

NUCLEACION DESDE LA PUNTA DE UNA GRIETA POR EMISION DE DISLOCACIONES CUÑA

C. Atkinson y C. Bastero

Department of Mathematics.- Imperial College.- London SW7

Departamento de Matemática Aplicada.- Universidad del País Vasco.- Bilbao

Resumen.- En el presente estudio se estudia la relajación plástica por nucleación de deslizamiento asimétrica en la punta de una grieta y en una grieta por descohesión entre un material incompresible elástico y una matriz rígida. Se demuestra que para un modo mixto de carga hay un único ángulo, formado por la banda de deslizamiento y la grieta, para el cual es posible la relajación. Se discute un modelo sencillo que da buena aproximación para el valor de la apertura de la punta de la grieta.

Abstract.- Plastic relaxation by a single slip band of a sharp crack and of a debond crack at the interface between a rigid and an incompressible elastic material is studied. It is shown that for a mixed mode loading there is a unique angle, at which the slip band meets the crack tip, such that the stress intensity factor is zero. A simple model is discussed which gives a good approximation to the crack opening displacement.

1. INTRODUCCION

La relajación de las tensiones singulares en la punta de una grieta originadas por las cargas en sus labios, debida a la nucleación de deslizamiento producida por la emisión de dislocaciones cuña, es un tema de alto interés en la Mecánica de la Fractura. Sin más considérense, por ejemplo, los trabajos ya clásicos de Bilby, Cottrell y Swinden [1], que definieron un modelo de banda de deslizamiento colineal con la grieta, de Leonov y Panasyuk [2] y de Dugdale [3], quienes estudiaron diversos modelos de bandas con diferentes tipos de cargas. Sin embargo, para el caso de grietas cargadas en caso de deformación plana, las bandas de deslizamiento no son generalmente colineales con la punta de la grieta. Bilby y Swinden [4] consideraron un modelo de banda a  $45^\circ$ , constituida por una agrupación discreta de dislocaciones cuña. En este modelo encontraron muchas dificultades de orden numérico. Un procedimiento alternativo fue intentado por Atkinson y Kay [5] que

presentaron una superdislocación que permitía predecir la apertura en la punta de la grieta de una manera muy simple. Sin embargo este modelo era más una aproximación que una descripción real de la situación en la punta de la grieta.

Salvo este último artículo, todos los anteriormente referidos estudian situaciones de simetría con respecto a la carga aplicada y a las bandas de deslizamiento emitidas desde la punta de la grieta. Sin embargo hay muchas situaciones en las que, debido a la asimetría de la carga o a heterogeneidades locales en la estructura, se produce una nucleación de deslizamiento asimétrica. En unos artículos previos los autores [6] y [7] han estudiado situaciones en las que esto se produce. La razón física que permite suponer un plano de deslizamiento asimétrico puede basarse, por ejemplo, en la existencia de una barrera al deslizamiento a un lado de la grieta y la existencia de una banda en el otro, como sucede en el crecimiento de la grieta por fatiga.

El objetivo de este artículo es presentar paralelamente la relajación conseguida en la punta de una grieta debida a una banda de deslizamiento asimétrica y en una grieta por descohesión entre una matriz elástica e incompresible y un soporte rígido. El plan de este trabajo es presentar el análisis de tensiones en la sección segunda para en la sección tercera determinar las condiciones de relajación de las tensiones singulares así como la discontinuidad en el desplazamiento según la dirección de la banda de deslizamiento en la punta de la grieta (apertura de la punta de la grieta). En la discusión se comparan los resultados con los obtenidos por medio de un modelo aproximado basado en una superdislocación.

2. ANALISIS

Las ecuaciones de la elasticidad plana nos proporcionan el punto de partida de este análisis:

$$2\mu \cdot (u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \cdot [\kappa \cdot \Omega(z) - z \cdot \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z})] \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i \cdot \sigma_{r\theta} = 2 \cdot [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{z}/z \cdot \bar{\omega}''(\bar{z})] \tag{2.2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} = 4 \cdot [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})] \tag{2.3}$$

donde  $\Omega(z)$  y  $\omega(z)$  son funciones a determinar en función de las condiciones de contorno;  $\mu$  es el módulo de elasticidad transversal;  $\kappa$  es  $(3-4\nu)$  - $\nu$  es el módulo de Poisson - o  $(3-\nu)/(1+\nu)$  para deformación plana o tensión plana respectivamente. En las anteriores ecuaciones ( $u_r, u_\theta$ ) son los desplazamientos en coordenadas polares ( $r, \theta$ ) y  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$  y  $\sigma_{rr}$  las correspondientes tensiones.

Tomando la transformada de Mellin de las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3), se obtiene

$$2\mu(\hat{u}_r + i\hat{u}_\theta) = \kappa A e^{-i\theta(s+2)} + (s+1)\bar{A} e^{i\theta(s+2)} - \bar{B} e^{i\theta s} \tag{2.4}$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} - i\hat{\sigma}_{r\theta} = \frac{(s+1)[- \bar{B} e^{i\theta s} + \bar{A}(s+1)e^{i\theta(s+2)} - A e^{-i\theta(s+2)}]}{A e^{-i\theta(s+2)}} \tag{2.5}$$

$$\hat{\sigma}_{rr} = \frac{s+1}{2} [ \bar{B} e^{i\theta s} + B e^{-i\theta s} - (s+4)\bar{A} e^{i\theta(s+2)} - (s+4)A e^{-i\theta(s+2)} ] \tag{2.6}$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son funciones de la variable  $s$  que se van a determinar en función de las condiciones de contorno. De igual manera

$$\hat{u}_i = \int_0^\infty u_i \cdot r^s \cdot dr \tag{2.7}$$

y  $\hat{\sigma}_{\theta\theta}, \hat{\sigma}_{r\theta}, \hat{\sigma}_{rr}$  corresponden a

$$\hat{\sigma}_{ij} = \int_0^\infty \sigma_{ij} \cdot r^{s+1} \cdot dr \tag{2.8}$$

Para los casos que se están estudiando las condiciones de contorno son:

A) Grieta con banda de deslizamiento asimétrica -el origen del ángulo polar coincide con la banda de deslizamiento- (ver figura 1)

En  $\theta = 0$   $u_\theta$  es continuo  $\forall r$   
 $\sigma_{\theta\theta}$  y  $\sigma_{r\theta}$  son continuos  $\forall r$   
 $\sigma_{r\theta} = \tau$   $0 < r < \ell$

En  $\theta = \pi - \alpha$   $\sigma_{\theta\theta} - i \cdot \sigma_{r\theta} = -P(r) + i \cdot Q(r)$

En  $\theta = -\pi - \alpha$   $\sigma_{\theta\theta} - i \cdot \sigma_{r\theta} = -P(r) + i \cdot Q(r)$

donde  $\ell$  es la longitud de la banda de deslizamiento y  $\tau$  la tensión de fluencia.

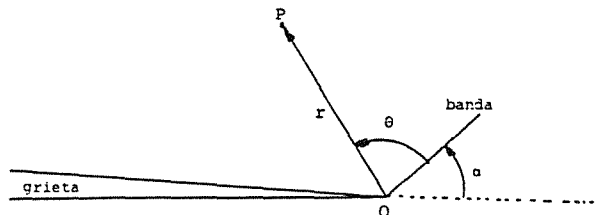


Figura 1.- Grieta con banda de deslizamiento

B) Grieta por descohesión -el origen del ángulo polar está en la intercara no despegada- (ver figura 2)

En  $\theta = 0$   $u_r = u_\theta = 0$   
 En  $\theta = \pi$   $\sigma_{\theta\theta} - i \cdot \sigma_{r\theta} = -P(r) + i \cdot Q(r)$   
 En  $\theta = \alpha$   $u_\theta$  es continuo  $\forall r$   
 $u_r$  es continuo  $\forall r > \ell$   
 $\sigma_{\theta\theta}$  y  $\sigma_{r\theta}$  son continuos  $\forall r$   
 $\sigma_{r\theta} = \tau$   $0 < r < \ell$

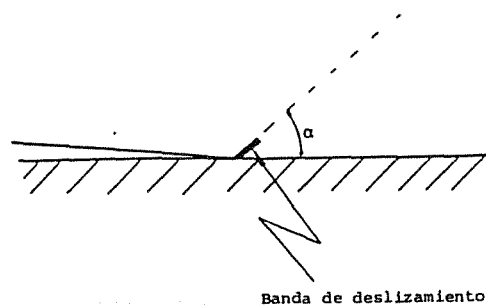


Figura 2.- Grieta por descohesión con banda de deslizamiento.

La transformada de Mellin de estas condiciones de contorno, teniendo en cuenta las definiciones dadas en (2.7) y (2.8), junto con el correspondiente cálculo, conduce a sendos problemas que han sido resueltos utilizando la técnica de Wiener-Hopf para determinar las incógnitas en las ecuaciones funcionales obtenidas

A) Grieta con banda asimétrica

$$\hat{\sigma}_+(s) + \hat{\sigma}_-(s) = -\mu \cdot \hat{u}_+(s) \cdot K(s) / (1+\kappa) \quad (2.9)$$

donde

$\hat{\sigma}_+(s)$  es la transformada de Mellin de la tensión cortante en la banda de deslizamiento

$\hat{\sigma}_-(s)$  es la transformada de la tensión cortante en  $\theta = 0$  fuera de la banda de deslizamiento

$\hat{u}_+(s)$  es la transformada de Mellin del salto en el desplazamiento radial en la banda de deslizamiento, y

$$K(s) = \frac{s+1}{\sin(2\pi s)} \cdot [-s(s+1)\cos(2\alpha s) + 2\cos(2\pi s) + 2s(s+2)\cos(2\alpha s+2\alpha) + (s+1)(s+2)\cos(2\alpha s+4\alpha)] \quad (2.10)$$

B) Grieta por descohesión

$$\hat{\sigma}_+(s) + \hat{\sigma}_-(s) \cdot \ell^{s+2} = \mu \cdot \hat{u}_+(s) \cdot K(s) \cdot \ell^{s+1} \quad (2.11)$$

con

$$K(s) = -\frac{s+1}{4 \cdot \cos^2(\pi s)} \cdot [-2s(s+2)\sin(2\alpha s+2\alpha) + s(s+1)\sin(2\alpha s) + (s+1)(s+2)\sin(2\alpha s+4\alpha) - 2\sin(2\pi s) + 2s(s+2)\sin(2\pi s-2\alpha s-2\alpha) - s(s+1)\sin(2\pi s-2\alpha s) - (s+1)(s+2)\sin(2\pi s-2\alpha s-4\alpha)] \quad (2.12)$$

3. RELAJACION

Las condiciones de relajación comportan la inexistencia de tensiones singulares en la punta de la grieta. La resolución de las ecuaciones funcionales (2.9) y (2.11) respectivamente, conduce en ambos casos a la siguiente condición necesaria para la relajación,

$$\frac{p(-3/2)}{q(-3/2)} = \frac{3\sin(3\alpha/2) + 3\sin(\alpha/2)}{3\cos(3\alpha/2) + \cos(\alpha/2)} \quad (3.1)$$

donde  $p(s)$  y  $q(s)$  son las transformadas de Mellin de las cargas aplicadas en la grieta  $P(r)$  y  $Q(r)$  respectivamente, obtenidas según (2.8).

La ecuación (3.1), puesta en función de los factores de intensidad de tensiones, se convierte

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \frac{3\sin(3\alpha/2) + 3\sin(\alpha/2)}{3\cos(3\alpha/2) + \cos(\alpha/2)} \quad (3.2)$$

En estas condiciones se puede determinar el salto en el desplazamiento radial en la punta de la grieta en ambos casos

A) Grieta con banda asimétrica

$$[u_r] = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2) \cdot [8+5 \cdot \cos(\alpha)+3 \cdot \cos(3\alpha)]^2}{256 \cdot \mu \cdot \tau \cdot (7+4\cos\alpha-3\cos(2\alpha))} \cdot \frac{F_-(-2)}{(F_-(3/2))^2 \cdot F(-1)} \cdot (1+\kappa) \quad (3.3)$$

donde

$$F_+(s) = \exp \left[ \frac{-1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\log[F(z)]}{z-s} dz \right] \quad (3.4)$$

$$F_-(s) = \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi-i\infty}^{\phi+i\infty} \frac{\log[F(z)]}{z-s} dz \right] \quad (3.5)$$

con

$$F(z) = \frac{-1}{4 \cdot \sin^2(\pi z) + 2s(s+2)\cos(2\alpha s+2\alpha) + (s+1)(s+2)\cos(2\alpha s+4\alpha)} \cdot [-s(s+1)\cos(2\alpha s) + 2\cos(2\pi s) + 2s(s+2)\cos(2\alpha s+2\alpha) + (s+1)(s+2)\cos(2\alpha s+4\alpha)] \quad (3.6)$$

y

$$\gamma < \epsilon < \Re\ell(s) < \phi < -0.5 \quad (3.7)$$

siendo  $\gamma$  el mayor cero de  $F(z)$  menor que  $-1$ .

B) Grieta por descohesión

$$[u_r] = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2) \cdot [8+5 \cdot \cos(\alpha)+3 \cdot \cos(3\alpha)]^2}{128 \cdot \mu \cdot \tau \cdot (7+4\cos\alpha-3\cos(2\alpha))} \cdot \frac{F_-(-2)}{(F_-(3/2))^2 \cdot F(-1)} \quad (3.8)$$

con

$$F_+(s) = \exp \left[ \frac{-1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\log[F(z)]}{z-s} dz \right] \quad (3.9)$$

$$F_-(s) = \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi-i\infty}^{\phi+i\infty} \frac{\log[F(z)]}{z-s} dz \right] \quad (3.10)$$

siendo

$$F(z) = \frac{-1}{2 \cdot \text{Sin}(2\pi z)} \cdot [-2z(z+2)\text{sin}(2\alpha z+2\alpha) + z(z+1)\text{sin}(2\alpha z) + (z+1)(z+2)\text{sin}(2\alpha z+4\alpha) - 2\text{sin}(2\pi z) + 2z(z+2)\text{sin}(2\pi z-2\alpha z-2\alpha) - z(z+1)\text{sin}(2\pi z-2\alpha z) - (z+1)(z+2)\text{sin}(2\pi z-2\alpha z-4\alpha)] \quad (3.11)$$

y

$$\gamma < \varepsilon < \Re l(s) < \phi < -0.5 \quad (3.12)$$

siendo  $\gamma$  el mayor cero de  $F(z)$  menor que  $-1$ .

4. DISCUSION

Los resultados presentados en la sección precedente se pueden considerar exactos para el caso del "small scale yielding", sin embargo su determinación es bastante complicada desde el punto de vista del cálculo.

Por ello se va a proceder a continuación a definir unos modelos aproximados cuya eficacia será función de la adecuación de los resultados a los obtenidos previamente. Así, siguiendo el modelo de la superdislocación propuesto por Atkinson & Kay (1971), se llega al siguiente valor para el vector de Burger

A) Grieta con superdislocación

$$b = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{8 \cdot \mu \cdot \tau} \cdot \frac{4 + \cos(\alpha) + 3\cos(3\alpha)}{7 + 4\cos(\alpha) - 3\cos(2\alpha)} \cdot (1 + \kappa) \quad (4.1)$$

B) Grieta por descohesión

$$b = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{8 \cdot \mu \cdot \tau} \cdot \frac{4 + 5\cos(\alpha) + 3\cos(3\alpha)}{7 + 4\cos(\alpha) - 3\cos(2\alpha)} \quad (4.2)$$

En las figuras 3 y 4 se presentan las comparaciones entre los valores obtenidos por ambos procedimientos es casi perfecta, se puede apreciar un claro desacuerdo en los resultados obtenidos para el caso de la grieta por descohesión. Principalmente la discordancia en

Mientras que la correspondencia en el caso de la grieta entre los valores obtenidos por ambos procedimientos es casi perfecta, se puede apreciar un claro desacuerdo en los resultados obtenidos para el caso de la grieta por descohesión. Principalmente la discordancia en

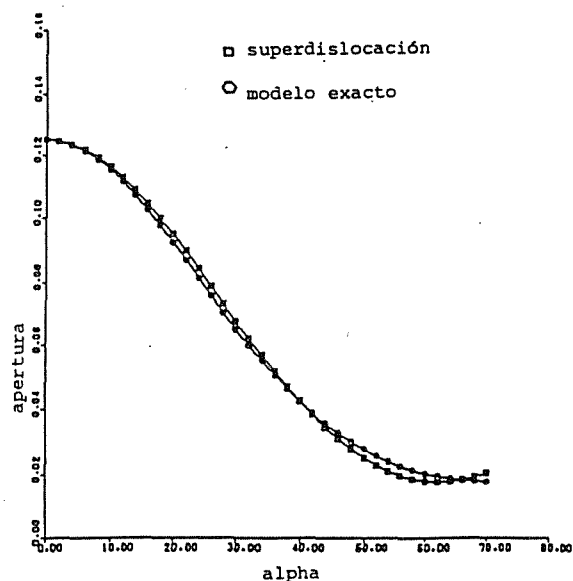


Figura 3.- Apertura en la punta de la grieta

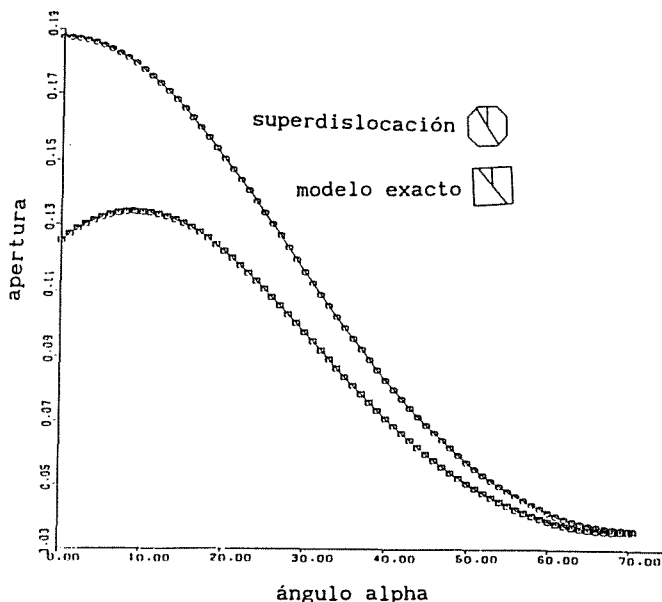


Figura 4.- Apertura en la punta de la grieta por descohesión.

resultados se puede apreciar para ángulos menores a 20°. La razón de esta discordancia está en que la repulsión producida por la imagen de la superdislocación en el contorno rígido es bastante más severa que la producida por la banda de deslizamiento.

5. REFERENCIAS

[1] Bilby, B.A., Cottrell, A.H. and Swinden, K.H., 1963, Proc. R. Soc. Lond., A272, 304-314

- 
- [2] Leonov, M. Ya. and Panasyuk, V. V., 1959, Prikl. Mat. Mekh., 5, 391-401
- [3] Dugdale, D. S., 1960, J. Mech. Phys. Solids, 8, 100-104
- [4] Bilby, B. A. and Swinden, K. H., 1965, Proc. R. Soc. Lond., A285, 22-35
- [5] Atkinson, C. and Kay, T. R., 1971, Acta Metall., 19, 679-685
- [6] Atkinson, C. and Bastero, C., 1988, Proc. R. Soc. Lond., A418, 261-280
- [7] Bastero, C. and Atkinson, C., 1988, Int. Jour. Fract., 38, 193-206