

PREDICCIÓN ANALÍTICA DEL COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN
MEDIANTE UN MODELO CON APROXIMACIÓN DISCRETA DE LA FISURACIÓN

P.F. Miguel, M.A. Fernández y M.A. Jawad

Departamento de Ingeniería de la Construcción
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n 46071 Valencia

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo de elementos finitos con aproximación discreta de la fisura, capaz de reproducir el comportamiento de las estructuras de hormigón. El modelo se caracteriza por los elementos fisura, su particular proceso de carga y la reorganización de la malla. Los efectos de encajamiento de áridos y tracción entre caras de la fisura en la zona de fractura se introducen en el modelo constitutivo de los elementos fisura. El nivel de carga se controla por el propio criterio de fisuración empleado. De esta forma, sólo se genera una fisura cada vez que la estructura alcanza el equilibrio y puede obtenerse, además, la trayectoria descendente de la respuesta carga-flecha. Finalmente, se compara la predicción de una fractura en modo mixto con los resultados experimentales.

ABSTRACT

A finite element model with discrete crack approach, which describes the behaviour of concrete structures is presented. The model is characterized by its crack elements, special loading process, and mesh reorganization. The effects of aggregate interlock and tension between crack faces in the fracture zone are introduced in the constitutive model of crack elements. The loading level is controlled by the cracking criterion. Thus, only one new crack length is generated each time the structure is balanced, and the descending branch of the load-deflection path may be obtained. Finally, the prediction of a mixed-mode fracture is verified with comparison with experimental results.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se presentan los últimos avances realizados en el modelo de elementos finitos desarrollado por los autores para la predicción analítica del comportamiento de estructuras de hormigón. El modelo utiliza la aproximación discreta de la fisura, es decir, modifica la malla de elementos finitos para reproducir la fisuración introduciendo nodos y elementos nuevos.

Los inconvenientes sufridos por la utilización de la técnica discreta de representación de las fisuras podrían resumirse en: a) que la malla es cambiante durante el proceso de carga; b) que el número de nodos y de elementos crece durante el proceso de carga, ampliando el número de grados de libertad en la malla; y c) que es necesario utilizar técnicas numéricas especiales de resolución del sistema de ecuaciones como son la optimización del ancho de banda [1] o el método frontal [2]. Sin embargo, estos inconvenientes se ven compensados por la mejor

y más realista representación de las fisuras, que permite introducir de una forma simple los efectos de encajamiento de áridos y pasador de las armaduras, así como los conceptos de mecánica de fractura. Por otra parte, la utilización de procesos numéricos de regeneración de la malla totalmente automatizados [3] y la utilización de ordenadores de gran potencia reducen notablemente los inconvenientes anteriormente enumerados.

De esta forma, el modelo descrito en el presente trabajo se convierte en una herramienta de gran eficacia para la predicción analítica del comportamiento de las estructuras de hormigón en masa o armado.

El ámbito de aplicación del modelo se reduce a las estructuras planas cargadas en su plano debido a la dificultad de la representación de la fisura mediante aproximación discreta si esta se produce según una superficie no plana

en el espacio. El modelo es, por tanto, aplicable a vigas esbeltas, ménsulas cortas, vigas de gran canto, pantallas, etc.

El objetivo del modelo es conseguir una representación del comportamiento de las estructuras de hormigón incluyendo en ellas la adherencia no perfecta de las armaduras con el hormigón que le rodea, el efecto encajamiento de áridos y el efecto pasador de las armaduras.

Sin embargo, siendo conscientes los autores de el efecto estabilizador de las armaduras sobre la fisuración, se ha considerado necesario contrastar el modelo con estructuras de hormigón en masa antes de aplicarlo a estructuras de hormigón armado. Los resultados y conclusiones obtenidos, junto con una breve descripción del modelo son el objeto de este trabajo.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En la descripción del modelo se hará solamente referencia a los aspectos fundamentales del mismo y que, de alguna manera, lo caracterizan. Estos pueden clasificarse en tres grandes grupos: a) los elementos finitos utilizados; b) el proceso de carga y criterio de fisuración; y c) la reorganización de la malla.

2.1 Elementos finitos utilizados

2.1.1 Hormigón

La malla de elementos finitos que representa al hormigón está formada por elementos isoparamétricos de cuatro nodos. Las ecuaciones constitutivas adoptadas han sido tomadas de las propuestas por M.D. Kotsyvos [4] y [5], para comportamiento triaxial, validadas con numerosos ensayos de laboratorio llevados a cabo en el Departamento de Ingeniería Civil del Imperial College (Universidad de Londres), y que figura entre las recomendadas por el Comité Euro-Internacional del Hormigón (C.E.B.) [6]. Para su aplicación en el modelo de elementos finitos presentado se ha impuesto la condición de tensión plana. Esta formulación tiene la ventaja de quedar totalmente definida mediante el valor de la resistencia a compresión simple del hormigón en probeta cilíndrica (f_c).

2.1.2 Fisura

El elemento finito que configura un tramo de fisura en la malla de elementos finitos es un elemento lineal constituido por cuatro nodos, dos comunes a los nodos de hormigón de un lado de la fisura y los otros dos comunes a los dos nodos del otro lado de la fisura (fig. 1).

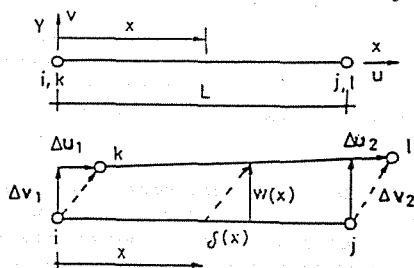


Fig. 1 Elemento fisura.

Mediante interpolación lineal entre los desplazamientos de los dos nodos de ambos lados de la fisura es posible conocer el deslizamiento y la abertura de fisura en cualquier punto del elemento finito:

$$\begin{pmatrix} \delta(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{pmatrix}$$

$$s(x) = N(x) \cdot r \tag{1}$$

El principio de trabajos virtuales proporciona las fuerzas nodales equivalentes internas de este elemento cuando están actuando entre las caras de fisura unas tensiones tangenciales $\tau(x)$ y tensiones normales $\sigma(x)$:

$$W_i = \int_0^l s^T \cdot \sigma \cdot t \cdot dx = r^T \cdot \left(\int_0^l N^T \cdot \sigma \cdot t \cdot dx \right) = r^T \cdot f_i$$

$$f_i = \int_0^l N^T \cdot \sigma \cdot t \cdot dx \tag{2}$$

La rigidez tangente de este elemento se obtiene tomando incrementos en la ecuación (2):

$$\Delta f_i = \int_0^l N^T \cdot \Delta \sigma \cdot t \cdot dx = \int_0^l N^T \cdot D_T \cdot \Delta s \cdot t \cdot dx = \left(\int_0^l N^T \cdot D_T \cdot N \cdot t \cdot dx \right) \cdot \Delta r = K_T \cdot \Delta r$$

siendo D_T la matriz que relaciona los incrementos de tensiones con los incrementos de deslizamiento y abertura de fisura.

La ecuación constitutiva incorporada a este elemento finito engloba los fenómenos de transmisión de tensiones entre caras de la fisura debido al encajamiento de áridos (tensiones tangenciales y tensiones normales que tienden a abrirla) y a causa de la microfisuración en la cabeza de fisura, siguiendo el concepto de fisura ficticia de Hilleborg [7] (tensiones normales de tracción a través de la fisura).

Una exposición detallada de las ecuaciones constitutivas de este elemento se puede encontrar en una anterior publicación de los autores [8]. Básicamente esta formulación se resume en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \tau &= a + b \cdot \delta - a \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \delta} && \text{para } b \geq 0 \\ \tau &= 0 && \text{para } b < 0 \\ \sigma &= c + d \cdot \delta - c \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \delta} - f(w) && \text{para } d \geq 0 \\ \sigma &= 0 && \text{para } d < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a &= -f_c/30 \\ b &= 28.53w^{-0.6} + (0.459w^{0.707} - 2)f_c \\ c &= -f_c/20 \\ d &= 31.65w^{-0.63} + (0.536w^{-0.552} - 1.5)f_c \end{aligned}$$

El efecto de encajamiento de áridos ha sido formulado tomando como base la propuesta de Walraven [9] que consiste en el ajuste, a los resultados experimentales, de relaciones lineales entre las tensiones τ y σ con el deslizamiento δ para una abertura de fisura w fijada. Estas relaciones lineales han sido modificadas mediante un término aditivo de forma exponencial ($-a \cdot e^{b \cdot \delta / w}$ y $-c \cdot e^{d \cdot \delta / w}$) para que, tal como indican los ensayos experimentales proporcionados por Walraven [9], no se produzcan tensiones tangenciales de sentido contrario al del deslizamiento entre caras de fisura o incluso tensiones de tracción entre caras de fisura.

Por otra parte, siguiendo los conceptos de fisura ficticia propuestos por Hilleborg, se incorpora un término aditivo a las tensiones normales entre caras de fisura en función de la abertura de la fisura ($-f(w)$). La función adoptada es una cúbica definida por la energía de fractura G_f , la resistencia a la tracción f_t y la abertura de fisura para la cual la tensión se anula w_0 (fig. 2). Su expresión es:

$$f(w) = f_t \left(1 + (12\alpha - 6) \left(\frac{w}{w_0}\right) + (9 - 24\alpha) \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 + (12\alpha - 4) \left(\frac{w}{w_0}\right)^3 \right) \quad \text{para } w \leq w_0$$

$$f(w) = 0 \quad \text{para } w > w_0 \quad (5)$$

$$\text{siendo } \alpha = \frac{G_f}{f_t \cdot w_0}$$

La formulación empleada en (4) permite que un deslizamiento entre labios de fisura δ en la zona de microfisuración de la cabeza de una fisura ($w < w_0$) disminuya el efecto de las tensiones normales de tracción entre caras, debido a que actúa simultáneamente el efecto del encajamiento de áridos.

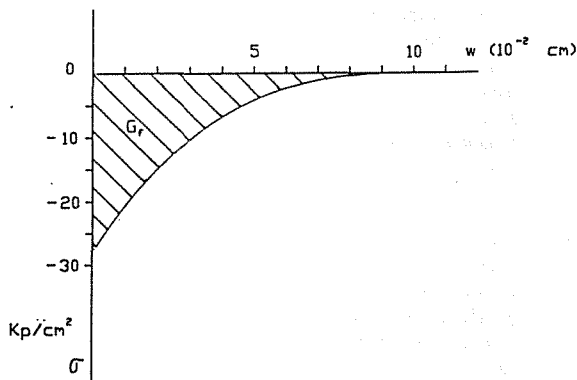


Fig. 2 Término aditivo de la relación σ - w para la ecuación constitutiva del elemento fisura.

2.2 Proceso de carga y criterio de fisuración

Para generar la fisuración en la malla de elementos finitos durante el avance del nivel de carga es necesario establecer un criterio de inicio y propagación de cada tramo de fisura, de forma que la generación y propagación de fisuras sea un proceso totalmente automático.

El criterio escogido para ello es el clásico tensional. Con la estructura equilibrada se

calculan las tensiones en los nodos de la malla y se chequea el criterio de rotura en tensiones. Se genera una nueva fisura si, superado este criterio, alguna tensión principal es de tracción. Sin embargo, para la propagación de una fisura anterior no se chequean las tensiones en el nodo cabeza de fisura, ya que las tensiones calculadas en él por interpolación de las tensiones de los elementos adyacentes lleva a valores incorrectos en modos mixtos de fractura, y se prefiere evaluar las tensiones en los puntos de integración que rodean al nodo. Se propaga la fisura, es decir, se genera un nuevo tramo de fisura que continúa al anterior, si, sobrepasado el criterio de rotura en un punto de integración de los que rodean al nodo cabeza de fisura, alguna tensión principal en él es de tracción.

Para un mismo nivel de carga, una vez equilibrada la estructura, podría suceder que se cumplieran los criterios expuestos de fisuración en varios nodos. No sería correcto generar simultáneamente varios tramos de fisura ya que la generación de un solo tramo de fisura cambia la estructura y puede relajar las tensiones allí donde previamente se sobrepasaba el criterio de rotura.

Para resolver el problema planteado se introdujo inicialmente [10] el criterio de escoger, de entre todos los nodos que sobrepasan el criterio de fisuración, aquel que más lo sobrepasara. Sin embargo, proceder por escalones de carga predefinidos y adoptar este criterio impide la obtención de ramas descendentes en la curva carga-flecha.

La obtención de ramas descendentes en el proceso de carga solo es posible mediante un control del nivel de carga [11] imponiendo una condición que ligue las variaciones de carga con las variaciones de los desplazamientos nodales (método de la longitud de arco [12], método del camino plano [13], etc.). Esta condición puede establecerse de forma que la variación de la carga sea tal que conduzca a que sólo en un nodo se cumpla estrictamente la condición de fisuración.

El proceso seguido es controlado por las siguientes ecuaciones:

- los residuos en cada nodo son el resultado del balance de fuerzas internas y externas

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{Q}, \mu) = \mu P - \sum_e \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathfrak{e} \cdot dV \quad (6)$$

donde μ es la variable que controla el nivel de carga.

- las variaciones $d\mu$ y $d\mathfrak{Q}$ que conducen a equilibrar la estructura ($d\mathfrak{R} + d\mathfrak{R}' = 0$) están relacionadas por

$$-\mathfrak{R}(\mathfrak{Q}, \mu) \approx P d\mu - \mathbf{K}_T \cdot d\mathfrak{Q}$$

$$d\mathfrak{Q} = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathfrak{R}(\mathfrak{Q}, \mu) + (\mathbf{K}_T^{-1} \cdot P) d\mu = d\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'' d\mu \quad (7)$$

- las variaciones de $d\mu$, $d\phi$ y $d\phi'$ están relacionadas por la condición de fisuración. Para cada punto de integración 'n' de cada elemento 'e' se tiene, tomando el primer término del desarrollo en serie de Taylor de la función de rotura $F(\sigma)$

$$\begin{aligned} 0 &= F(\sigma_n + d\sigma_n) \approx \sigma_n + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot d\sigma_n = \\ &= F(\sigma_n) + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}_{Tn} \cdot \mathbf{B}_n^e \cdot d\Phi_c = \\ &= F(\sigma_n) + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}_{Tn} \cdot \mathbf{B}_n^e \cdot (d\Phi_c' + \Phi_c'' d\mu) \end{aligned}$$

$$d\mu = - \frac{F(\sigma) + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}_{Tn} \cdot \mathbf{B}_n^e \cdot d\Phi_c'}{\frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}_{Tn} \cdot \mathbf{B}_n^e \cdot \Phi_c''} \quad (8)$$

Así, si se parte de una situación de carga y desplazamientos nodales de la estructura (μ_0, ϕ_0), se obtiene una nueva situación de carga μ_1, ϕ_1 y desplazamientos ϕ_1 de la siguiente forma:

1º obtención de los residuos (σ_n, μ_0) mediante la aplicación de la expresión (6). Si la situación (σ_n, μ_0, ϕ_0) es de equilibrio, estos residuos serán nulos o inferiores al error considerado.

2º resolución de los sistemas de ecuaciones $(\mathbf{K}_n^*)^{-1} \cdot (\sigma_n, \mu_0)$ y $(\mathbf{K}_n^*)^{-1}$, los cuales proporcionan los valores de $d\phi$ y $d\phi'$ respectivamente en todos los nodos de la malla.

3º en cada punto de integración se aplica la expresión (8) obteniendo un nivel de carga $d\mu_n$ diferente para cada uno de ellos.

4º se asigna a cada nodo el valor $d\mu_1$ ponderando los valores $d\mu_n$ de los puntos de integración que le rodean, excepto si se trata de un nodo cabeza de fisura, en cuyo caso se asigna directamente al nodo el valor mínimo.

5º se toma como variación del nivel de carga $d\mu$ el valor mínimo de todos los $d\mu_1$.

6º se calculan las variaciones de desplazamientos nodales $d\phi = d\phi' + \phi'' \cdot d\mu$.

7º se acumulan las variaciones de carga y desplazamientos nodales a los iniciales:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + d\mu \\ \phi_1 &= \phi_0 + d\phi \end{aligned}$$

8º se vuelve al punto 1º para calcular los nuevos residuos. Si estos no son suficientemente pequeños, se repite el proceso hasta la convergencia (punto A de la fig. 3). Cuando esta se produce, un nodo cumple estrictamente la condición de fisuración y, por tanto, es necesario modificar la malla para generar el nuevo tramo de fisura.

Una vez generado el nuevo tramo de fisura, la solución de desplazamientos nodales y nivel de

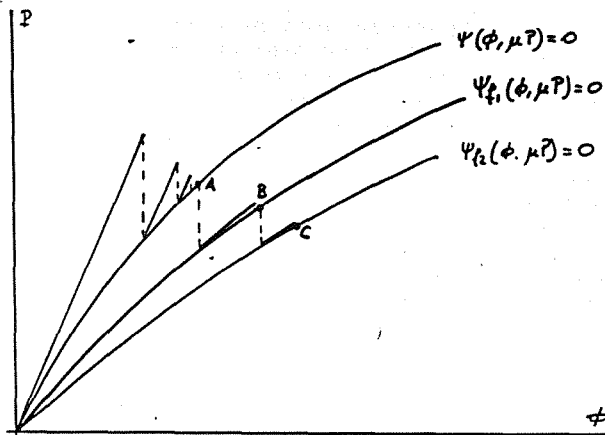


Fig. 3 Proceso de carga.

carga que equilibraba a la malla antes de la generación del tramo de fisura, ya no la equilibra (curva 2 de la fig. 3) y es necesario volver a comenzar desde el punto 1º para encontrar el siguiente nivel de carga y desplazamientos nodales que producen las condiciones de fisuración estrictamente en un nodo de la nueva malla (punto B de la fig. 3).

2.3 Reorganización de la malla

El conjunto de operaciones que es preciso realizar cuando, equilibrada la estructura, se cumple la condición de fisuración en un nodo, constituye la reorganización de la malla. Estas operaciones se reducen a un problema de automatizar un proceso de remallado bajo los siguientes criterios básicos:

- La dirección del nuevo tramo de fisura viene dada por la normal a la dirección principal de tracción.
- Cuando el tramo de fisura que va a generarse constituye una propagación de algún tramo anterior, el sentido de avance está definido por el criterio de que forme con el tramo anterior un ángulo superior a $\pi/2$.
- El nuevo tramo de fisura queda definido generando nuevos nodos, desplazando nodos de suposición inicial, modificando elementos o dividiendo elementos. En cualquier caso el proceso no genera elementos diferentes a los descritos.
- Se ha constatado como más conveniente mover los nodos modificando la forma de los elementos finitos que representan al hormigón antes que dividir los elementos en dos al paso de una fisura, siempre que ello sea posible (fig. 4).

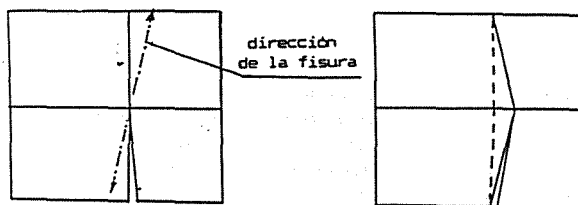


Fig. 4 Movimiento de nodo en la reorganización de la malla.

3. PREDICCIÓN DE LA FISURACION EN MODO MIXTO

Las posibilidades en la predicción de la respuesta de estructuras de hormigón en masa mediante el modelo expuesto son puestas de manifiesto mediante el caso de fractura en modo mixto de una viga entallada ensayada por Arrea e Ingraffea, que ha servido para contrastar los modelos numéricos presentados por diversos autores (Rost [14], Oller [13]...).

En la figura 5 se muestran las características geométricas y de carga del ensayo, las características mecánicas del hormigón empleado y la geometría de la malla inicial utilizada en el modelo.

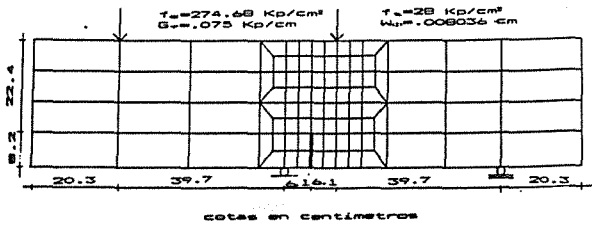


Fig. 5 Viga entallada ensayada por Arrea e Ingraffea: características geométricas y de carga. Malla de elementos finitos utilizada.

La predicción del modelo respecto a la respuesta carga-deslizamiento entre caras de la entalla es la indicada en la figura 6 en la que se observa lo siguiente:

- La curva obtenida por el modelo se ajusta bastante bien a la banda experimental dada por los autores del ensayo.
- La respuesta del modelo antes de la primera fisura es más rígida que la reflejada en los ensayos. Esto puede deberse a que las ecuaciones constitutivas propuestas por Kotsovos sólo tienen un parámetro de calibración (la resistencia a compresión simple f_c) y de él se deriva el módulo de deformación E sin posibilidades de ajuste. El valor dado por la referencia del ensayo para el módulo de deformación es de 248.000 Kp/cm², cuando el modelo adopta un módulo de deformación de 280.000 Kp/cm² para la f_c dada.

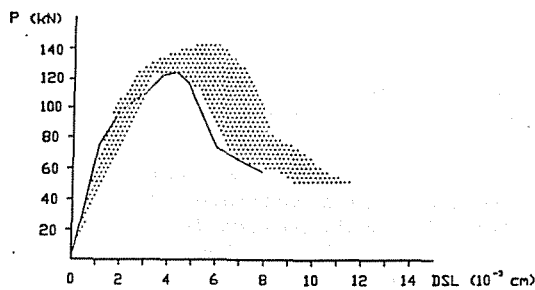


Fig. 6 Relación carga-deslizamiento entre bordes de la entalla. Banda experimental y predicción del modelo.

La predicción del modelo respecto a la trayectoria de la fisura es la indicada en la figura 7 en la que se observa que dicha trayectoria

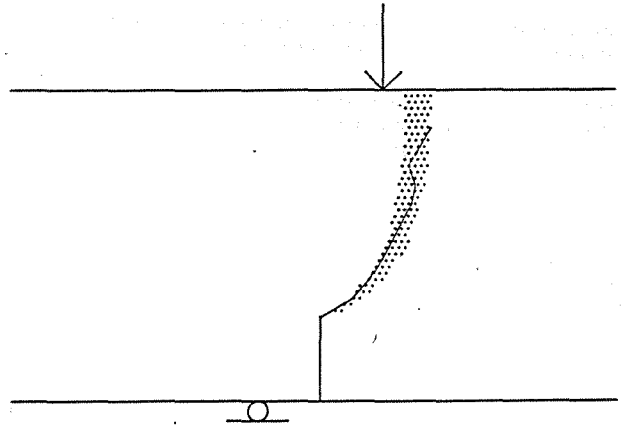


Fig. 7 Trayectoria de la fisura. Banda experimental y predicción del modelo.

está dentro de la banda experimental obtenida en los ensayos. Solamente en la parte superior produce una desviación en zig-zag que se justifica por la formación de elementos de forma bastante distorsionada en este extremo en el momento de generarse el tramo de fisura (fig. 8).

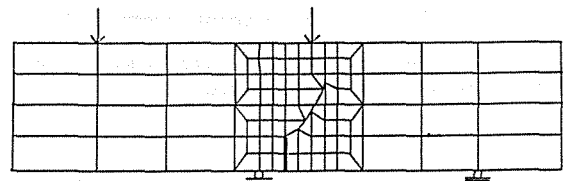


Fig. 8 Malla de elementos finitos generada durante la formación de la fisura.

La existencia de elementos tan distorsionados es posible por el criterio adoptado de mover los nodos para formar siempre elementos de hormigón isoparamétricos de cuatro nodos. En ocasiones este criterio conduce a desplazar un nodo excesivamente para evitar la formación de elementos triangulares. En la actual versión del modelo se ha preferido no generar elementos triangulares a pesar de perder regularidad en la malla.

Las tensiones normales y tangenciales generadas en la fisura cuando la situación de carga es la expresada por el punto A de fig. 6 son las dibujadas en la fig. 9. Se observa como, en el comienzo de la fisura, el desarrollo de

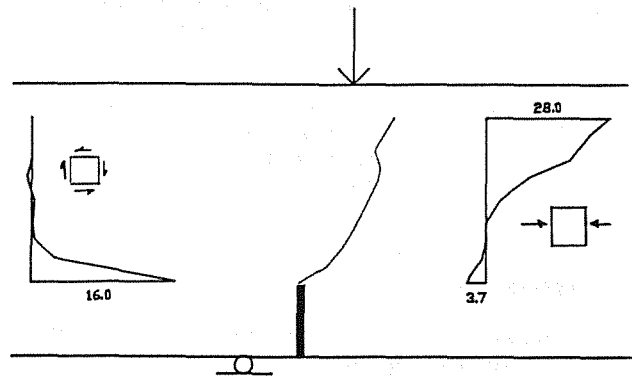


Fig. 9 Tensiones normales y tangenciales desarrolladas en la fisura.

deslizamientos genera grandes tensiones tangenciales e incluso tensiones normales que tienden a abrir la fisura, mientras cerca de la cabeza de la fisura prácticamente no existen tensiones tangenciales y se desarrollan tensiones normales de tracción entre caras de la fisura que crecen progresivamente conforme esta se va cerrando.

En la figura 10 se representa la deformación de la viga en el momento que se ha producido esta fisura. Amplificando por 200 los movimientos de los nodos se puede observar la abertura y el deslizamiento de la fisura principal y de la entalla.

También en la misma figura se observa la fisura de flexión negativa que se abrió para un nivel de carga próximo al máximo de la fig. 6 y que posteriormente se ha cerrado.

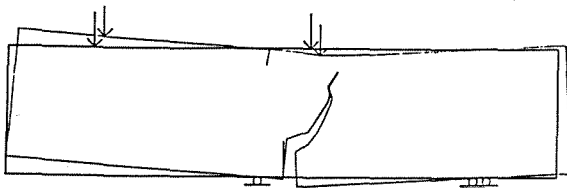


Fig. 10 Deformación de la viga amplificando por 200 los movimientos nodales.

4. CONCLUSIONES

La utilización de los conceptos de mecánica de fractura junto con la técnica de la fisuración discreta en modelos de elementos finitos es una opción de grandes posibilidades en el análisis asistido por ordenador de estructuras de hormigón fisurado. La naturaleza discreta de las fisuras en el hormigón, especialmente si no lleva armaduras, hace que la técnica de fisuración discreta sea muy adecuada pues introduce de una manera muy real los fenómenos de encajamiento de áridos y de mecánica de fractura.

Aunque se ha obtenido una buena aproximación a los resultados experimentales, es necesario realizar más pruebas con diferentes tamaños de elementos de la malla de elementos finitos con objeto de conocer la sensibilidad de la variación de la malla ya que se ha empleado un criterio clásico tensional para determinar la fisuración.

Hay que destacar la importancia que tiene el proceso de carga empleado que permite conocer en que carga se ha producido cada tramo de fisura incluso aunque se produzca en ramas descendentes, es decir, en fisuras inestables.

5. REFERENCIAS

[1] Sauoma V. y Ingraffea A.R. (1981) "Fracture mechanics analysis of discrete cracking", IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, Delft, 413-436.

- [2] Ngo D. (1975) "A network topological approach to the finite element analysis of progressive crack growth in concrete members", Tesis Doctoral, Universidad de Berkeley, California, USA.
- [3] Fernández M.A. y Miguel P.F. (1988) "Una representación geométrica de la red de fisuración en estructuras de hormigón para su aplicación en un modelo de análisis por el método de los elementos finitos", Hormigón y Acero, nº 167, 45-54.
- [4] Kotsovos M.D. y Newman J.B. (1979) "A mathematical description of the deformational behaviour of concrete under complex loading", Magazine of Concrete Research, Vol.31, nº 107, 77-90.
- [5] Kotsovos M.D. (1979) "A mathematical description of the strength properties of concrete under generalised stress", Magazine of Concrete Research, Vol. 31, nº 108, 151-158.
- [6] C.E.B. (1983) "Concrete under multiaxial state of stress. Constitutive equations for practical design", Bulletin d'Information nº 156.
- [7] Hillerborg A. (1985) "Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete", Fracture Mechanics of Concrete, Shih and DiTomaso Eds., Martinus Nijhoff Publishers, Holland, 141-170.
- [8] Miguel P.F. y Fernández M.A. (1988) "Un modelo teórico para la representación de la transmisión de esfuerzos a través de las zonas afectadas por las fisuras en el hormigón", Anales de Ingeniería Mecánica, Año 6, Nº III, Vol. 3, 299-304.
- [9] Walraven J.C. y Reinhardt H.W. (1981) "Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading", HERON, Vol. 26, Nº1A.
- [10] Fernández M.A. y Miguel P.F. (1989) "La fisuración discreta: una alternativa a los modelos de análisis no-lineal de estructuras de hormigón", Rev. Int. Her. Num. Cálculo y Diseño en Ingeniería (aceptado para su publicación).
- [11] Crisfield M.A. (1981) "A fast incremental iterative solution procedure that handles 'snap through'", Computer and Structures, Vol 13, 55-62.
- [12] Riks E. (1972) "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", J. Appl. Mechanics, Vol 39, 1060-1066.
- [13] Oller S. (1988) "Un modelo de 'daño continuo' para materiales friccionales", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Barcelona.
- [14] Rots J.C., Kusters G.M.A. y Blaauwendraad J. (1984) "The need for fracture mechanics options in finite element model for concrete structures", Proc. Int. Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Part I, Split (Yugoeslavia), 19-32.