RESULTADOS DE REGULARIDAD Y ACOTACIONES DEL ERROR A PRIORI DEL M.E.F. RELACIONADOS CON LA MECANICA DE LA FRACTURA

Gavete L., Michavila F., Heras F. y Herranz J.

Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos.
E.T.S. Ingenieros de Minas (Universidad Politécnica de Madrid).
C/ Rios Rosas, 21
28003 MADRID

Resumen.- El presente trabajo constituye una recopilación de los resultados existentes sobre regularidad, y acotaciones del error a priori en la norma de la energía, obtenidos de la aplicación del método de elementos finitos a problemas de elasticidad en dos dimensiones. Estos resultados se han obtenido a partir de los años 70, existiendo en la actualidad diversos temas que siguen abiertos. Todo ello es de aplicación en el caso de modelizar por el método de elementos finitos problemas de mecánica de fractura y de materiales compuestos. Como puede verse en este trabajo es fundamental conocer el exponente de la singularidad para poder conocer el error cometido en la aproximación.

Abstract.- This paper constitutes a summary of the state of the art on the regularity results and the approximation error in the energy-norm, obtained when we apply the finite element method to elasticity problems in two-dimensional cases. All the research in this area begin in the 70's years, existing yet now many open problems in this area. All it is important when we use the finite element method to solve fracture problems and also in the case of composite materials. As it is shown in this paper the most important parameter in order to know the magnitude of the approximation error, is the exponent of the singularity.

1. INTRODUCCION

El método de Elementos Finitos aunque ya existían algunos antecedentes comienza a desarrollarse en el año 1956 y tiene una fase inicial de investigación y desarrollo que va unida a la existencia de ordenadores cada vez más potentes. Hasta 1970 no se empiezan a desarrollar las matemáticas del Método de Elementos Finitos y es entonces cuando se estudia la existencia y unicidad de solución en diferentes ecuaciones en derivadas parciales, así como las primeras acotaciones del error.

Durante los años 70 y 80 se desarrollan diferentes acotaciones del error y se presentan diversos resultados de regularidad, así como todo el proceso de h - p convergencia basado fundamentalmente en los estudios de Babuska y sus colaboradores [1-4]. Muchos de los desarrollos implican la existencia de múltiples temas abiertos que todavía permanecen sin resolver en su totalidad.

El error introducido en la aproximación u_h mediante el M.E.F. de la solución real u se produce en todos los problemas dado que:

$$u \approx u_h = \sum_{e=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} u_i^{(e)}\psi_i^{(e)} = \sum_{I=1}^{M} U_I\phi_I \qquad (1)$$

en donde N es el número de elementos finitos del mallado, M es el número total de nodos del dominio, n es el número de nodos de un elemento y ψ, ϕ funciones de aproximación que se utilizan en el M.E.F.

La solución u_h del problema mediante el M.E.F. se dice que converge en cada norma dada $\|.\|$ a la solución real u si:

$$\|e\| = \|u - u_h\| \le Ch^p;\ p > 0 \qquad (2)$$

en donde C es una constante independiente de u y u_h; y h es una longitud característica ligada al tamaño del diámetro del elemento. La constante p se denomina orden de convergencia.

Cuando los valores de la solución u, de un problema definido por una ecuación diferencial, o alguna de sus derivadas se aproxima al infinito en puntos, líneas o superficies de un dominio Ω, la solución se dice que posee una "singularidad" o que es una función de baja regularidad, en dicha zona del dominio Ω. La aproximación de funciones con singularidades presenta grandes dificultades, dado que se modifica fuertemente el orden de convergencia p definido anteriormente. Un caso muy típico aparece con la existencia de grietas.

Los resultados sobre singularidades van unidos en algunos casos al desarrollo de las matemáticas del Método de Elementos Finitos y comienzan su desarrollo en los años 70 continuándose en la actualidad. Es en el apartado del estudio de regularidad de la solución y de sus acotaciones del error a priori en el que se inscribe el presente trabajo.

2. PROBLEMAS DE ELASTICIDAD CON SINGULARIDADES

Se considera el problema siguiente:

Dadas unas funciones $\underset{\sim}{f} = (f_1, f_2)$ de $(L^2(\Omega))^2$ y $\underset{\sim}{g} = (g_1, g_2)$ de $(L^2(\partial\Omega))^2$, encontrar una función $\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2)$ solución de:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{J=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{con las condiciones de contorno} \\ u_i = \hat{u}_i \text{ sobre } \partial\Omega_1 \text{ (Dirichlet)} \\ \displaystyle\sum_{J=1}^{2} \sigma_{ij}\, \upsilon_j = g_i \text{ sobre } \partial\Omega_2 \text{ (Neumann)} \end{array}\right\} \quad (3)$$

para i = 1,2

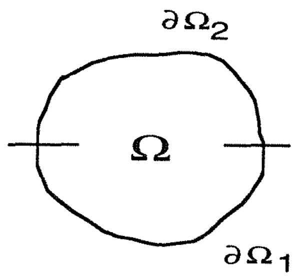

Figura 1

En este caso se verifican las propiedades necesarias para poder asegurar la existencia y unicidad de la solución como puede verse en Raviart y Thomas [5].

Consideremos ahora un subdominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con un vértice entrante en el punto S formando un ángulo interior w y sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ los contornos correspondientes a los lados del vértice S, ver figura 2.

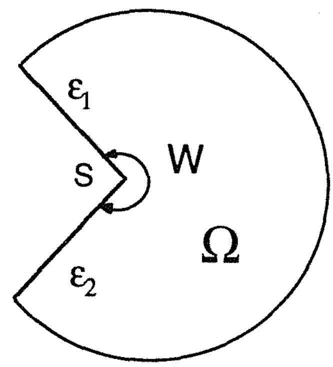

Figura 2

Entonces de acuerdo con los trabajos de Grisvard [6] se genera una singularidad de la forma siguiente

$$\underset{\sim}{u}(x_1,x_2) = r^{\alpha_1}\,\underset{\sim}{u}(\theta) \text{ con } 0 \leq \operatorname{Re}\alpha_1 < 1 \quad (4)$$

y tomando el origen de coordenadas en el punto S.

Para un material homogéneo los exponentes α_1 son solución de:

<u>**Tabla 1 Cálculo del exponente de la singularidad.**</u>

CALCULO DE α_1	CONDICIONES DE CONTORNO	
	ε_1	ε_2
$\operatorname{sen}^2 w\alpha_1 = \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^2 \alpha_1^2 \operatorname{sen}^2 w$	(D)Dirichlet	(D) Dirichlet
$\operatorname{sen}^2 w\alpha_1 = \alpha_1^2 \operatorname{sen}^2 w$	(N)Neumann	(N) Neumann
$\operatorname{sen}^2 w\alpha_1 = \dfrac{(\lambda+2\mu)^2 - (\lambda+\mu)^2\alpha_1^2 \operatorname{sen}^2 w}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}$	(D)Dirichlet	(N)Neumann

λ y μ = coeficientes de Lamé.

Se puede ver fácilmente que $w > \pi$ es el valor crítico para que exista la singularidad en el caso de que ambas condiciones de contorno sean de Dirichlet o de Neumann (caso de fractura de material homogeneo). Pero si se tienen condiciones de contorno mixtas, pueden existir singularidades para $w < \pi/2$ (caso de empotramientos de voladizos).

Otro tipo de singularidades que aparece frecuentemente es el caso de materiales compuestos o estratificados, y lo mismo que hemos visto en el caso anterior existen procedimientos de cálculo del coeficiente α_1, como los seguidos por Leguillon y Sánchez Palencia [7].

En función del valor de α_1 conocido se plantean fórmulas de acotación del error como las comentadas en [4]. Sin embargo, el paso de ecuaciones elípticas escalares a elasticidad lineal implica algunos cambios en cuanto a la existencia de singularidades debido a variación de resultados en los teoremas concernientes a la regularidad de la solución.

Con todos los resultados comentados podemos conocer a priori en función de las características del dominio, (forma del dominio, tipos de materiales y sus contornos de interfase, fuerzas exteriores) las singularidades existentes.

3. ACOTACIONES DEL ERROR A PRIORI

Al aplicar el método de elementos finitos a un problema cualquiera se pueden establecer dos tipos diferentes de acotaciones del error: 1) A priori, es decir, antes de resolver el problema y que son las que vamos a ver en este apartado. 2) A posteriori, es decir, conocer el error cometido en función de los resultados obtenidos. Debido a la extensión del trabajo no vamos a entrar en este tipo de error.

Dentro del error a priori se pueden realizar estimaciones de error de tipo global o local estando todas ellas influenciadas fuertemente por la regularidad de la solución, (que viene determinada por el valor exponente α_1). Algunas de estas estimaciones de error son todavía hoy temas abiertos de investigación.

La acotación del error global para h-convergencia en la norma de la energía (norma 1) viene dada por

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\min(K,r-1)} \qquad (5)$$

siendo K el orden del polinomio completo de aproximación de la función y r el grado de regularidad (que se podría relacionar con el tipo del espacio al que pertenece la solución).

Vamos ahora a generalizar y comentar los órdenes de convergencia en algunos casos particulares. Consideremos el caso de un dominio poligonal plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con un contorno $\partial\Omega$ que consiste en M segmentos (o arcos regulares) entre los vértices S_j, j=1,2...M, que tienen ángulos interiores $0<w_1....\leq w_M < 2\pi$ (ver figura 3).

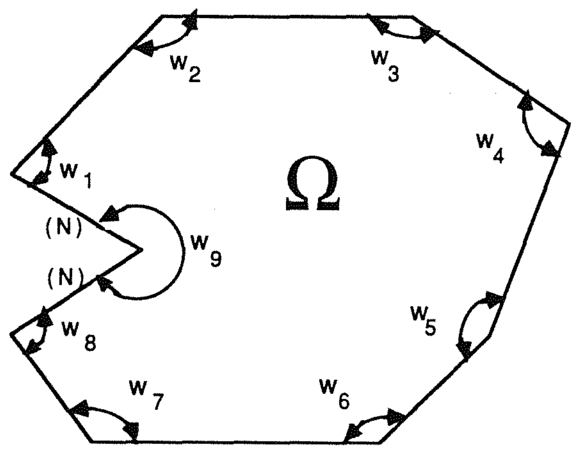

Figura 3

Supongamos que queremos resolver la ecuación (3) en este dominio, con condiciones de contorno de Neumann (N)

Entonces si $\beta_j = \pi/w_j$ la solución

$$u \in H^r(\Omega) \text{ y } H^m(\Omega) = \left\{ v/v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \frac{\partial^m v}{\partial z^m} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\text{siendo } L^2(\Omega) = \left\{ u/ \int_\Omega |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

es justo lo bastante regular, como para satisfacer:

$$u \in H^{1+B_M}(\Omega) \qquad (6)$$

siendo en este caso $1+\beta_M = r$

Entonces para los dominios indicados en la figura 2, tendremos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Rectangular} & u \in H^3(\Omega) \\ \text{En forma de L} & u \in H^{(5/3)}(\Omega) \\ \text{Grieta} & u \in H^{(3/2)}(\Omega) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

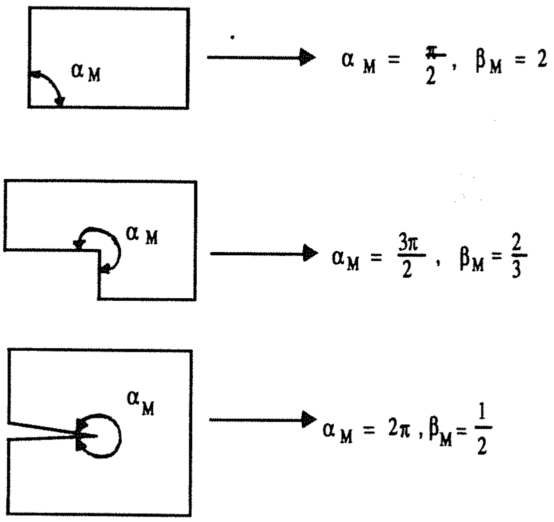

Figura 4

Entonces si empleamos elementos finitos con polinomios de grado k, en la aproximación de (1.18) los órdenes globales de convergencia (acotación a priori global del error) para los dominios de la figura 4 son:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Rectangular} & : |u-u_h|_{1,\Omega} \le C\, h^{\min(k,2\epsilon)} \\ \text{En forma de L} & : |u-u_h|_{1,\Omega} \le h^{(2/3)} \\ \text{Grieta} & : |u-u_h|_{1,\Omega} \le C h^{(1/2)} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Entonces en todos los casos excepto en el dominio rectangular, el orden de convergencia no está influido por el orden k del polinomio aproximador y aún en el caso rectangular, solamente el valor k=1 controla el orden de convergencia.

Hasta aquí hemos considerado que trabajamos con unos elementos finitos de un cierto orden (grado del polinomio completo de aproximación de la función) y hemos repasado los resultados existentes sobre la acotación del error a priori global. Es decir hemos comentado los resultados existentes sobre acotación del error a priori en lo que se denomina la h-convergencia.

Sin embargo es importante conocer los resultados de acotación del error a priori también en el caso de la p-convergencia (fijamos el tamaño de los elementos finitos y aumentamos progresivamente el grado completo p del polinomio aproximador).

Las acotaciones del error a priori para p-convergencia han sido obtenidas por Babuska, Szabo y Katz [8].

Sea $u \in H^r(\Omega)$, $r > 1$ la solución exacta del problema (1.1) y sea u_p la aproximación por elementos finitos. Entonces

$$|u-u_p|_{1,\Omega} \le C(r,\epsilon)\, p^{-(r-1)+\epsilon} \qquad (9)$$

donde p = K = orden del polinomio completo de aproximación de la función y $\epsilon > 0$ es arbitrario, aunque de acuerdo con los últimos resultados de Babuska y Suri [9], puede suprimirse.

Sin embargo este teorema de acotación global es válido solo para dominios suficientemente regulares, ya que en presencia de singularidades se tiene que:

$$|u-u_p|_{1,\Omega} \le C(r)\, p^{-2(r-1)} \qquad (10)$$

Es interesante conocer una estimación global del error a priori del M.E.F. para las versiones h y p combinadas.

Esta estimación h-p del error ha sido obtenida por Babuska y Dorr [4] y posteriormente afinada por Babuska y Suri [9].

$$|u-u_n|_1 \le C h^{\min(k,r-1)}\, p^{-\alpha(r-1)} \qquad (11)$$

n = h ó p y K = p.

α = 1 para dominios suficientemente regulares.

α = 2 en presencia de singularidades.

como vemos la acotación del error en la norma de la energía se produce en función de p y h, que muestra que el método converge cuando $h \to 0$ ó $p \to \infty$.

Entre los temas que permanecen abiertos en estas acotaciones del error a priori pueden citarse los siguientes casos:

- Mallados no uniformes (elementos h y/o p-adaptativos).
- Mallados con diferentes elementos finitos.
- Cálculo de la constante C para eliminar la desigualdad de las acotaciones, o por lo menos para poner C en función del tipo de elemento finito utilizado, y de la norma empleada en dicha acotación.
- Acotación del error en el caso de emplear elementos singulares.

Es en esta última línea en la que estamos trabajando en la actualidad.

La mayor utilidad de conocer el exponente de la singularidad es la posibilidad de utilizarlo para la generación de los elementos singulares apropiados a cada tipo de singularidad [10-14]. Sin embargo también se pueden utilizar los resultados de regularidad y acotación del error para tratar de evitar o suavizar las singularidades, todo ello es particularmente importante en el caso de la fabricación (y superficies de terminación) de materiales compuestos.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] Babuska, I. (1970) "Finite Element Methods for Domains with Corners", Computing, 6, 264-273.

[2] Babuska, I. (1977) "The Self-Adaptative Approach in the Finite Element Method". J. Whiteman. ed. Mathematics of Finite Elements with Applications: MAFELAP 1975, Academic Press. New York.

[3] Babuska, I., y Rosenweig, M.B. (1972)"A Finite Element Scheme for Domains with Corners", Numer. Math. 20, 1-21.

[4] Babuska I, y Dorr, M. (1981) "Error Estimates for the Combined h and p versions of Finite Element Method", Numer. Math., 25, 257-277.

[5] Raviart, P.A., y Thomas, J.M. (1983) "Introduction a l'analyse numerique des équations aux dérivées partielles". Ed. Masson.

[6] Grisvard, P. (1984) "Probleme aux limites dans les polygones. Mode d'emploi". IMSP. Université de Nice.

[7] Leguillón, D. y Sanchez Palencia, E. (1987) "Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity", John Wiley/Masson, Paris.

[8] Babuska, I. Szabo, B.A. y Katz, I.N. (1981) "The p-version of the finite element method". Report WU/CCM - 79/1, Center for Computational Mechanics, Washingnton University, SINUM.

[9] Babuska,I. y Suri, M. (1987) "The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method". SIAM J. Numer. Anal. Vol. 24, nº4, 751-776.

[10] Gavete, L., Michavila, F. y Díez, F. (1989) "A new singular finite element in linear elasticity". Computational Mechanics 4.

[11] Gavete, L., Michavila, F., Diez, F. y Whiteman,J.R. (1988) "Generalization of the mapping technique of Aalto for producing finite elements with singularities". University of Brunel, BICOM, The Mathematics of Finite Elements and Applications. VI MAFELAP, Academic Press, 541-553.

[12] Michavila, F. y Gavete, L. (1986) "Some results in two and three dimensional singular finite elements with applications to fracture mechanics". Fourth International Symposium on Numerical Methods in Engineering. Innovative Numerical Methods in Engineering. 411-417 Atlanta (Georgia).

[13] Michavila, F., Gavete, L. y Diez, F. (1988) "Two Different Approachs for the Treatment of Boundary Singularities, Numerical Methods for Partial Differential Equations", 4, 255-282.

[14] Gavete, L., de las Heras, F. y Michavila, F. (1988) "Study of Singularities in Geotechnical Problems". Ed. Asociación de Ingenieros de Minas, Proceedings of the VIII Congreso Internacional de Minería y Metalurgia, Vol. 7, 733-747, Oviedo, Spain.