

## ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA CONTRASTACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS MODELOS DE FRACTURA DE HORMIGÓN

Llorca, J., Planas, J., Elices, M.

Departamento de Ciencia de Materiales  
Universidad Politécnica de Madrid  
E.T.S. Ingenieros de Caminos. Ciudad Universitaria.  
28040 - MADRID.

**Resumen.** - Durante los últimos años se han desarrollado diversos modelos basados en la Mecánica de Fractura no lineal para explicar el comportamiento en fractura del hormigón. Un método habitual para contrastar experimentalmente los modelos es realizar ensayos no estables con distintas geometrías y tamaños, ajustando los parámetros de cada modelo para reproducir los valores de las cargas máximas obtenidas en los ensayos. Por desgracia, a pesar del importante esfuerzo experimental llevado a cabo en esta línea, no se ha conseguido definir qué modelos son más adecuados y cual es su rango de validez. En este artículo se estudia teóricamente la posibilidad de validar los modelos midiendo únicamente la carga máxima y para los tamaños que es razonable ensayar en el laboratorio usando probetas compactas y de flexión en tres puntos. A partir de un conjunto de resultados experimentales, se han ajustado los parámetros de los modelos y, mediante el método de los elementos finitos, se han calculado los resultados predichos por cada uno. Para tamaños muy grandes se han estudiado las relaciones entre los distintos modelos y se ha realizado un análisis asintótico para conocer los distintos comportamientos. Los resultados obtenidos muestran que, para los tamaños usuales en el laboratorio, los modelos son prácticamente indistinguibles mientras que para grandes tamaños presentan diferencias en la carga máxima de hasta el 30%. Por lo tanto, la contrastación experimental de los modelos debe basarse en medir otras magnitudes además de la carga máxima.

**Abstract.** - During last years, several models based on non-linear fracture mechanics have been developed in order to explain the concrete fracture behaviour. One usual method to experimentally contrast the models is to perform unstable tests with different geometries and sizes. Each model parameters are adjusted to reproduce the maximum load values obtained in the tests. Unfortunately, in spite of the important experimental effort carried out in this way, it has not been possible to find out what are the most adequate models and what is their validity range.

This paper studies theoretically the possibility of validating the models by measuring the maximum load only and for those sizes and geometries (compact tension and three point bend specimens) that are usually tested in the laboratory. To this end, the model parameters have been adjusted from a set of experimental results and maximum loads predicted by each one have been calculated by finite element analysis. For larger sizes the analysis has been done using the asymptotic approximation developed previously. The results obtained show that, for the practical laboratory sizes and geometries, the models are practically undistinguishable. However, large sizes show up to 30% differences in maximum load determination. Therefore, experimental validation of the models must be based not only on maximum load determination, but on other magnitudes as well.

### 1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día es comúnmente aceptado que para explicar el comportamiento en rotura del hormigón es necesario aplicar la Mecánica de Fractura no lineal [8]. Entre los distintos modelos desarrollados con este fin, unos hacen uso de los conceptos básicos de la fractura elástica y lineal introduciendo hipótesis complementarias para reproducir las no-linealidades y otros describen la fractura mediante ecuaciones constitutivas con ablandamiento e hipótesis complementarias de localización de las deformaciones. En ambas situaciones, algunos de los parámetros de los modelos (longitud de la fisura en los primeros y forma de la curva de ablandamiento en los segundos) son difíciles de medir experimentalmente y se suelen obtener por métodos indirectos.

Un método sencillo para contrastar experimentalmente los modelos es medir las cargas máximas obtenidas para distintas geometrías y tamaños de laboratorio. Los parámetros de los modelos que no se pueden medir directamente se ajustan de manera que reproducen las cargas máximas experimentales obtenidas para distintos tamaños y una misma geometría. Con estos parámetros, los modelos deben predecir las cargas máximas de otros ensayos realizados con geometrías diferentes. Es de esperar que, de todos los modelos disponibles, sólo uno de ellos realice correctamente esta predicción. Sin embargo hasta ahora todos ellos han dado buenos resultados y, teniendo en cuenta la dispersión experimental, no se puede afirmar que uno sea superior a los otros. En este artículo se comparan tres modelos que han sido propuestos independientemente a la RILEM como marco teórico para caracterizar el

comportamiento en fractura del hormigón: el modelo de la Fisura Cohesiva [1], la ley del Efecto del Tamaño de Bazant [2] y el modelo de Dos Parámetros de Shah [3]. El objetivo es demostrar si es o no posible validar uno de los modelos frente a los otros midiendo únicamente la carga máxima para geometrías y tamaños de laboratorio.

## 2. CURVAS DE INFLUENCIA DEL TAMAÑO EN LA CARGA DE ROTURA

Para lograr el objetivo hay que comparar las curvas de influencia del tamaño en la carga de rotura que se obtienen de cada modelo para distinguir geometrías. El análisis de los resultados es más sencillo cuando las curvas de efecto del tamaño se dibujan en función de dos variables adimensionales X e Y [4]. La variable de ordenadas Y viene expresada por:

$$Y = \frac{E G_F}{K_{IN,max}^2} \quad (1)$$

donde E es el módulo de elasticidad,  $G_F$  la energía de fractura y  $K_{IN,max}$  el factor de intensidad de tensiones nominal máximo definido de la siguiente forma:

$$K_{IN,max} = \frac{3P_{max}}{2BD^{1/2}} S(a_0/D) \quad (2)$$

donde  $P_{max}$  es la carga máxima,  $a_0$  la entalla inicial, B es el espesor y D la anchura. Se han estudiado la probeta compacta y la viga de flexión en tres puntos con las dimensiones recomendadas en la norma ASTM E-399. La función de forma  $S(a_0/D)$  es bien conocida para estas geometrías.

La variable de abcisas X puede escribirse así:

$$X = \frac{2 S'(a_0/D)}{S(a_0/D)} \frac{lch}{D} \quad (3)$$

donde  $S'(a_0/D)$  es la derivada de  $S(a_0/D)$  con respecto al argumento,  $lch$  es la longitud característica del material definida como:

$$lch = \frac{EG_F}{\sigma_t^2} \quad (4)$$

y  $\sigma_t$  la tensión de rotura en tracción del hormigón. La función X depende de las propiedades del material ( $lch$ ), del tamaño (D) y de la geometría ( $S(a_0/D)$ ). En principio, diferentes modelos presentan diferentes estimaciones de los parámetros de fractura  $G_F$  y  $lch$ , por lo que, para poder comparar los resultados, las coordenadas X e Y deben obtenerse con los parámetros de un modelo de referencia. En lo que sigue se tomará como modelo de referencia el modelo de la fisura cohesiva con ablandamiento exponencial, que se define en la sección siguiente, con lo que los parámetros genéricos  $G_F$  y  $lch$  de las ecuaciones (1) y (3) se escriben como  $G_{FE}$  y  $lchE$ , donde el subíndice E se refiere a ablandamiento Exponencial.

### Modelos de Fisura Cohesiva

Las curvas de influencia del tamaño en la carga de rotura para el modelo de fisura cohesiva se obtuvieron mediante el método de las matrices de influencias [5]. Las mallas de elementos finitos utilizadas para obtener

las matrices de influencia, están representadas en la figura 1. Se han utilizado 100 elementos iguales en las secciones centrales para conseguir unos resultados precisos en el rango de tamaños estudiado ( $0.75 < lch/D \leq 3$ ), equivalente, para un hormigón normal, a D comprendidos entre 10 y 40 cm aproximadamente.

Para cada geometría se han repetido los cálculos con dos curvas de ablandamiento distintas. Ablandamiento exponencial

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = (1+A) e^{-\left[\frac{B \sigma_t w}{G_{FE}}\right]} - A \quad \text{si } 0 < w \leq 5 \frac{G_{FE}}{\sigma_t} \quad (5a)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 0 \quad \text{si } \frac{5 G_{FE}}{\sigma_t} < w \quad (5b)$$

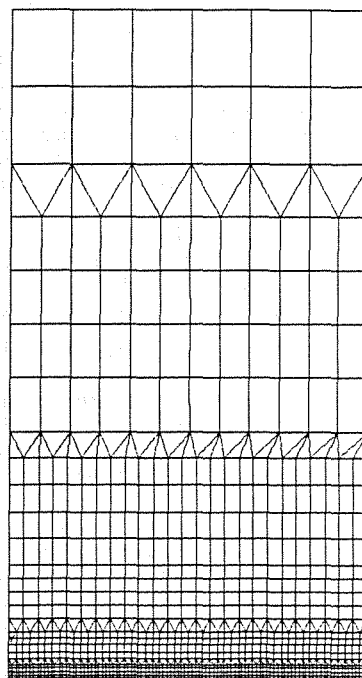


Fig. 1a. Malla de elementos finitos para la viga de flexión.

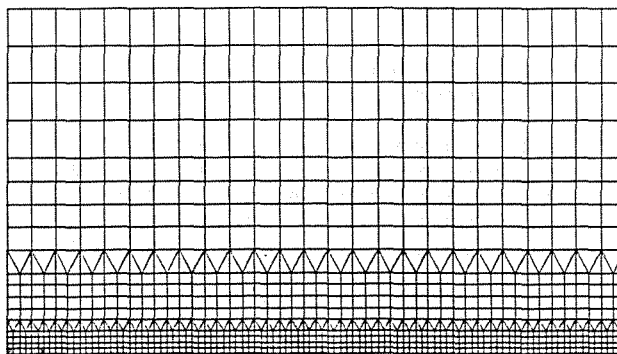


Fig. 1b. Malla de elementos finitos para la probeta compacta.

donde  $A = 8.2896 \cdot 10^{-3}$  y  $B = 0.9602$ ; y ablandamiento lineal

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 1 - \frac{\sigma_t}{2G_{FL}} w \quad \text{si } 0 < w < \frac{2G_{FL}}{\sigma_t} \quad (6a)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 0 \quad \text{si } \frac{2G_{FL}}{\sigma_t} < w \quad (6b)$$

donde el subíndice L para  $G_F$  se refiere a ablandamiento Lineal.

Para tamaños muy grandes ( $D \rightarrow \infty$ ,  $X \rightarrow 0$ ), la ecuación de curva de efecto del tamaño se ha podido conocer mediante el análisis asintótico [6] y adopta la forma:

$$Y = 1 + \frac{\Delta a_{C\infty}}{lch} X \quad (7)$$

donde  $\frac{\Delta a_{C\infty}}{lch}$  depende únicamente de las propiedades del material y vale 2.4805 para ablandamiento exponencial y 0.4195 para ablandamiento lineal [4].

#### Ley del Efecto del Tamaño

La ley del efecto del tamaño de Bazant [2] puede escribirse de la forma:

$$\frac{EG_{FB}}{K_{IN \max}^2} = 1 + \frac{\lambda_0}{D} \quad (8)$$

donde  $\lambda_0$  es un parámetro con dimensiones de longitud y que depende de la geometría y del material.  $G_{FB}$  es la energía de fractura de acuerdo con el modelo de Bazant. Realizando un cambio de coordenadas, la ecuación (8) puede escribirse:

$$Y = \frac{G_{FE}}{G_{FB}} \left[ 1 + \frac{\Delta a_{C\infty B}}{lchE} X \right] \quad (9)$$

El nuevo parámetro  $\Delta a_{C\infty B}$  depende también de la geometría y de las propiedades del hormigón.

#### Modelo de los Dos Parámetros

El modelo de los dos parámetros de Shah postula que en un elemento fisurado inicialmente, al aumentar la carga exterior se produce un crecimiento de la fisura. La carga máxima se alcanza cuando, para la nueva fisura de longitud  $a_0 + \Delta a_c$ , simultáneamente el factor de intensidad de tensiones alcanza un valor crítico  $K_{IC}^S$  y la abertura de la fisura en el lugar donde se encontraba la entalla inicial llega a un valor crítico  $CTOD_c^S$ . Ambos parámetros,  $K_{IC}^S$  y  $CTOD_c^S$  son propiedades del material e independientes de la geometría.

Para comparar el modelo de Shah con los otros modelos es conveniente definir dos parámetros derivados,  $G_{FS}$  y  $\Delta a_{C\infty S}$  de acuerdo con:

$$K_{IC}^S = (E G_{FS})^{1/2} \quad (10a)$$

$$\Delta a_{C\infty S} = \frac{\pi E (CTOD_c^S)^2}{32 G_{FS}} \quad (10b)$$

A partir de estos nuevos parámetros puede llegarse a una expresión asintótica de la ley del efecto del tamaño ( $X \rightarrow 0$ ) [7]:

$$Y = \frac{G_{FE}}{G_{FS}} \left[ 1 + \frac{\Delta a_{C\infty S}}{lchE} X \right] \quad (11)$$

En [7] se da la expresión paramétrica para la curva completa de efecto del tamaño. A diferencia del modelo de Bazant,  $\Delta a_{C\infty S}$  depende únicamente de las propiedades del material y no de la geometría. La longitud característica (ecuaciones (9) y (11)) se calcula con la energía de fractura del modelo de la fisura cohesiva. (ecuación 4).

### 3. COMPARACION ENTRE LOS MODELOS

Supongamos que disponemos de un conjunto de resultados experimentales para la probeta de flexión en tres puntos con una entalla inicial  $a_0/D = 0.5$ . Como rango de tamaños que se suelen ensayar en el laboratorio tomamos  $0.1 \text{ m} \leq D \leq 0.4 \text{ m}$ . Supongamos que estos resultados se pueden ajustar con toda precisión mediante el modelo de la fisura cohesiva con ablandamiento exponencial, con unas magnitudes de la energía de fractura y de la longitud característica  $G_{FE}$  y  $lchE$ . Estos 2 valores se utilizan como referencia para comparar con los demás modelos.

A partir del mismo conjunto de resultados experimentales se pueden ajustar los parámetros de los otros modelos ( $G_{FM}$  y  $\Delta a_{C\infty M}$ ) de manera que los reproduzcan adecuadamente [4]. Los resultados de este ajuste se encuentran en la tabla 1.

El modelo de fisura cohesiva con ablandamiento lineal tiene un solo grado de libertad en el ajuste puesto que una vez determinada  $G_{FL}$  la longitud característica  $lchL$  viene expresada por:

$$lchL = \frac{G_{FL}}{G_{FE}} \cdot lchE \quad (12)$$

TABLA 1. Resultados para los distintos modelos

Modelo	$G_{FM}/G_{FE}$	$\Delta a_{C\infty M}/\Delta a_{C\infty E}$	Máxima diferencia en la carga de fractura (%) [ $0.1 < D < 0.4 \text{ m}$ ]
Fisura cohesiva Ablandamiento lineal	0.64	0.108	± 2.0
Efecto del tamaño	0.52	0.044	± 2.5
Dos parámetros	0.48	0.030	± 2.9

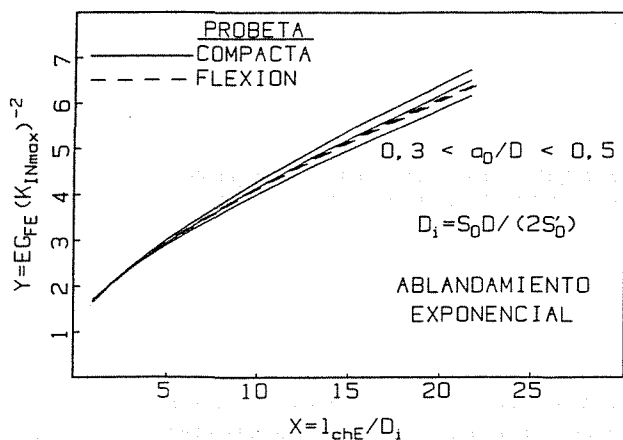


Fig. 2. Curvas de efecto del tamaño para el modelo de fisura cohesiva con ablandamiento exponencial.

A partir de los valores de  $G_{FE}$  y  $l_{chE}$  se han calculado las diferentes curvas de efecto del tamaño para la probeta de flexión en 3 puntos (TPB) ( $a_0/D = 0.2, 0.3, 0.4$  y  $0.5$ ) y la probeta compacta (CTS) ( $a_0/D = 0.3, 0.4$  y  $0.5$ ) del modo señalado más arriba. Los resultados se han dibujado en un diagrama X-Y en la figura 2. Como puede observarse, para la geometría de flexión, las curvas de efecto del tamaño son prácticamente independientes de la entalla inicial cuando se representan en estas coordenadas.

En las figuras 3 y 4 se muestran las curvas de efecto del tamaño para las geometrías TPB y CTS respectivamente, con diferentes entallas iniciales y para el modelo de fisura cohesiva con ablandamiento lineal y el modelo de referencia. Las características del hormigón con ablandamiento lineal ( $G_{FL}$  y  $\Delta a_{\infty L}$ ) son las recogidas en la tabla 1. Ambos modelos predicen comportamientos muy semejantes para los tamaños que se suelen ensayar en el laboratorio y la dispersión experimental hace que se muy difícil distinguir cual de ellos es el que modeliza correctamente la realidad.

Las figuras 5 y 6 son análogas a las 3 y 4 con la diferencia de que se ha representado la ley del efecto del tamaño de Bazant junto al modelo de referencia. El valor de  $G_{FB}$  utilizado es el de la tabla 1. Como en el modelo de Bazant  $\Delta a_{\infty B}$  depende del material y la geometría, se ha ajustado para cada probeta (TPB y CTS) y entalla inicial de manera que se acerque lo más posible a los valores del modelo de referencia. Al igual que en el caso anterior, ambos modelos predicen comportamientos muy semejantes en la zona experimental.

Finalmente se ha realizado la comparación para el modelo de los dos parámetros y la geometría TPB (figura 7), utilizando los parámetros del modelo de Shah de la tabla 1 y llegando a los mismos resultados que para los otros modelos.

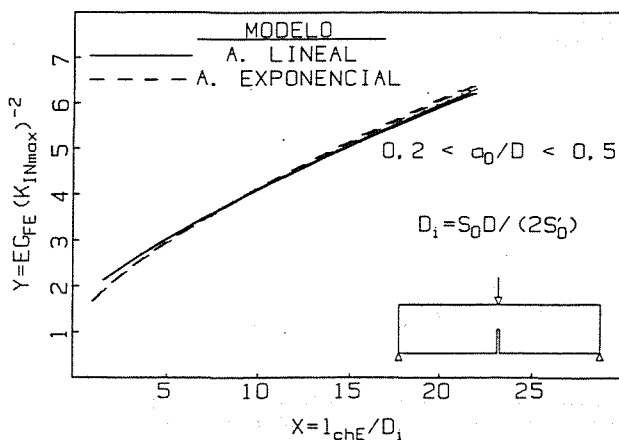


Fig. 3. Curvas de efecto del tamaño. Modelo de fisura cohesiva con ablandamiento lineal. Geometría TPB.

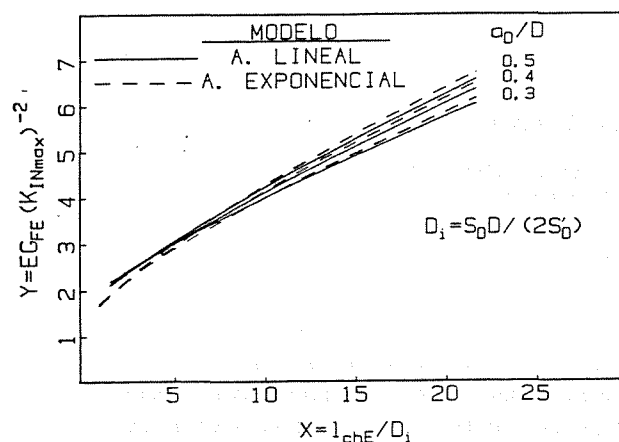


Fig. 4. Curvas de efecto del tamaño. Modelo de fisura cohesiva con ablandamiento lineal. Geometría CTS.

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados dibujados en las figuras 2-7 muestran que, para dos de las geometrías más comunes de laboratorio y los tamaños que habitualmente se puede ensayar, los parámetros de 4 de los modelos de fractura de hormigón más utilizados pueden ajustarse de tal modo que las curvas de efecto del tamaño no se pueden diferenciar. Por otro lado, aunque sus predicciones son semejantes en la zona experimental, para tamaños muy grandes aparecen grandes diferencias en la carga de rotura. El modelo de Shah, el modelo de Bazant y el modelo de la fisura cohesiva con ablandamiento lineal son conservadores, en un 31, 28 y 20% respectivamente, en relación al modelo de fisura cohesiva con ablandamiento exponencial [4].

En consecuencia, si se desea validar alguno de los modelos es necesario realizar ensayos en elementos de gran tamaño (varios metros de longitud) o bien medir otras magnitudes complementarias en los ensayos junto con la carga de rotura.

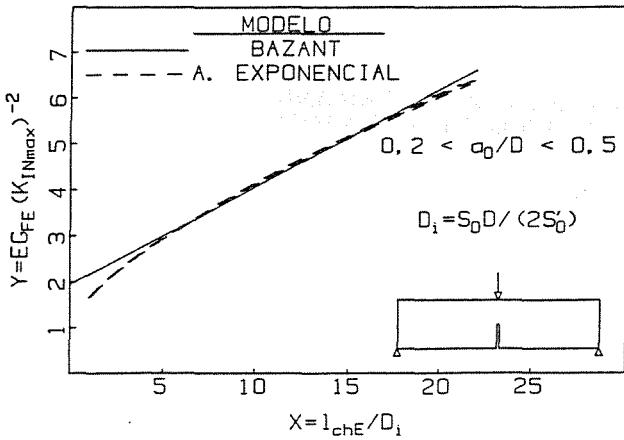


Fig.5. Curvas de efecto del tamaño. Modelo de Bazant. Geometría TPB

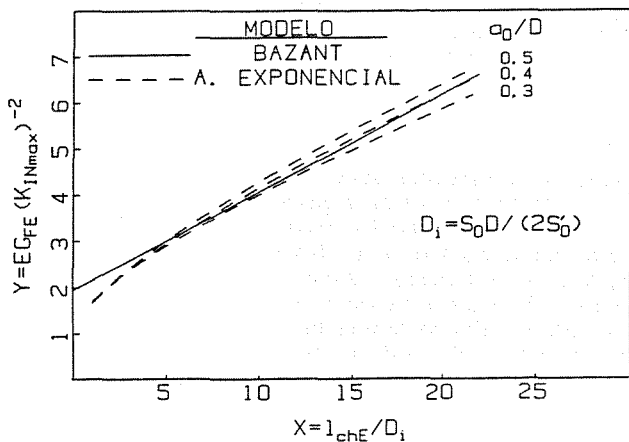


Fig. 6. Curvas de efecto del tamaño. Modelo de Bazant. Geometría CTS.

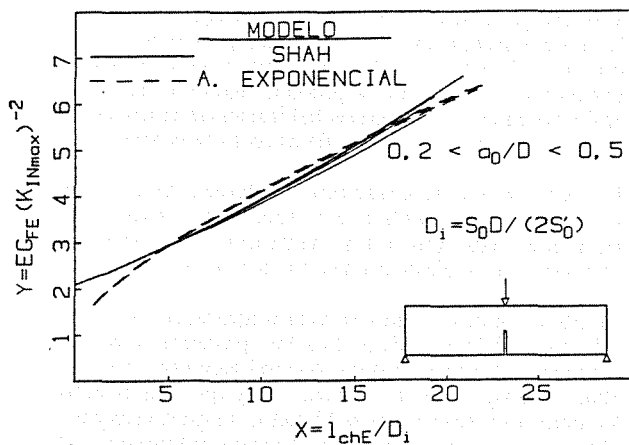


Fig. 7. Curvas de efecto del tamaño. Modelo de Shah. Geometría TPB.

5. REFERENCIAS

- [1] Hillerborg, A. (1985). "The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy  $G_F$  of Concrete". *Mat. Struct.*, 18. pp.291-296.
- [2] Bazant, Z.P. y Pfeiffer, P. (1987) "Fracture Energy of Concrete: Its Definition and Determination from Size Effect Tests". *Concrete Durability*. ACI SP 100-8. pp. 89-109.
- [3] Jenq, Y.S. y Shah, S.P. (1985) "A Two Parameter Fracture Model of Concrete". *J. Engng. Mech. ASCE*, 111. pp. 1227-1241.
- [4] Planas, J. y Elices, M. (1988) "Size-Effect in Concrete Structures: Mathematical Approximations and Experimental Validation". *Strain Localization and Size Effect due to Cracking and Damage*. Paris.
- [5] Petterson, P.E. (1981) "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials". Report TVBM 1006. Lund. Suecia.
- [6] Planas, J. y Elices, M. (1987) "Asymptotic Analysis of the Development of a Cohesive Crack Zone in Mode I Loading and Arbitrary Softening Curves". *Fracture of Concrete and Rock*. (S.P. Shah y S.E. Swartz Ed.) Houston.
- [7] Planas, J. y Elices, M. (1988). "Fracture Criteria for Concrete: Mathematical Approximations and Experimental Validation". *Fracture and Damage of Concrete and Rock*. Viena. Para publicar en *Engineering Fracture Mechanics*.
- [8] Elices, M., Planas, J., Llorca, J. y Guinea, G. (1988) "Métodos Numéricos en la Fractura de Materiales Cohesivos". *Anales de Mecánica de Fractura*, 5. pp. 61-89.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la ayuda económica prestada por la CICYT para realizar este trabajo, a través del proyecto de investigación PA85-0092