultimamente Aalto /12/ presentó una técnica de tratamiento de singularidades en campos escalares. En el presente artículo se demuestra que dicho -- elemento puede emplearse en la modelización de fracturas en regimen elástico siguiendo para su demostración los desarrollos utilizados por Thompson y -- Whiteman /13/.

2.- ESTUDIO DE LA SINGULARIDAD EN ELEMENTOS CON NODOS A "1/4" Y EN EL ELEMENTO DE TRANSICION.

Recordemos algunos conceptos de la formulación isoparamétrica. Sea el elemento isoparamétrico cuadrático (fig.1) con unos ejes locales λ, μ $0 \leq \lambda \leq 2$, $0 \leq \mu \leq 2$, y unos ejes generales x, y .

El jacobiano de la transformación $\Omega(x, y) \rightarrow \hat{\Omega}(\lambda, \mu)$ viene dado por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad y \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \mu} & -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ -\frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{con } |J| = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu}$$

Es decir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \mu} \quad ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{-1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{-1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

Y como $E_{11} = \frac{\partial U(\lambda, \mu)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}$

tendremos sustituyendo $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ y $\frac{\partial \mu}{\partial x}$:

$$E_{11} = \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) / |J| \quad (1)$$

Análogamente:

$$E_{22} = \frac{\partial V(\lambda, \mu)}{\partial y} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) / |J| \quad (2)$$

$$y \quad E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) / |J| \quad (3)$$

En el caso de que consideremos el elemento cuadrilateral de 8 nodos isoparamétrico, tendremos las transformaciones:

$$x(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) x_k$$

$$y(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) y_k$$
(4)

en donde (x_k, y_k) son las coordenadas de los nodos y las funciones de base N_k , $k=1,2,\dots,8$, tienen la forma:

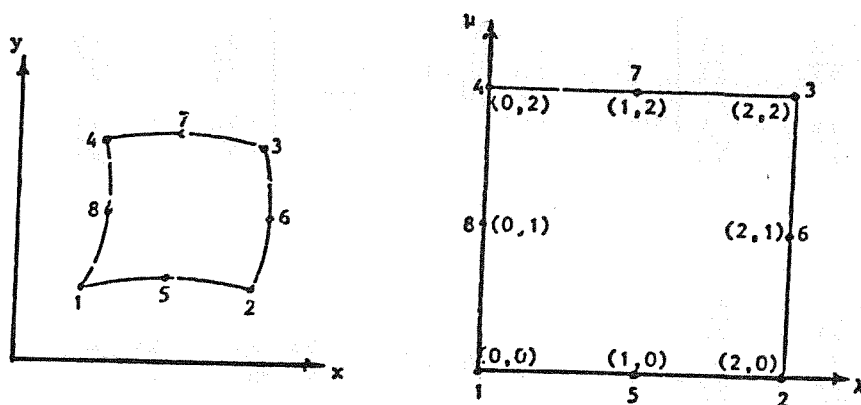


Fig.1. Elemento isoparamétrico cuadrilateral cuadrático.

$$N_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{4} (2-\lambda)(2-\mu)(1-\lambda-\mu) ; \quad N_2(\lambda, \mu) = \frac{1}{4} \lambda(2-\mu)(\lambda-\mu-1)$$

$$N_3(\lambda, \mu) = \frac{1}{4} \lambda\mu(\lambda+\mu-3) ; \quad N_4(\lambda, \mu) = \frac{1}{4} \mu(2-\lambda)(\mu-\lambda-1)$$

$$N_5(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \lambda(2-\lambda)(2-\mu) \quad N_6(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \lambda\mu(2-\mu)$$

$$N_7(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \lambda\mu(2-\lambda) \quad N_8(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \mu(2-\lambda)(2-\mu)$$

Los desplazamientos se aproximan mediante las mismas funciones de base (formulación isoparamétrica) y por tanto:

$$U(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) U_k \tag{6}$$

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) V_k$$

donde U_k, V_k , son los desplazamientos en los nodos. Operando, tendremos:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu + \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \mu^2 + \alpha_6 \lambda\mu + \alpha_7 \lambda^2 \mu + \alpha_8 \lambda \mu^2 \\ y(\lambda, \mu) &= \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu + \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_5 \mu^2 + \gamma_6 \lambda\mu + \gamma_7 \lambda^2 \mu + \gamma_8 \lambda \mu^2 \end{aligned} \tag{7}$$

$$U(\lambda, \mu) = \beta_1 + \beta_2 \lambda + \beta_3 \mu + \beta_4 \lambda^2 + \beta_5 \mu^2 + \beta_6 \lambda\mu + \beta_7 \lambda^2 \mu + \beta_8 \lambda \mu^2$$

$$V(\lambda, \mu) = \delta_1 + \delta_2 \lambda + \delta_3 \mu + \delta_4 \lambda^2 + \delta_5 \mu^2 + \delta_6 \lambda\mu + \delta_7 \lambda^2 \mu + \delta_8 \lambda \mu^2$$

en donde:

$$\alpha_1 = x_1$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_5$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 + 2x_8$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_5$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 - x_8$$

$$\alpha_6 = \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8$$

$$\alpha_7 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_7$$

$$\alpha_8 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_8$$

con expresiones similares para β_K , γ_K , δ_K , $K=1, \dots, 8$ relacionados con y_K , U_K y V_K respectivamente.

Mediante las expresiones anteriores (1)-(8) se puede estudiar la forma de las deformaciones en el entorno del vértice de la fractura, (y naturalmente, en el plano x-y).

Este estudio ha sido llevado a cabo en /13/ de forma sistemática para todos los elementos isoparamétricos (degenerados o no, y de transición bi y tridimensionales). Los resultados más importantes obtenidos son:

- a) Cuadrilátero con nodos a "1/4". En este caso la singularidad que aparece no es del orden de $r^{-\frac{1}{2}}$ salvo que los lados del elemento sean rectos y estén sobre los ejes x e y. Sin embargo, aún en este caso la singularidad en sentido radial entre los ejes "x" e "y" no es del orden de $r^{-\frac{1}{2}}$.
- b) Triángulo con nodos a "1/4", que proviene de haber colapsado un cuadrilátero con nodos a "1/4". En este caso, la singularidad que aparece para cualquier sentido radial es del orden de $r^{-\frac{1}{2}}$ en el caso en que el lado colapsado coincida con el punto singular.
- c) Triángulo de 6 nodos con nodos a "1/4". En este caso la singularidad conseguida en el punto singular es del orden de $r^{-\frac{1}{2}}$.
- d) En el caso de emplear los elementos de transición desarrollados por Lynn e Ingraffea /14/, los elementos deben ser cuadriláteros de lados rectos con los lados 1-8-4 y 2-6-3 perpendiculares al lado 1-5-2 (figura 2) para modelizar adecuadamente la singularidad $r^{-\frac{1}{2}}$. Además, evidentemente el elemento no puede ser degenerado a un triángulo y se debe de verificar que $y_3 > \bar{y}_4$.
- e) Análogos resultados a los de a) y b) se obtendrían para elementos singulares completos (9 nodos), siempre que se lleve a cabo una correcta ubicación del nodo central, tal y como se demuestra en /15/.

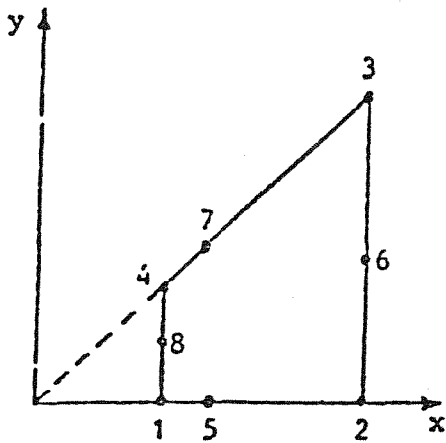


Fig.2. Elemento de transición en mecánica de la fractura.

3.- UN NUEVO ELEMENTO PARA EL ESTUDIO DE FRACTURA EN REGIMEN ELASTICO.

La formulación de elementos que incorporan la singularidad a través del cambio en la forma del elemento y coordenadas de los puntos nodales, puede verse en la ref /12/ y de acuerdo con ella en el caso de la figura 3 los valores de r_i y ψ_i dados por las fórmulas (9) definen la posición de los nodos.

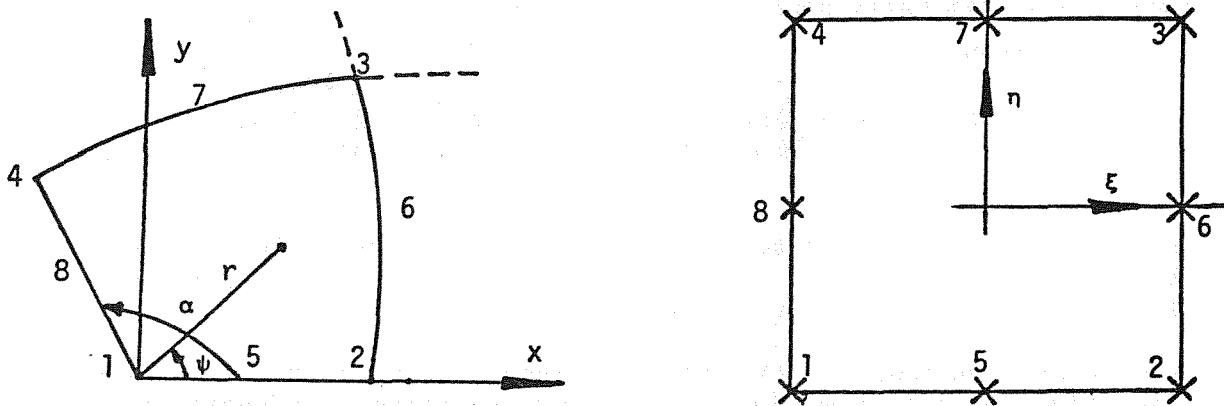


Fig. 3. Elemento isoparamétrico de lados curvos que incluye la singularidad.

$$r_i = \frac{1}{4} (\xi_i + 1)^2 + \frac{1}{4} (\eta_i + 1)^2 \cdot a^{\alpha/\pi} \quad (9)$$

$$\psi_i = \frac{2\alpha}{\pi} \arctan \frac{\eta_i + 1}{\xi_i + 1}$$

Vamos a realizar una formulación general del problema utilizando dos elementos isoparamétricos cuadráticos para modelizar la singularidad que tiene lugar cuando $\pi/2 < \alpha < \pi$ y posteriormente estudiaremos el caso particular de fractura que tiene lugar cuando $\alpha = \pi$.

Aplicando las fórmulas (9) al caso de la figura 3, tendremos los valores de r_i y ψ_i dados en la tabla I, de los que deducimos las coordenadas nodales i que son:

$$x_1 = 0 ; \quad x_2 = a ; \quad x_3 = a \cdot 2^{\alpha/\pi} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} ; \quad x_4 = a \cdot \cos \alpha ;$$

$$x_5 = a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} ; \quad x_6 = a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cdot \cos \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{1}{2}\right) ;$$

$$x_7 = a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \frac{2\alpha}{\pi} \arctan (2) ; \quad x_8 = a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0 ; y_2 = 0 ; y_3 = a \cdot 2^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} ; y_4 = a \cdot \operatorname{sen} \alpha ; y_5 = 0 ; \\
y_6 &= a \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}\right) ; y_7 = a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2) ; \\
y_8 &= a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cdot \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (8), calculamos los valores de α_i y γ_i ($i=1,2,\dots,8$), que son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0 ; \alpha_2 = 2 a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} - \frac{1}{2} a ; \alpha_3 = 2 a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} - \frac{1}{2} a \cos \alpha ; \\
\alpha_4 &= \frac{1}{2} a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} ; \alpha_5 = \frac{1}{2} a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \alpha ; \\
\alpha_6 &= -\frac{1}{4} a - \frac{3}{4} a \cdot 2^{\alpha/\pi} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} a + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} a \cos \alpha + \\
&\quad + a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \left(\frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}\right)\right) + \cos \left(\frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\right) ; \\
\alpha_7 &= -\frac{1}{4} a + \frac{1}{4} a 2^{\alpha/\pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} a \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} - \\
&\quad - \frac{1}{2} a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 ; \\
\alpha_8 &= \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} a 2^{\alpha/\pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} - \frac{1}{4} a \cos \alpha - \\
&\quad - \frac{1}{2} a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \cos \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0 ; \gamma_2 = 0 ; \gamma_3 = 2 a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \alpha ; \gamma_4 = 0 ; \\
\gamma_5 &= \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \alpha - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \alpha ; \\
\gamma_6 &= -\frac{3}{4} a \cdot 2^{\alpha/\pi} \cdot \operatorname{sen} \alpha / 2 - \left(\frac{1}{4} a + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} a \operatorname{sen} \alpha + \right. \\
&\quad \left. + a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}\right)\right) + \operatorname{sen} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\right) ; \right. \\
\gamma_7 &= \frac{1}{4} a \cdot 2^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} a \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 ; \\
\gamma_8 &= \frac{1}{4} a \cdot 2^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\pi} - \frac{1}{4} a\right) \operatorname{sen} \alpha - \\
&\quad - \frac{1}{2} a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\pi} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ahora bien, vemos que para que la mayor parte de esos valores se anulen, debe de ser $\alpha=\pi$ (caso de fractura) en cuyo caso tendríamos el elemento de la figura 4 con:

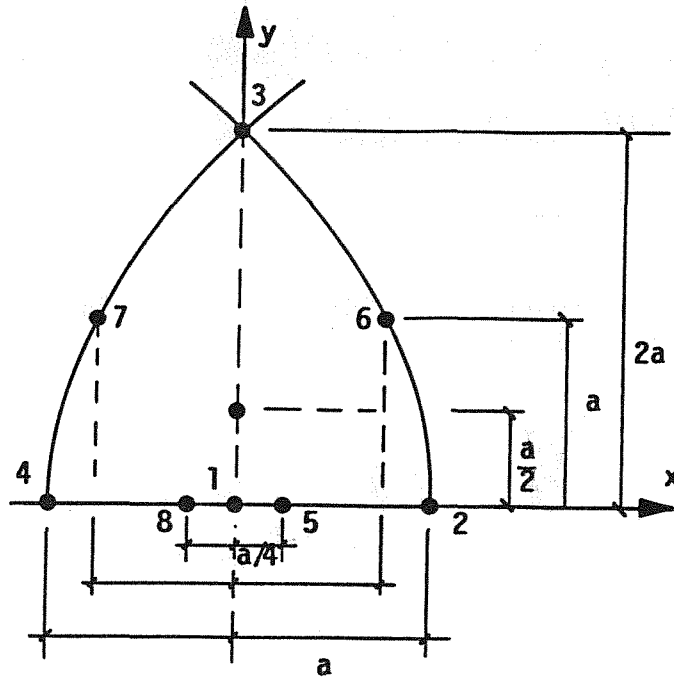


Fig.4. Elemento de Aalto para mecánica de la fractura.

$$y_4 = y_8 = y_1 = y_5 = y_2 = 0 ; y_6 = y_7 = a ; y_3 = 2a.$$

$$x_1 = x_3 = 0 ; x_5 = a/4 ; x_2 = a ; x_6 = 3a/4 ; x_8 = -a/4 ; x_4 = -a ; x_7 = -3a/4.$$

y aplicando (8) tendremos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 ; \alpha_4 = a/4 ; \alpha_5 = -a/4 ; \text{ con } x(\lambda, \mu) = \frac{a}{4}(\lambda^2, \mu^2) \quad (10)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0 ; \gamma_6 = \frac{a}{2} \text{ con } y(\lambda, \mu) = \frac{a}{2} \lambda \mu \quad (11)$$

de donde:

$$r = \frac{a}{4}(\lambda^2 + \mu^2) \quad (12)$$

y

$$|J| = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \frac{a^2}{4} (\lambda^2 + \mu^2) \quad (13)$$

Los valores de las deformaciones serán:

$$E_{22} = \frac{\delta_3 \lambda + \delta_2 \mu + \delta_6 \lambda^2 + 2(\delta_4 + \delta_5) \lambda \mu + \delta_6 \mu^2 + \delta_7 \lambda^3 + 2\delta_8 \lambda^2 \mu + 2\delta_7 \lambda \mu^2 + \delta_8 \mu^3}{\frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2)} \quad (14)$$

$$E_{11} = \frac{\beta_2 \lambda - \beta_3 \mu + 2\beta_4 \lambda^2 - 2\beta_5 \mu^2 + \beta_7 \lambda^2 \mu - \beta_8 \lambda \mu^2}{\frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2)} \quad (15)$$

$$E_{12} = \frac{(\delta_2 - \beta_2)\lambda + 2(\delta_4 - \beta_4)\lambda^2 - (\delta_3 + \beta_3)\mu - 2(\delta_5 + \beta_5)\mu^2 - 2\beta_6\lambda\mu + (\delta_7 - 3\beta_7\lambda^2\mu) - (\delta_8 + 3\beta_8)\lambda\mu^2}{a(\lambda^2 + \mu^2)} \quad (16)$$

(En la tabla II pueden verse los valores obtenidos a lo largo de los ejes x e y del elemento (Fig.4).

4.- ELEMENTOS DE AKIN

En el apartado anterior hemos visto como se puede construir un elemento singular sin más que modificar la posición de los nodos en el plano x-y (es decir, desde el punto de vista matemático actuando sobre el jacobiano).

Consideraremos ahora el caso de los elementos de Akin (/10/ y /11/), que se caracterizan por introducir nuevas funciones de base.

Sea el elemento de 3 nodos de la figura 5:



Fig. 5. Elemento triangular de tres nodos (Akin).

Las funciones en forma standard (N_i) y de Akin (H_i) son:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \lambda - \mu & H_1 &= 1 - (\lambda + \mu)^{1-P} \\ N_2 &= \lambda & H_2 &= \lambda(\lambda + \mu)^{-P} \\ N_3 &= \mu & H_3 &= \mu(\lambda + \mu)^{-P} \end{aligned} \quad (18)$$

con $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq \mu < 1$.

Tendremos, por tanto:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \sum_i N_i x_i = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu \\ y(\lambda, \mu) &= \sum_i N_i y_i = \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu \end{aligned} \quad (19)$$

con:

$$\alpha_1 = x_1 \quad ; \quad \alpha_2 = x_2 - x_1 \quad ; \quad \alpha_3 = x_3 - x_1$$

$$\gamma_1 = y_1 \quad ; \quad \gamma_2 = y_2 - y_1 \quad ; \quad \gamma_3 = y_3 - y_1$$

Si hacemos, sin pérdida de generalidad, $x_1 = y_1 = 0$ (fig.6) será:

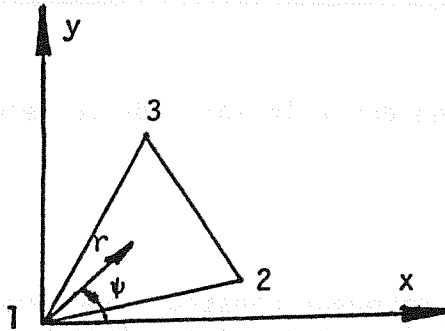


Figura 6.

$$x = \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu$$

$$y = \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu$$

y a lo largo de una línea radial ($\frac{x}{y} = \text{cte}$) debe de ser:

$$\frac{\lambda}{\mu} = a_1 (= \text{cte}) \quad (20)$$

y proporcional a r.

Como:

$$u = \sum_i H_i u_i = [1 - (\lambda + \mu)]^{1-p} u_1 + \lambda (\lambda + \mu)^{-p} u_2 + \mu (\lambda + \mu)^{-p} u_3$$

e igual para v, la aproximación de la deformación vendrá dada por (1), luego:

$$E_{11} = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{1}{|J|} =$$

$$= ((\lambda + \mu)^{-p} [(p-1)u_1(\gamma_3 + \gamma_2) + u_2\gamma_3 + u_3\gamma_2] - p(\lambda + \mu)^{-p-1} (\gamma_2 + \gamma_3) [\mu_2\lambda + u_3\mu]) \frac{1}{\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2}$$

y sustituyendo la relación (20):

$$E_{11} = ((1 + a_1)\mu)^{-p} \cdot A_1'' + ((1 + a_1)\mu)^{-p-1} \cdot A_2'' =$$

$$= A_1' \mu^{-p} + A_2' \mu^{-p-1} = A_1 r^{-p} + A_2 r^{-p-1}$$

Y en el caso de fractura es $p = \frac{1}{2}$, luego:

$$E_{11} = A_1 r^{-\frac{1}{2}} + A_2 r^{-\frac{3}{2}} \quad (21)$$

Como se ve, el elemento representa correctamente la forma de la singularidad, pero no incluye condiciones de deformación constante (necesarias por ejemplo en termoelasticidad).

La implementación de este elemento en un programa de elementos finitos es simple, sin embargo si se parte de la formulación isoparamétrica hay que tener ciertas precauciones. En efecto, si se modifican sin más las funciones de forma con arreglo a (18), la interpolación geométrica quedará de la forma:

$$x(\lambda, \mu) = \sum_i H_i x_i \quad (22)$$

$$y(\lambda, \mu) = \sum_i H_i y_i$$

Vamos a deducir que sucede con la deformación en el caso de tener (22) por (18) como interpolación geométrica. Para ello comprobaremos en primer lugar que (22) transforma rectas en rectas. En efecto, pongamos $a\lambda + b = \mu$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 = y_1 = 0$. Entonces:

$$x = \lambda(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-P} x_2 + (a\lambda + b)(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-P} x_3$$

$$y = \lambda(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-P} y_2 + (a\lambda + b)(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-P} y_3$$

con $\alpha_1 = a+1$ y $\alpha_2 = b$. Dividiendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda(x_2 + ax_3) + bx_3}{\lambda(y_2 + ay_3) + by_3}$$

Y si $b = 0$, tendremos que la transformada de una línea radial en $\hat{T}(\hat{r})$ es una línea radial en $T(r)$. Por consiguiente, según una línea radial en el plano x - y será:

$$\frac{\lambda}{\mu} = a_1 \text{ (=cte.)}$$

La aproximación de la deformación vendría dada por (1) y procediendo como en el caso anterior, y después de algunas manipulaciones, se observa que E_{11} presenta la forma $A_1 + A_2 r^{-2}$ que no es la correcta.

En otros casos, empleando correctamente la transformación isoparamétrica, como por ejemplo en el elemento triangular de 6 nodos, no se aproxima la singularidad radialmente en todo el dominio del elemento.

5.- CONCLUSIONES

Los elementos que tienen sus nodos en la cuarta parte del lado, deben emplearse con cuidado ya que los elementos cuadrilaterales sólo modelizan la singularidad a lo largo de sus lados en el caso de que estén dirigidos según los ejes y además no modelizan la singularidad en sentido radial.

Los elementos desarrollados por Aalto para la modelización de singularidades en campos escalares, pueden aplicarse perfectamente al caso de la fractura elástica ya que representan perfectamente la singularidad requerida en la deformación. Además, la singularidad quedaría representada, modelizando toda la grieta, únicamente con dos elementos.

En el caso de emplear elementos de Akin hay que tener cuidado al realizar su implementación en programas isoparamétricos dado que sólo alteramos las funciones de base pero no las de transformación. Además se trata de métodos poco exactos y que no modelizan convenientemente la singularidad ya que no poseen el término correspondiente de deformación constante e incluso en algunos casos la singularidad del tipo $r^{-\frac{1}{2}}$ no queda modelizada en el sentido radial en todo el dominio elemental.

6.- REFERENCIAS

- /1/ Byskov, E., "The calculation of stress intensity factors using the finite element with cracked elements". International Journal of -- Fracture, Vol. 11, 1970, pp. 159-167.
- /2/ Tong, P., Pian, T.H.H., and Larsy, S.J., "A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 7, 1973, pp. 297-308.
- /3/ Rice, J.R., and Tracey, D.M., "Computational fracture mechanics", Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S.J. Fannes, et al., eds., Academic Precc, New York, N.Y., 1973, pp. 585-623.
- /4/ Morris, J.L., and Wait, R., "Crack-tip elements with curved boundaries and variable nodes". Applied Mathematical Modeling, Vol. 3, 1979, -- pp. 259-262.
- /5/ Okabe, M. "Quadrilateral element with semi-radial singularity mapping". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1981, pp. 1045-1067.
- /6/ Barsoum, R.S. "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics" International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 1976, pp. 25-37.
- /7/ Barsoum, R.S., "Triangular quarter point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements" International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1977, pp.85-89.
- /8/ Henshell, R.D., and Shaw, K.G., "Crack-tip elements are unnecessary", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 1975, pp. 495-507.
- /9/ Murti, V., Valliappan, S., and Lee, I.K. "Stress intensity factor using quarter point element". Proceedings of the A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics. Vol. 111, No.2, February 1985.
- /10/ Akin, J.E., "The generation of elements with singularities". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 1976, pp. 1249-1259.
- /11/ Hughes, T.J.R., and Akin, J.E. "Techniques for developing 'special' finite element shape functions with particular reference to singularities". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1980, pp. 733-751.
- /12/ Aalto, J., "Singularity elements for seepage analysis". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Engineering, Vol. 9 1985, pp. 185-196.
- /13/ Thompson, G.M. and Whiteman, J.R. "Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and nonsingular finite elements" Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol. 2, 1985, pp. 85-104.
- /14/ Lynn, P.D., and Ingraffea, A.R. "Transition elements to be used with quarter point crack-tip elements". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, 1978, pp. 1031-1036.
- /15/ Gavete, L., Michavila, F., Díez, F., "Elementos cuadráticos completos para modelización de singularidades". II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería (A aparecer).

T A B L A S

TABLA I: Coordenadas Polares Nodales (Elemento de Aalto)

Punto nodal	ξ_i	η_i	r_i	ψ_i
1	-1	-1	0	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot 0 = 0$
8	-1	0	$a(\frac{1}{4})^{\alpha/\pi}$	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \alpha$
4	-1	1	a	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} =$
5	0	-1	$a(\frac{1}{4})^{\alpha/\pi}$	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot 0 = 0$
7	0	1	$a(\frac{5}{4})^{\alpha/\pi}$	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \text{arc tg } 2$
2	1	-1	a	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot 0 = 0$
6	1	0	$a(\frac{5}{4})^{\alpha/\pi}$	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \text{arc tg}(\frac{1}{2})$
3	1	1	$a \cdot 2^{\alpha/\pi}$	$\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2}$

TABLA II: Representación de la deformación (Elemento de Aalto)

	$\lambda=0$ (lado 1-8-4)	$\mu=0$ (lado 1-5-2)	$\lambda=\mu$ (línea 1-3)
E_{22}	$A_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + A_2 + A_3 \sqrt{r}$	$B_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + B_2 + B_3 \sqrt{r}$	$C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + C_2 + C_3 \sqrt{r}$
E_{11}	$D_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + D_2$	$E_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + E_2$	$F_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + F_2 + F_3 \sqrt{r}$
E_{12}	$G_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + G_2$	$H_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + H_2$	$I_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + I_2 + I_3 \sqrt{r}$

Siendo $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, I_i, (i=1, \dots, 8)$ función de $\delta_k, \beta_k, (k=1, \dots, 8)$