

FACTORES DINAMICOS DE INTENSIDAD DE TENSION EN PROBLEMAS ELASTICOS TRANSITORIOS

Dominguez, José y Gallego, Rafael

Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno
E.T.S. Ingenieros Industriales (Universidad de Sevilla)
Av. Reina Mercedes s/n
41012- SEVILLA

Resumen. - En el presente trabajo se utiliza la formulación dinámica paso a paso del Método de los Elementos de Contorno con una evolución temporal de las variables de contorno de tipo lineal a trozos para los desplazamientos y constante a trozos para las tracciones. La evolución espacial de ambos es de tipo parabólico. Se introduce además, un elemento singular en el vértice de la grieta. Se resuelve un problema de una placa con una grieta en su interior y se compara la evolución temporal del factor de intensidad de tensión K_I calculado, con resultados de otros autores. Se muestra como el resultado obtenido es muy preciso y como el procedimiento empleado muestra poca dependencia de la discretización espacial y temporal.

Abstract. - This paper presents the step by step dynamic formulation of the Boundary Element Method in combination with a piecewise constant time variation of the boundary tractions and a piecewise linear time variation of the boundary displacements. Quadratic spatial variation along the boundary elements is assumed for both tractions and displacements. A singular element is assumed at the crack tips. The problem of a cracked plate is solved and the stress intensity factor K_I is plotted versus time. The results are compared with those obtained by other authors. The obtained results are very accurate and the approach shows very little dependency on the boundary and time discretization.

1. INTRODUCCION.

El cálculo de los factores de intensidad de tensión (F.I.T.) constituye uno de los objetivos más importantes de un buen número de investigaciones dentro de la mecánica de la fractura. En el caso dinámico, el problema ha sido estudiado con profusión en los últimos años. Quizás el primer trabajo importante dentro de este campo es el presentado por De Hoop [1] en 1959, referente al análisis de una grieta semiinfinita sujeta a una presión con variación temporal en forma de escalón. En el caso de carga armónica pueden citarse como más importantes, en los comienzos, los trabajos de Sih y Loeber [2] y Mal [3]. Más recientemente y también referentes a excitaciones armónicas deben destacarse los trabajos de Achenbach y sus colaboradores [4, 5, y 6]. Por otra parte, Thau y Lu [7] y Sih et al. [8] estudiaron F.I.T. dinámicos ante sollicitaciones de tipo transitorio.

Todos los trabajos citados hasta este punto se refieren a medios infinitos o semiinfinitos e incluyen la evaluación numérica de algunas integrales o la resolución, también numérica, de ecuaciones integrales. Cuando el dominio a estudiar es finito, el problema del cálculo de F.I.T. dinámicos ha sido abordado mediante métodos numéricos que conllevan la discretización del dominio. Chen [9] estudió, mediante diferencias finitas, el caso de una placa cuadrada con una grieta centrada y sujeta a una tracción uniforme con variación temporal de tipo escalón. Otros autores han empleado más recientemente elementos finitos [10, 11, y 12]. El uso del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) para este tipo de problemas parece especialmente adecuado ya que representa muy bien las concentraciones de tensión y no hace uso de ninguna discretización del dominio, con lo cual pueden evitarse alteraciones de las ondas elásticas a través del dominio, debidas a restricciones de los movimientos y tensiones.

El M.E.C. ha sido empleado en diversas ocasiones para el cálculo de F.I.T. estáticos [13]. En particular Blandford et al. [14] y Martínez y Domínguez [15] emplearon un elemento singular que produjo resultados muy precisos y fiables. En la presente comunicación se va a utilizar el mismo tipo de elemento singular de [15] pero dentro de un análisis dinámico en el dominio del tiempo para poder determinar la evolución temporal de los F.I.T. originados por cargas de tipo transitorio. Se hace uso de la formulación paso a paso del M.E.C., presentada por Mansur [16] y extendida por Antes [17], suponiendo, como estos autores una evolución temporal de las variables en el contorno de tipo constante a trozos, para las tensiones, y lineales a trozos, para los movimientos. Por primera vez, en lo que los autores conocen y en combinación con la evolución temporal indicada, se supone una evolución espacial de las variables sobre los elementos de contorno de tipo cuadrático.

Además se introduce el uso de un elemento singular en los vértices de grieta en combinación con la formulación paso a paso del M.E.C. Los detalles sobre la formulación general e implementación numérica del M.E.C. pueden encontrarse, por ejemplo, en el libro de Brebbia y Domínguez [18].

El tipo de elemento singular que se emplea en esta comunicación ha sido utilizado por Domínguez y Chirino [19], dentro de la formulación del M.E.C. en el dominio de la frecuencia, para calcular F.I.T. dinámicos correspondientes a cargas de tipo armónico y, en algún caso, en régimen transitorio, mediante la transformada de Fourier.

2. ECUACIONES BASICAS DEL MEC EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

La representación integral para un punto del contorno de un cuerpo puede ser escrita en la forma [20]:

$$\begin{aligned} c_{1j} u_j &= \int_{\Gamma} (U_{1j} * p_j - T_{1j} * u_j) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} (U_{1j} * b_j) d\Omega + \\ &+ \rho \int_{\Omega} \langle \bar{v}_{j0} U_{1j0} - \bar{u}_{j0} \dot{U}_{1j0} \rangle d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

donde "*" indica producto de convolución, el subíndice "0" condiciones iniciales, T_{1j} y U_{1j} son los tensores de tracciones y desplazamientos debidos a un impulso unidad en el medio infinito; u_j y p_j son los desplazamientos y tracciones sobre el contorno, respectivamente; b_j las fuerzas por

unidad de volumen, y c_{1j} un tensor que depende de la geometría del contorno en el punto cuya ecuación se escribe, siendo: $c_{1j} = \delta_{1j}$ cuando el contorno es suave en el punto.

La respuesta del medio plano infinito ante una carga del tipo $b_j = \delta_{1j} \delta(t - \tau) \delta(x - \xi)$ ubicada en el punto ξ es [20]:

$$\begin{aligned} U_{1j} &= U_{1j}(x, t; \xi) = \\ &\frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_1} \frac{H(c_1 t - r)}{r^2} \left[\frac{2c_1^2 t^2 - r^2}{R_1} r_{,i^r,j} - R_1 \delta_{1j} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_2} \frac{H(c_2 t - r)}{r^2} \left[\frac{2c_2^2 t^2 - r^2}{R_2} r_{,i^r,j} - \left(R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \delta_{1j} \right] \right\} = \\ &= H(c_1 t - r) g_{1j}^{(1)} + H(c_2 t - r) g_{1j}^{(2)} = U_{1j}^{(1)} + U_{1j}^{(2)} \quad (2) \end{aligned}$$

En el caso de fuerzas de volumen y condiciones iniciales nulas, la ecuación (1) se transforma en:

$$c_{1j} u_j = \int_{\Gamma} (U_{1j} * p_j - T_{1j} * u_j) d\Gamma \quad (3)$$

Las derivadas espaciales de la U_{1j} dada por la ecuación (2) dan lugar a un producto de funciones singulares que sólo puede ser integrado después de una transformación que relaciona las derivadas espaciales y las temporales [16,17]. De ese modo la ecuación (3) se transforma en

$$\begin{aligned} c_{1j} u_j &= \\ &\int_0^{t^*} \left[\int_{\Gamma} U_{1j} p_j d\Gamma \right] dt - \int_0^{t^*} \left[\int_{\Gamma} (Z_{1j} u_j - J_{1j} \dot{u}_j) d\Gamma \right] dt \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Z_{1j} &= \\ &\rho \sum_{\alpha=1}^2 H(c_{\alpha} t - r) \left[(c_1^2 - 2c_2^2) \delta_{jx} \left(g_{11,1}^{(\alpha)} - \frac{r_{,1}}{c_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} g_{11}^{(\alpha)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_2^2 \left(g_{1j,k}^{(\alpha)} - \frac{r_{,k}}{c_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} g_{1j}^{(\alpha)} + g_{ik,j}^{(\alpha)} - \frac{r_{,j}}{c_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} g_{ik}^{(\alpha)} \right) \right] n_k = \end{aligned}$$

$$= Z_{ij}^{(1)} + Z_{ij}^{(2)} \quad (4)$$

$$J_{ij} = \rho \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{c_\alpha} [(\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2) \delta_{jk} r_{,1} U_{i1}^{(\alpha)} + \sigma_2^2 (r_{,k} U_{ij}^{(\alpha)} + r_{,j} U_{ik}^{(\alpha)})] n_k = J_{ij}^{(1)} + J_{ij}^{(2)}$$

El límite superior t^+ se usa para evitar terminar la integración en el pico de una función δ .

2. IMPLEMENTACION NUMERICA

Los desplazamientos y tracciones se aproximan mediante funciones de interpolación en la forma

$$u_j = \sum_q \sum_m \varphi^q(r) \eta^m(t) u_j^{mq}$$

$$p_j = \sum_q \sum_m \psi^q(r) \mu^m(t) p_j^{mq} \quad (5)$$

donde q indica el nodo del contorno y m el paso de tiempo.

Las interpolaciones temporales se suponen: $u^m(t)$ constante y $\eta^m(t)$ lineal, en cada paso.

Las interpolaciones espaciales $\varphi^q(r)$ y $\psi^q(r)$ se suponen de tipo cuadrático, salvo en los elementos singulares.

La ecuación (4) despues de las interpolaciones, toma la forma:

$$\sigma_{ij} u_j = \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^Q \left[\int_{\Gamma_q} \left[\int_{t_{m-1}}^{t_m^+} U_{ij} \mu^m dt \right] \psi^q d\Gamma \right] p_j^{mq} - \left[\int_{\Gamma_q} \left[\int_{t_{m-1}}^{t_m^+} (Z_{ij} \eta^m - J_{ij} \dot{\eta}^m) dt \right] \varphi^q d\Gamma \right] u_j^{mq} \quad (6)$$

donde Q es el número total de nodos y M el de pasos de tiempo hasta t .

La primera integral de (6) puede escribirse como

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m^+} U_{ij} \mu^m dt = \int_{t_{m-1}}^{t_m^+} (U_{ij}^{(1)} + U_{ij}^{(2)}) \mu^m dt = U_{ij}^{m(1)} + U_{ij}^{m(2)} \quad (7)$$

Mediante integración analítica se obtiene para $t = t_n$, $t_m = t_m$ y $t_{m-1} = t_m - \Delta t$

$$U_{ij}^{m(\alpha)} = U_{ij}^{m(\alpha)}(r, t_n, \xi) =$$

$$\frac{1}{2\pi\rho} \left\{ r^{-2} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right) (-1)^\alpha \left[(t_n - t_m + \Delta t) \sqrt{(t_n - t_m + \Delta t)^2 - (r/c_\alpha)^2} - (t_n - t_m) \sqrt{(t_n - t_m)^2 - (r/c_\alpha)^2} \right] + \frac{\delta_{ij}}{2c_\alpha^2} \ln \frac{(t_n - t_m + \Delta t) + \sqrt{(t_n - t_m + \Delta t)^2 - (r/c_\alpha)^2}}{t_n - t_m + \sqrt{(t_n - t_m)^2 - (r/c_\alpha)^2}} \right\}$$

cuando $(t_n - t_m) > r/c_\alpha$

$$\frac{1}{2\pi\rho} \left\{ r^{-2} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right) (-1)^\alpha \left[(t_n - t_m + \Delta t) \sqrt{(t_n - t_m + \Delta t)^2 - (r/c_\alpha)^2} \right] + \frac{\delta_{ij}}{2c_\alpha^2} \ln \frac{(t_n - t_m + \Delta t) + \sqrt{(t_n - t_m + \Delta t)^2 - (r/c_\alpha)^2}}{r/c_\alpha} \right\}$$

cuando $(t_n - t_m) < t_n - t_m + \Delta t$

0 cuando $(t_n - t_m + \Delta t) < r/c_\alpha$ (8)

La segunda integral de (6) puede también escribirse en forma similar como

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m^+} (Z_{ij} \eta^m - J_{ij} \dot{\eta}^m) dt = T_{ij}^{m(1)} + T_{ij}^{m(2)} \quad (9)$$

e integrarla teniendo en cuenta

$$\eta^m = \begin{cases} \frac{t - t_m}{\Delta t} + 1 & \text{cuando } t_{m-1} \leq t \leq t_m \\ \frac{t_{m+1} - t}{\Delta t} & \text{cuando } t_m \leq t \leq t_{m+1} \\ 0 & \text{en los demas casos} \end{cases} \quad (10)$$

para obtener la siguiente expresión

$$T_{ij}^{m(\alpha)} = T_{ij}^{m(\alpha)}(r, t_n; \xi) = (-1)^\alpha \frac{n_k}{2\pi} \frac{\Delta t^2}{r^3} \left\{ \frac{2}{3} \sigma_2^2 [4r_{,1}r_{,j}r_{,k} - r_{,j}\delta_{ik} - r_{,k}\delta_{ij} - r_{,i}\delta_{jk}] \right. \\ \left. [-2 D_{rm}^{3(\alpha)}(r; 0) + D_{rm}^{3(\alpha)}(r; -1) + D_{rm}^{3(\alpha)}(r; 1)] + a_{1jk}^{(\alpha)}(r) \left[\frac{r}{c_\alpha \Delta t} \right]^2 \right. \\ \left. [-2 D_{rm}^{1(\alpha)}(r; 0) + D_{rm}^{1(\alpha)}(r; -1) + D_{rm}^{1(\alpha)}(r; 1)] \right\} \quad (11)$$

donde

$$D_{rm}^{k(\alpha)}(r; p) = \begin{cases} \sqrt{\left[(n-m+p)^2 - \left(\frac{r}{c_\alpha \Delta t} \right)^2 \right]^k} & \text{si } n - m + p > \frac{r}{c_\alpha \Delta t} \\ 0 & \text{en los demas casos} \end{cases} \quad (12)$$

y

$$a_{1jk}^{(1)}(r) = 2\sigma_2^2 r_{,1} r_{,j} r_{,k} + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2) r_{,i} \delta_{jk} \quad (13)$$

$$a_{1jk}^{(2)}(r) = \sigma_2^2 (2r_{,1} r_{,j} r_{,k} - r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{ij})$$

La ecuación de elementos de contorno queda:

$$\sigma_{ij} u_j = \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\int_{\Gamma_q} (U_{ij}^{m(1)} + U_{ij}^{m(2)}) d\Gamma \right] \psi^q p_j^{mq} - \left[\int_{\Gamma_q} (T_{ij}^{m(1)} + T_{ij}^{m(2)}) d\Gamma \right] \varphi^q u_j^{mq} \right\} \quad (14)$$

donde $U_{ij}^{m(k)}$ y $T_{ij}^{m(k)}$ están dadas por (8) y (11) respectivamente.

La integración sobre cada uno de los elementos de contorno de los términos de la ecuación (14) para cada paso de tiempo se realiza numéricamente mediante cuadratura de Gauss, excepto en el caso del primer instante de tiempo y en el propio elemento en el que se está calculando la solución, para el cual aparecen singularidades en los núcleos. En este caso se calcula analíticamente la parte de cada integral correspondiente al término singular.

3. ELEMENTOS SINGULARES

La geometría, desplazamientos y tracciones en el caso de elementos cuadráticos son representadas a lo largo del elemento como:

$$f_i = \phi^1 f_i^1 + \phi^2 f_i^2 + \phi^3 f_i^3 \quad (15)$$

donde ϕ^1, ϕ^2 y ϕ^3 son polinomios cuadráticos dependientes de la coordenada natural ξ , f_i , representa una coordenada cartesiana, un desplazamiento o una tracción, y f_i^j sus valores nodales.

Si se toma un elemento cuadrático rectilíneo con su nodo central colocado a un cuarto de la longitud a partir de uno de los extremos y se expresa la coordenada ξ en función de r definida a lo largo del elemento (figura 1), la ecuación (15) se transforma en:

$$f_i = a_i^1 + a_i^2 \sqrt{\frac{r}{l}} + a_i^3 \frac{r}{l} \quad (16)$$

siendo:

$$a_i^1 = f_i^1$$

$$a_i^2 = -f_i^3 + 4f_i^2 - 3f_i^1$$

$$a_i^3 = 2f_i^3 - 4f_i^2 + 2f_i^1$$

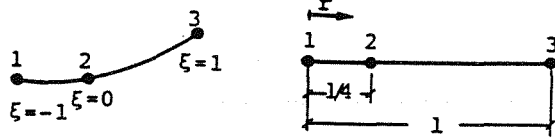


Figura 1. Elementos cuadráticos

La geometría del elemento da lugar, pues, a una forma de f_1 que es capaz de representar el comportamiento de tipo \sqrt{r} de los desplazamientos. Para ello únicamente hay que hacer coincidir r a lo largo del elemento con r a lo largo de los labios de la grieta.

Para evitar problemas numéricos, se hace pasar un contorno a lo largo de la grieta dividiendo así el dominio en estudio en subdominios. Se presentará pues una singularidad en las tracciones en el elemento que, partiendo del vértice de la grieta se adentra en el medio continuo. Esta singularidad que será del tipo $1/\sqrt{r}$, puede ser incluida en la representación si se hace uso de un elemento cuadrático de nodo a un cuarto con unas funciones de forma singulares. Para ello sólo hay que incluir un término del tipo $1/\sqrt{r}$.

$$p_1 = \hat{p}_1^1 \hat{\phi}^1 \sqrt{\frac{1}{r}} + \hat{p}_1^2 \hat{\phi}^2 \sqrt{\frac{1}{r}} + \hat{p}_1^3 \hat{\phi}^3 \sqrt{\frac{1}{r}}$$

$$p_1 = \hat{p}_1^1 \hat{\phi}^1 + \hat{p}_1^2 \hat{\phi}^2 + \hat{p}_1^3 \hat{\phi}^3 \quad (17)$$

donde \hat{p}_1^j son ahora los valores nodales de p_1 divididos por los valores nodales de $\hat{\phi}^j$,

$$\begin{aligned} \hat{p}_1^3 &= p_1^3 \\ \hat{p}_1^2 &= p_1^2 / 2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\hat{p}_1^1 = \lim_{r \rightarrow 0} p_1^1 \sqrt{\frac{r}{l}}$$

y la ecuación (9) en términos de r es:

$$p_1 = \hat{a}_1^1 \sqrt{\frac{1}{r}} + \hat{a}_1^2 + \hat{a}_1^3 \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{siendo } a_1^1 &= p_1^1; \quad a_1^2 = -p_1^3 + 4p_1^2 - 3p_1^1 \quad \text{y} \\ a_1^3 &= 2p_1^3 - 4p_1^2 + 2p_1^1. \end{aligned}$$

En consecuencia, el elemento singular de nodo a un cuarto permite una representación correcta, tanto de los desplazamientos como de las tracciones. Establecida esta representación, los factores de intensidad de tensión pueden determinarse de una forma directa mediante el valor nodal de la tracción en el vértice si se toma la discretización de manera que el elemento adyacente al vértice siga un ángulo $\theta = 0^\circ$ (figura 2). La coordenada r coincide con r y de la expresión de las tensiones se tiene:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (20)$$

Los valores en el nodo k son:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1^k &= \lim_{r \rightarrow 0} p_1 \sqrt{\frac{r}{l}} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{11} \eta_1 + \sigma_{12} \eta_2) \sqrt{\frac{r}{l}} = \\ &= \frac{1}{2\pi l} (K_I \eta_1 + K_{II} \eta_2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_2^k &= \lim_{r \rightarrow 0} p_2 \sqrt{\frac{r}{l}} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{12} \eta_1 + \sigma_{22} \eta_2) \sqrt{\frac{r}{l}} = \\ &= \frac{1}{2\pi l} (K_{II} \eta_1 + K_I \eta_2) \end{aligned}$$

donde η_1 son las componentes de la normal unitaria.

Tomando un sistema local de coordenadas tal que $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = 1$, los factores de intensidad coincidirán con los valores nodales de t , salvo una constante.

$$K_I = \hat{p}_2^k \sqrt{2\pi l} \quad (22)$$

$$K_{II} = \hat{p}_1^k \sqrt{2\pi l}$$

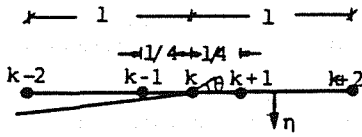


Figura 2. Elementos adyacentes al vértice

Los factores de intensidad de tensión K_I y K_{II} pueden también calcularse utilizando los desplazamientos a lo largo de los bordes de la grieta en la forma tradicional de elementos finitos. Si se emplean dos nodos (figura 2)

$$K_I = \frac{\mu}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (4u_2^{k-1} - u_2^{k-2}) \quad (23)$$

o si se emplea uno sólo

$$K_I = \frac{\mu}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} u_2^{k-1} \quad (24)$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal y ν el de Poisson. De forma similar se calcula K_{II} haciendo uso de los desplazamientos en la dirección de la propia grieta.

4. PLACA RECTANGULAR CON GRIETA CENTRADA

El problema que se trata a continuación ha sido ya utilizado como ejemplo de validación de diversos métodos de cálculo de F.I.T. y su resolución mediante diferencias finitas es debida a Chen [9]. Aunque la solución conocida fue obtenida mediante un método numérico, se utiliza con frecuencia como referencia por no disponerse de alguna otra más fiable. La geometría y condiciones de contorno del problema se presentan en la figura 3. Las propiedades mecánicas son:

- Módulo de elasticidad transversal : $\mu = 76923 \text{ GPa}$
- Módulo de Poisson : $\nu = 0.3$
- Densidad : $\rho = 5000 \text{ Kg/m}^3$

Una carga de tracción uniforme $P = 0.4 \text{ GPa}$ es aplicada en los extremos con una variación temporal en forma de escalón.

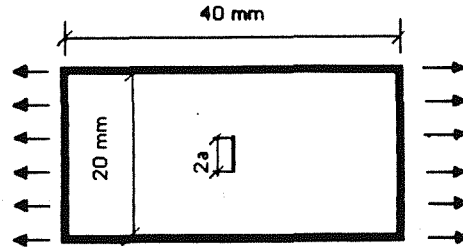


Fig. 3. Placa con grieta centrada (a = 2.4mm).

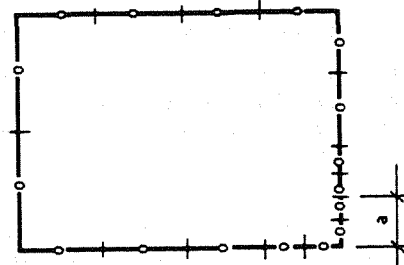


Fig. 4. Discretización de la geometría.

La discretización de elementos de contorno empleada se muestra en figura 4. Sólo se discretiza un cuarto de la placa por la simetría del problema. El paso de tiempo escogido es $\Delta t = 0.32 \mu s$ tal que las ondas P recorren una distancia de 2.4 mm en un Δt . Los dos elementos adyacentes al vértice de la grieta son elementos con nodo a un cuarto o elementos con nodo a un cuarto y función de forma singular según la ecuación (17).

En la figura 5(a) se representa el F.I.T. normalizado con $P(t)\sqrt{\pi a}$ en función del tiempo. El valor de K_I ha sido obtenido directamente del valor nodal del elemento singular del vértice de la grieta según la ecuación (22). Como se puede apreciar la aproximación a los resultados de Chen es muy grande. En la figura 5(b) y 5(c) se representa el mismo factor K_I pero calculado en función de los desplazamientos a lo largo de los bordes según la ecuación (23) para 5(b) y (24) para la figura 5(c). Análogamente se representan los valores obtenidos con las ecuaciones (23) y (24) en las figuras 5(d) y 5(e) pero empleando elementos cuadráticos con nodo a un cuarto pero sin función de forma singular. Como puede apreciarse los resultados de 5(a) y 5(b) son los que menos difieren de los de Chen.

Todos los resultados de la figura 5 se obtuvieron con la discretización de la figura 4. La longitud relativa de los elementos adyacentes al vértice de la grieta respecto a la longitud de la misma influirá en el resultado obtenido. En la figura 6 se

representa el F.I.T. normalizado cuando los elementos adyacentes al vértice son de longitud $l = 0.3 \cdot a$ y los siguientes de longitud $l = 0.7 \cdot a$ y el resto de la discretización como la del caso anterior. Los resultados de la figura 6 muestran la buena fiabilidad del método respecto al tamaño de los elementos empleados. Para tener idea de esta fiabilidad, se han obtenido resultados con los cinco procedimientos de las figuras 5(a) a 5(e) y diversas longitudes l de los elementos adyacentes al vértice. La figura 7 muestra la raíz cuadrada de la integral del cuadrado de la diferencia entre la curva del M.E.C. y la de Chen dividida entre el intervalo total de integración, para distintos valores de l/a y los cinco procedimientos indicados. Como cabría esperar, el procedimiento menos sensible a la discretización es el que hace uso del valor nodal de p_1 en el vértice (K_t) y los procedimientos menos fiables son los que hacen uso de elementos con nodo a un cuarto pero no singulares (K_{u1n} y K_{u2n}). Debe indicarse aquí que los resultados de Chen fueron obtenidos numéricamente y que las pequeñas diferencias existentes en la figura 5(a) no necesariamente son debidas a error del método propuesto en este artículo.

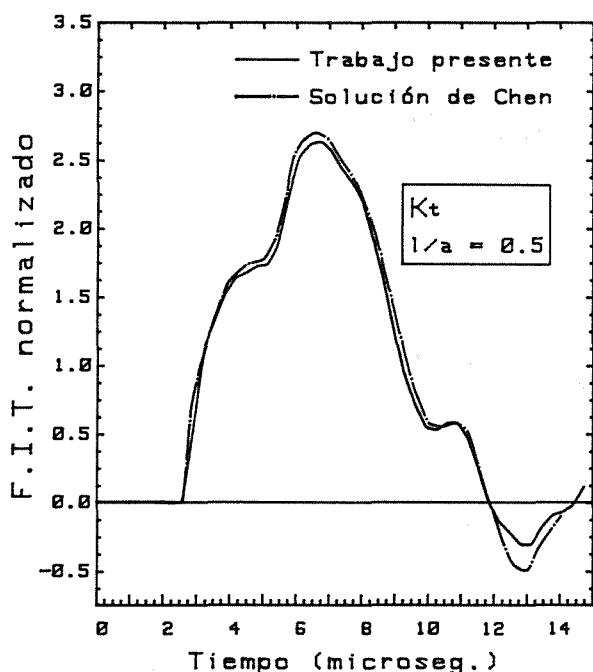


Fig. 5(a). F.I.T. calculado con la tensión nodal del elemento a un cuarto singular. ($l/a = 0.5$)

Con objeto de comparar con resultados de elementos finitos, se muestra en la figura 8 el factor de intensidad de tensión K_I normalizado que obtuvieron recientemente Murti y Valliappan [12] haciendo uso de un elemento finito singular con nodo a un cuarto y una malla con una discretización en elementos rectangulares con el doble de nodos sobre el contorno que la empleada en este artículo, y con el mismo paso de tiempo. Como puede verse los resultados tanto para masa

consistente como concentrada están menos de acuerdo con los de Chen que los del presente artículo, además de presentar oscilaciones sensibles. Las curvas reproducidas aquí son probablemente las más suaves y precisas de cuantas presentan Murti y Valliappan que hacen en su artículo un estudio del importante efecto oscilatorio no deseado que presenta su solución dependiendo de la discretización y paso de tiempo escogido. En el caso del M.E.C., como se ve en las figuras 5 y 6, estos efectos prácticamente no se producen. En estudios próximos se abordará con mayor extensión el efecto del tamaño del paso escogido que si bien no da lugar a tantas oscilaciones como en elementos finitos debe ser optimizado.

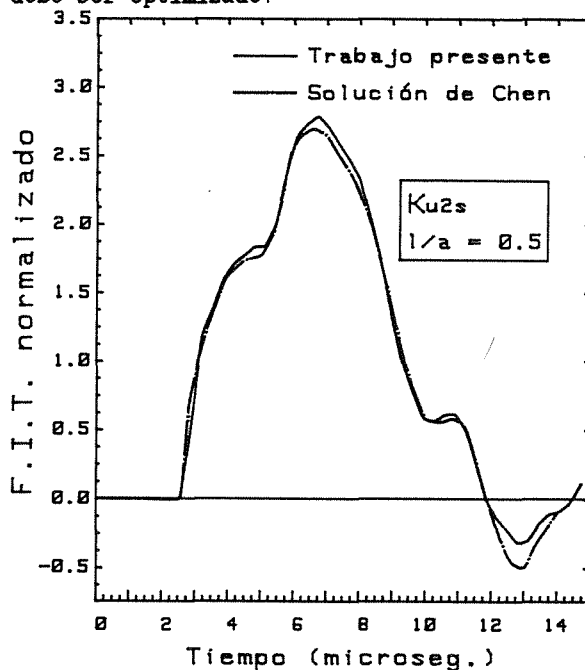


Fig. 5(b).

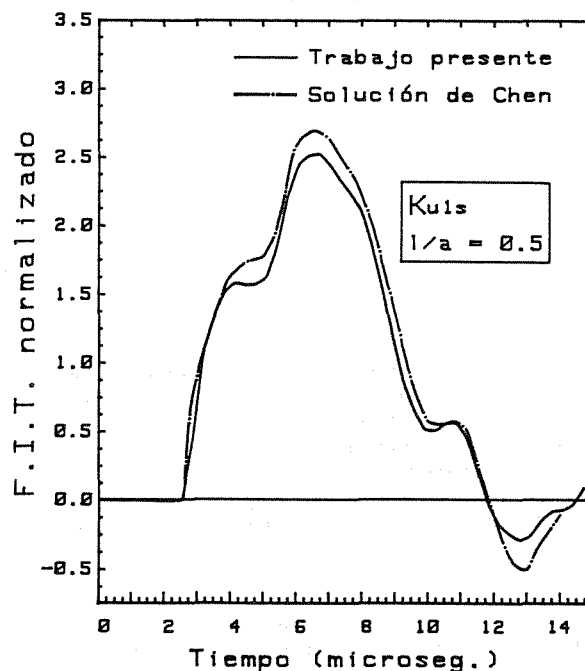


Fig. 5(c).

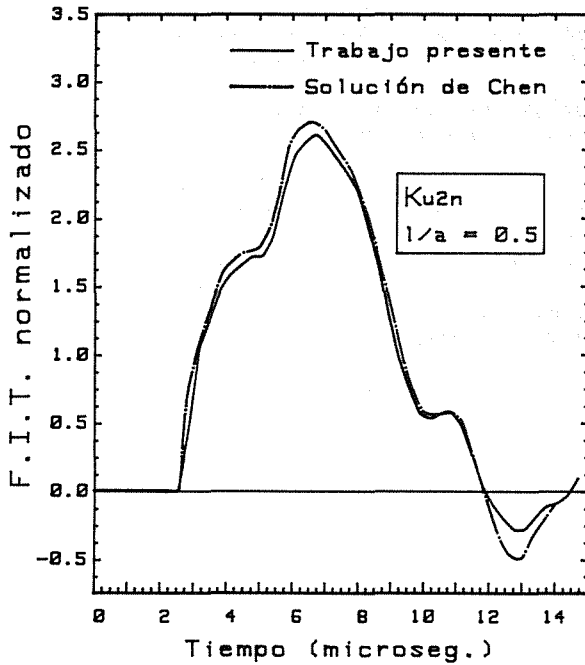


Fig. 5(d).

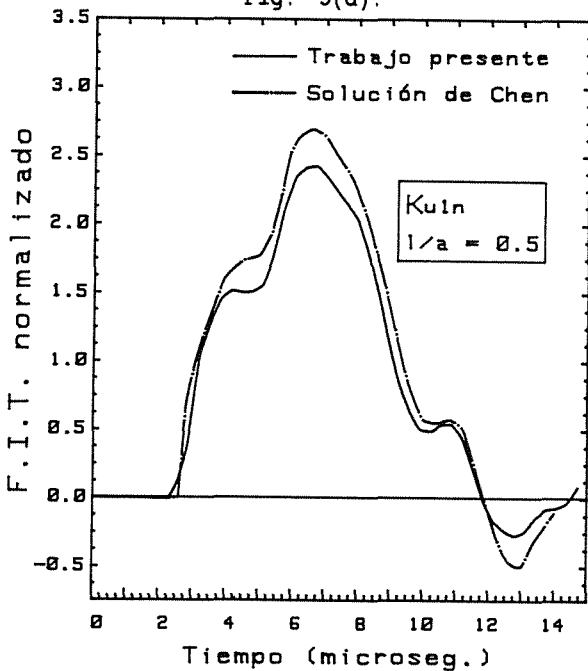


Fig. 5(e).

5. CONCLUSIONES.

Se ha propuesto un procedimiento para el cálculo de factores de intensidad de tensión haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno en elementos sometidos a cargas dinámicas de tipo transitorio. Los factores dinámicos de intensidad de tensión se calculan directamente del valor nodal (en el vértice de la grieta) de la representación de las tracciones sobre un elemento cuadrático singular.

Se ha demostrado como este procedimiento directo y sencillo produce resultados precisos en cuerpos de dimensiones finitas. El tipo de elemento singular empleado puede ser fácilmente implementado dentro de un

programa general de elementos de contorno con elementos cuadráticos para problemas dinámicos en el dominio del tiempo.

Los resultados aquí presentados son menos sensibles a la discretización espacial y temporal que los obtenidos por otros autores mediante elementos finitos.

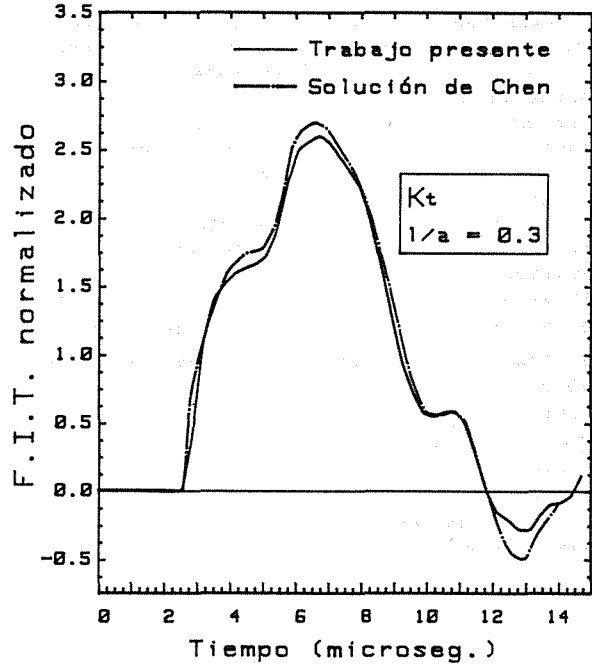


Fig. 6. F.I.T. calculado con la tensión nodal en el elemento a un cuarto singular. ($1/a = 0.3$)

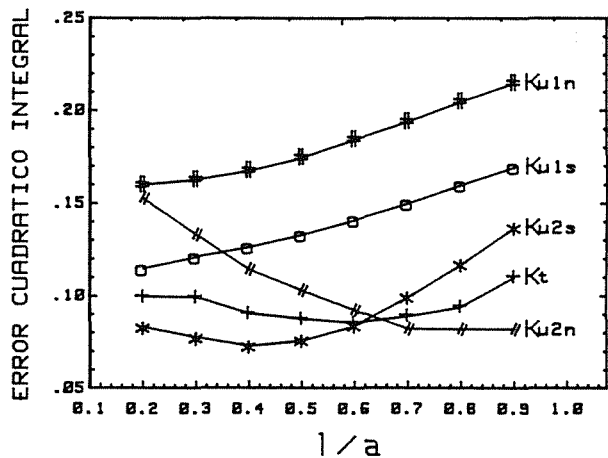


Fig. 7. Diferencia cuadrática integral entre la solución de Chen y las obtenidas con el M.E.C., para diferentes valores de $1/a$.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su gratitud a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología por la ayuda financiera recibida a través del Proyecto de Investigación N° PB86-0139.

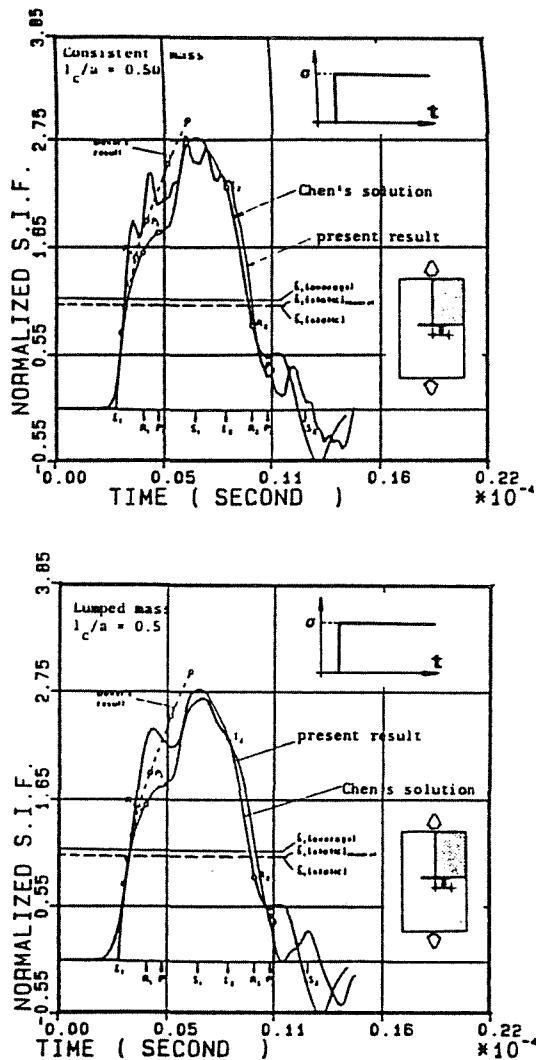


Fig. 8. F.I.T. calculado con Elementos Finitos.

7. REFERENCIAS

- [1]. De Hoop, (1959) "Representation Theorems for the Displacement in an Elastic Solid and Their Applications to Elastodynamics Diffraction Theory." thesis, Technische Hogeschool, Delft, (1959).
- [2]. Sih, G.C., and Loeber, J.F., (1969), "Wave Propagations in an Elastic Solids with a Line of Discontinuity or finite Crack.", *Q. Appl. Math.*, Vol. 27, pp. 193-231.
- [3]. Mal, A.K., (1970) "Interaction of Elastic Waves with a Griffith Crack.", *Int. J. Engng. Sci.* Vol. 8, pp. 763-776.
- [4]. Keer, L.M., Lin, W., and Achenbach, J.D., (1984), "Resonance Effects for a Crack Near a Free Surface." *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 65-70.
- [5]. Lin, W., Keer, L.M. and Achenbach, J.D., (1984), "Dynamic Stress Intensity Factors for an Inclined Subsurface Crack.", *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 773-779.
- [6]. Angel, Y.C., and Achenbach, J.D., "Stress Intensity Factor for 3-D Dynamic Loading of a Cracked Halfspace.", *J. of Elasticity*, Vol. 15, pp. 89-102.
- [7]. Thau, S.A., and Lu, T.H., (1971), "Transient Stress Intensity Factors for a Finite Crack in an Elastic Solid Caused by a Dilatational Wave." *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 731-750.
- [8]. Sih, G.C., Embley, G.T. and Ravera, R.S., (1972), "Impact Response of a Finite Crack in Plane Extension." *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 977-993.
- [9]. Chen, Y.M., (1975), "Numerical computation of Dynamic Stress Intensity Factor by Lagrangian Finite-difference Method.", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 7, pp. 653-660.
- [10]. Atluri, S.N., and Nishioka, T., (1985), "Numerical Studies in Dynamic Mechanics.", *Int. J. Fract.*, Vol. 27, pp. 245-261.
- [11]. Aoki, S., Kishimoto, K., Kondo, H., and Sakata, M., (1978), "Elastodynamic Analysis of Crack by Finite Element Method Using Singular Element", *Int. J. Fract.*, Vol. 14, pp. 59-68.
- [12]. Murti, V., and Valliappan, S., (1986), "The Use of Quarter Point Element in Dynamic Crack Analysis." *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 23, pp. 585-614.
- [13]. Cruse, T.A., (1978), "Two-dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 2, pp. 287-293.
- [14]. Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. and Liggett, J.A., (1981), "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method." *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 387-404.
- [15]. Martínez, J. and Domínguez, J., (1984), "On the Use of Quarter-point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations." *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 20, pp. 1941-1950.

- [16] W.J.Mansur,(1983) 'A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method',Ph.D.Thesis, University of Southampton,U.K.
- [17] H.Antes,(1985)"A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media", Finite Elem. Anal. Des.,1,313-322.
- [18] Brebbia C.A., and Dominguez, J., (1989), "Boundary Elements. An introductory Course", CMP Publications McGraw-Hill.
- [19] Dominguez, J. y Chirino, F. (1986), "B.E.M. for Dynamic Crack Problems in Two Dimensions" BETECH 86, J.J. Connor and C.A. Brebbia Ed., Computational Mechanics Publications, Southampton - Boston.
- [20] A.C.Eringen y E.S.Suhubi,(1975) 'Elastodynamics Vol.II, Linear Theory', Academic Press,NY.