

ANALISIS DINAMICO DE CUERPOS AXISIMETRICOS ENTALLADOS SOMETIDOS A TORSION

Marcos, R., Martínez-Esnaola, J.M. y Bastero, J.M.

Centro de Estudios e Investigaciones Técnicas de Guipúzcoa (CEIT), Apartado 1555, 20080 San Sebastián.

Resumen.- Se ha resuelto el problema de torsión en cuerpos axisimétricos con entallas angulares, tanto en régimen estático como dinámico. Los campos singulares se obtienen formulando el problema en términos de desplazamientos y comparando las ecuaciones resultantes con las correspondientes al caso de deformación antiplana. Estos resultados se utilizan para desarrollar dos técnicas numéricas basadas en el M.E.F. : un elemento finito especial y una integral independiente del contorno.

Abstract.- The problem of axisymmetric bodies with angular notches subjected to torsion in static and dynamic elasticity is solved. The singular fields are obtained formulating the problem in terms of displacements and then comparing the resulting equations with those corresponding to antiplane deformation. These results are used to develop two different numerical techniques based on the Finite Element Method, namely, a special finite element and a path-independent integral.

1. INTRODUCCION

El análisis de singularidades elásticas originadas por entallas o entrantes angulares ha sido objeto de considerable atención en la Teoría de la Elasticidad [1-4], especialmente para problemas de grietas en estructuras planas. El problema general de entallas con ángulos de apertura no nulos ha sido menos estudiado, y las soluciones analíticas disponibles tienen restringida su aplicabilidad a medios infinitos o semi-infinitos y condiciones de carga muy sencillas.

En esta comunicación, se considera el problema de torsión en cuerpos axisimétricos entallados. En primer lugar, se obtiene la forma de los campos elásticos singulares en las proximidades de la punta de la entalla por comparación con los resultados conocidos para el modo de deformación antiplana. Esta solución analítica se utiliza a continuación como fundamento de dos técnicas numéricas

basadas en el M.E.F. La primera consiste en la definición de un elemento especial con formulación global-local que incorpora la solución teórica al análisis de la zona singular. El segundo método consiste en la formulación de una integral invariante con la ayuda de campos auxiliares de tensiones y desplazamientos.

2. ANALISIS TEORICO

En coordenadas cilíndricas, en ausencia de fuerzas de volumen, el equilibrio estático de un cuerpo con simetría de revolución bajo cargas de torsión se puede expresar mediante la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

Teniendo en cuenta las relaciones elásticas $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$, la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{2}{r} \epsilon_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

que puede expresarse en términos del único desplazamiento $u_\theta(r,z)$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \quad (3)$$

Considérese el sistema de coordenadas local con origen en la punta de la entalla (x,t,y), que se muestra en la Fig. 1.

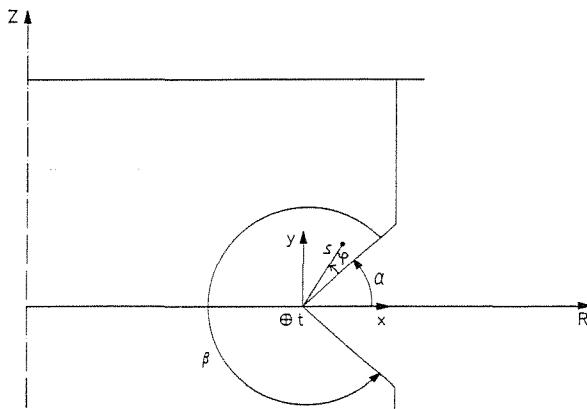


Fig. 1 Coordenadas generales y locales con origen en la punta de la entalla.

En este sistema de coordenadas, el equilibrio se expresa

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2} + \frac{1}{x+a} \frac{\partial u_t}{\partial x} - \frac{u_t}{(x+a)^2} = 0 \quad (4)$$

y utilizando coordenadas polares (s, phi) con origen en la punta de la entalla

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_t}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a+s \cos(\alpha+\phi)} \left[\frac{\partial u_t}{\partial s} \cos(\alpha+\phi) - \frac{\partial u_t}{\partial \phi} \frac{\sin(\alpha+\phi)}{s} \right] - \frac{u_t}{[s \cos(\alpha+\phi) + a]^2} = 0 \quad (5)$$

El objetivo del análisis es la obtención de las expresiones de los campos en la zona singular, es decir, para $s/a \ll 1$. Por tanto, en esta región, la ecuación (5) queda reducida a

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_t}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a} \left[\frac{\partial u_t}{\partial s} \cos(\alpha+\phi) - \frac{\partial u_t}{\partial \phi} \frac{\sin(\alpha+\phi)}{s} \right] - \frac{u_t}{a^2} = 0 \quad (6)$$

Considerese ahora la expresión del equilibrio en función de los desplazamientos en el caso antiplano

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 u_z = 0 \quad (7)$$

Examinando las expresiones (6) y (7) se observa que difieren únicamente en los dos últimos términos de (6). Sin embargo, en la zona singular, la expresión (6) puede reducirse de forma que es posible identificar los desplazamientos, u_t y u_z , de ambos problemas, y en consecuencia, utilizar la forma conocida de la solución $u_t = s^\gamma G(\phi)$.

En el sistema de ejes general (r, theta, z) existen únicamente dos tensiones $\sigma_{r\theta}$ y $\sigma_{z\theta}$ que se pueden expresar en función del desplazamiento en la forma

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

de donde es sencillo obtener el estado tensional en el sistema local (s, phi, t)

$$\sigma_{st} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{t}{s} \frac{u}{\cos(\alpha+\phi)} + \frac{t}{a} \cos(\alpha+\phi) \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{\phi t} = \mu \left[\frac{1}{s} \frac{\partial u_t}{\partial \phi} + \frac{u_z}{s \cos(\alpha+\phi) + a} \sin(\alpha+\phi) \right]$$

En la zona singular se verifica $s/a \ll 1$ con lo que las tensiones (9) se reducen a

$$\sigma_{st} = \mu \left[\frac{\partial u_t}{\partial s} - \frac{u_t}{a} \cos(\alpha+\phi) \right] \quad (10)$$

$$\sigma_{\phi t} = \mu \left[\frac{1}{s} \frac{\partial u_t}{\partial \phi} + \frac{u_t}{a} \sin(\alpha+\phi) \right]$$

Teniendo en cuenta la forma del desplazamiento $u_t = s^\gamma G(\phi)$, y volviendo a aplicar la condición $s/a \ll 1$, se obtiene

$$\sigma_{st} = \mu s^{\gamma-1} \gamma G(\phi) \quad (11)$$

$$\sigma_{\phi t} = \mu s^{\gamma-1} G'(\phi)$$

Aplicando la condición de contorno de labios descargados, expresada por

$$\sigma_{\phi t}(s, 0) = \sigma_{\phi t}(s, \beta) = 0 \quad (12)$$

se obtiene la ecuación característica que define la singularidad

$$\gamma = \frac{n\pi}{\beta} \tag{13}$$

que coincide con la obtenida para el caso de deformación antiplana [5], lo que indica que ambos problemas presentan idéntica singularidad en las cercanías de la punta de la entalla. La forma final del desplazamiento es por tanto

$$u = \frac{T}{t} \frac{\lambda}{\mu} s \cos(\lambda\varphi) \tag{14}$$

donde T es un parámetro que depende de las condiciones de contorno, geometría y cargas de la estructura.

En el caso particular de fractura la formulación no sufre ninguna alteración y el parámetro T se relaciona directamente con K_{III} .

3. PROBLEMA DINAMICO

En el caso de torsión, el problema dinámico se resuelve de forma similar a los casos planos, es decir, los campos singulares mantienen su forma variando únicamente el valor del parámetro con el tiempo. Puede observarse que la singularidad del primer miembro de la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \ddot{u}_\theta \tag{15}$$

no se ve alterada por el segundo miembro, ya que la aceleración en problemas dinámicos tendrá la forma

$$\ddot{u} = \frac{T}{t} \frac{\lambda}{\mu} s \cos(\lambda\varphi) \tag{16}$$

que no es singular. En consecuencia el problema dinámico consistirá únicamente en la determinación de la variación en el tiempo del parámetro T.

4. TECNICAS NUMERICAS

La primera técnica desarrollada consiste en el empleo de elementos finitos especiales con formulación global-local. La interpolación en estos elementos responde a la expresión

$$u_\theta = N_j d_\theta^j + T (F_j - N_j \bar{F}_j) \tag{17}$$

donde N_j son las funciones de forma, d_θ^j los desplazamientos nodales y F_j los valores de F en los nudos, siendo

$$F = \frac{r^\lambda}{\mu} \cos \lambda\varphi \tag{18}$$

Para asegurar la compatibilidad de desplazamientos se definen unos elementos de transición mediante el empleo de funciones de ajuste adecuadas.

La integración numérica para la evaluación de las matrices correspondientes a los elementos especiales y de transición se ha efectuado con especial cuidado, empleándose órdenes de integración muy altos, en concreto, cuadraturas de Gauss de 10x10 puntos.

La segunda técnica se basa en el desarrollo de una integral independiente del contorno. El problema de torsión en coordenadas cilíndricas es independiente de la coordenada θ , por lo que no es necesario considerar el cilindro completo. En el análisis que sigue, se utilizará únicamente la porción comprendida entre $\theta=0$ y $\theta=1$, según indica la Fig. 2.

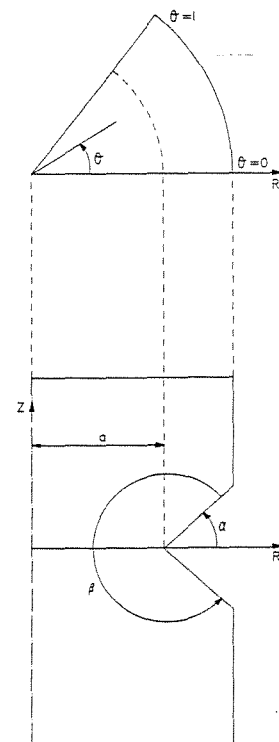


Fig.2 Región considerada para la definición de la integral invariante.

Dentro del sector indicado en la Fig.2 se define una región toroidal que constituirá el dominio de las expresiones integrales. La región definida es de revolución y su sección para $\theta=cte.$ se muestra en la Fig.3.

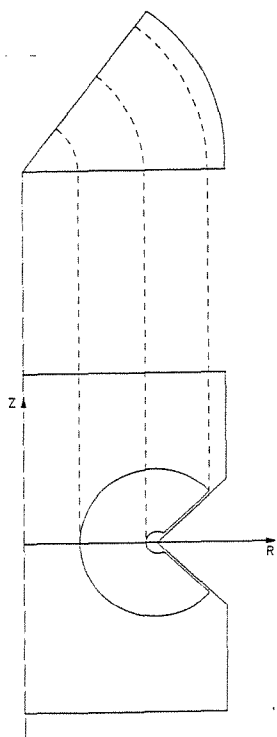


Fig.3 Dominio de las expresiones integrales.

Considérese la siguiente integral

$$I = \int_{\partial V} (\sigma_{ij} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} u_i) n_j dS \quad (19)$$

definida sobre el toroide de la Fig. 3, donde n_j es el vector normal exterior a ∂V y $\tilde{\sigma}_{ij}$ y \tilde{u}_i son campos auxiliares de tensiones y desplazamientos que deben cumplir las condiciones siguientes

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \tilde{u}_{r,r} + \mu (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad (20)$$

Nótese que sólo es necesario evaluar la integral I en la superficie lateral, ya que en las bases, $\theta = cte.$, sólo se tiene $\sigma_{\theta\theta}$ y se anula el integrando. Aplicando el teorema de Gauss a la expresión (21) se obtiene

$$I = \int_V (\sigma_{ij,j} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij,j} u_i) dV \quad (21)$$

El problema que se está considerando es independiente de θ y la región sobre la que se aplica la integral es axisimétrica. Por ello se puede expresar (21) como

$$I = \int_0^1 d\theta \int_{\Sigma} (\sigma_{ij,j} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij,j} u_i) r dS \quad (22)$$

Como el integrando de (22) es independiente de θ , la expresión anterior se reduce a

$$I = \int_{\Sigma} (\sigma_{ij,j} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij,j} u_i) r dS \quad (23)$$

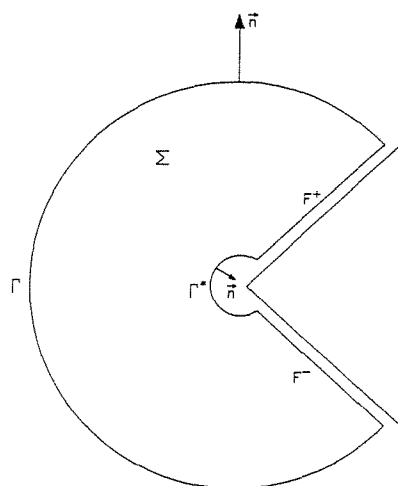


Fig. 4 Geometría de los dominios de integración.

donde Σ es la región plana definida en la Fig. 3 dentro del plano $\theta = cte.$

Análogamente la expresión de partida, (19), puede escribirse en la forma

$$I = \int_C (\sigma_{ij} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} u_i) n_j r dl \quad (24)$$

donde C es la curva cerrada que delimita Σ , tal y como muestra la Fig. 4.

Para evaluar esta integral de línea, se calcularán de forma independiente las integrales a lo largo de los tres tramos definidos dentro de C (ver Fig. 4).

4.1 Integral en la zona singular

La integral a lo largo de Γ^* puede escribirse de la forma

$$I_{\Gamma^*} = - \int_0^{\beta} [(\sigma_{r\theta} \tilde{u}_\theta - \tilde{\sigma}_{r\theta} u_\theta) n_r + (\sigma_{r\theta} \tilde{u}_\theta - \tilde{\sigma}_{z\theta} u_\theta) n_z] r dl \quad (25)$$

Eligiendo como campos auxiliares la solución correspondiente al autovalor $-\gamma$, y tomando como Γ^* un arco de circunferencia la integral (25) está acotada y se puede calcular analíticamente, obteniéndose

$$I_{\Gamma^*} = \frac{T\pi}{\mu} a \quad (26)$$

4.2 Integral en los labios.

La expresión (24) puede escribirse como

$$I_{lab} = \int_{lab} (T_i \tilde{u}_i - \tilde{T}_i u_i) r dl \quad (27)$$

Esta expresión puede simplificarse notablemente en la zona de los labios. Es importante considerar estas simplificaciones, ya

que la evaluación directa de (27) origina numerosos problemas numéricos.

Así, en los labios, el vector tensión se anula, por ser éste un requisito que se establece como condición de contorno al imponer los labios descargados. Sin embargo, no ocurre lo mismo en los campos auxiliares. Estos no cumplen la ecuación de equilibrio, por lo cual no tienen porqué anularse en los labios.

Teniendo en cuenta la forma particular de los campos auxiliares seleccionados, se obtiene, tras algunos desarrollos matemáticos [6], la siguiente expresión

$$I_{lab} = \mu \int_{lab} \tilde{u}_\theta u_\theta dy \quad (28)$$

La forma de calcular (28) es la siguiente. Por un lado el desplazamiento auxiliar se conoce en todos los puntos de la estructura, pues se conoce su expresión analítica. El desplazamiento real, en cambio, ha de ser calculado previamente mediante un análisis numérico a través del M.E.F. Una vez disponibles los valores del integrando se efectúa una integración numérica de línea a lo largo de los labios de la entalla.

4.3 Integral en Γ

El cálculo de esta integral se efectúa de forma numérica a partir de un análisis previo de la estructura mediante el M.E.F. que suministra los valores de tensiones y desplazamientos en los puntos de integración.

La expresión (24) se reduce, en el problema de torsión, a

$$I_\Gamma = \int_\Gamma (\sigma_{r\theta} \tilde{u}_\theta n_x + \sigma_{\theta z} \tilde{u}_\theta n_z - \tilde{\sigma}_{r\theta} u_\theta n_x - \tilde{\sigma}_{z\theta} u_\theta n_z) r dl \quad (29)$$

4.4 Cálculo de la integral de superficie.

La integral (23) se puede expresar también de la forma

$$I_\Sigma = \int_\Sigma \rho \dot{u}_\theta \tilde{u}_\theta r dS - \int_\Sigma \tilde{\sigma}_{ij,j} u_i r dS \quad (30)$$

y teniendo en cuenta la forma de los campos singulares, se obtiene

$$I_\Sigma = \int_\Sigma \rho \dot{u}_\theta \tilde{u}_\theta r dS - \mu \int_\Sigma \left[\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial s} \cos(\alpha+\varphi) - \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} \sin(\alpha+\varphi) - \frac{\tilde{u}_\theta}{r} \right] u_\theta dS \quad (31)$$

que es la expresión final utilizada para la evaluación numérica, ya que se conoce la forma de los desplazamientos auxiliares y los campos reales pueden calcularse mediante técnicas "standard" de elementos finitos.

La evaluación de las diferentes integrales permite calcular finalmente el valor del parámetro T que intensifica los campos elásticos singulares.

$$\frac{T\pi}{\mu} a = \int_\Sigma - \int_\Gamma - \int_{lab} \quad (32)$$

De esta forma, el parámetro T puede obtenerse mediante un post-proceso de un análisis numérico previo de la estructura.

5. RESULTADOS

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al aplicar las dos técnicas numéricas previamente expuestas a tres geometrías planas diferentes sometidas a carga antiplana. Las tres geometrías analizadas son:

- Cilindro con entalla de 60° cargado mediante torsión en la bases.
- Cilindro con entalla de 90°, al que se le aplica un momento torsor en las bases.
- Cilindro con grieta plana idéntica a la analizada por Chen y Wang [7].

Los resultados obtenidos mediante ambas técnicas son muy similares. En el caso de la integral invariante A, la selección de diferentes contornos de integración, alejados de la zona singular, ha permitido comprobar numéricamente la invarianza de la expresión integral presentada.

El primer caso analizado corresponde a una entalla de 60°, cuya geometría se muestra en la Fig. 5. Las propiedades del material son: $\rho = 2450 \text{ Kg/m}^3$, $\mu = 2.94 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ y la estructura se carga con un momento torsor que responde, en el caso dinámico, a una función escalón de Heaviside. El análisis se ha llevado hasta $t = 250 \mu\text{s}$.

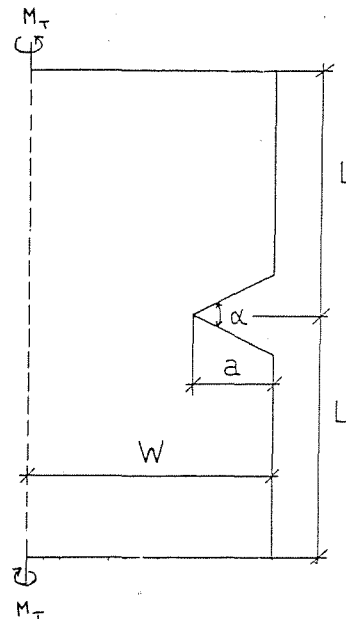


Fig. 5 Geometría de entalla de 60°.

En la Fig. 6 se representan los valores obtenidos en el análisis del caso de entalla simétrica de 60° , tanto con elementos especiales como con integrales invariantes. Se ha verificado la independencia de la integral respecto del contorno con variaciones en torno al 1%. Se observa que se alcanza un máximo en $t \approx 95 \mu s$ superándose en más del doble el valor estático. Al valor estático se llega previamente en $t \approx 50 \mu s$.

Por último hay que señalar que los resultados obtenidos mediante las dos técnicas concuerdan muy satisfactoriamente, según se desprende de la comparación de las dos curvas representadas en la Fig. 6.

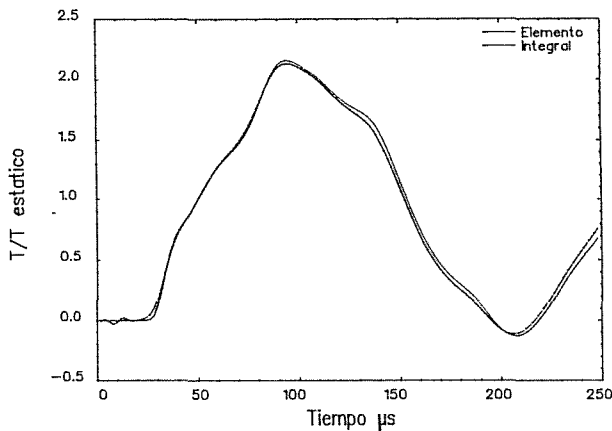


Fig. 6 Variación de T con el tiempo en entalla simétrica de 60° .

El segundo ejemplo corresponde a una entalla con una apertura de 90° . La geometría y dimensiones responden a la Fig. 5. El material y la forma de aplicación de la carga coinciden con los del ejemplo anterior. Los resultados del análisis se representan en la Fig. 7, donde se incluye el análisis efectuado con elementos especiales. Se observa una similitud en los resultados respecto a la entalla de 60° . Por último, cabe señalar que el valor estático se alcanza en $t = 53 \mu s$ y el máximo en $t = 89 \mu s$.

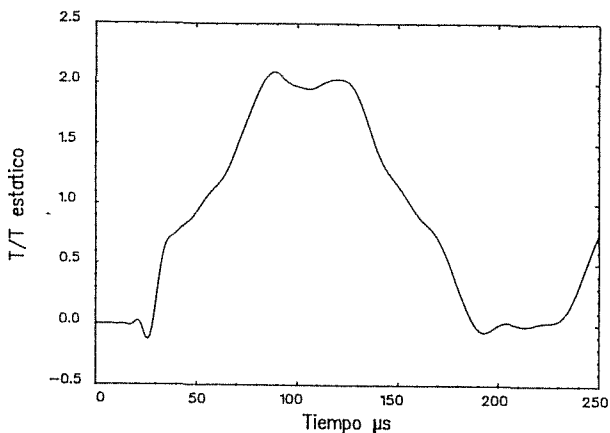


Fig. 7 Variación con el tiempo de T en entalla simétrica de 90° .

El último ejemplo considerado consiste en la estructura de la Fig. 8 que coincide con uno de los casos analizados por Chen y Wang [7].

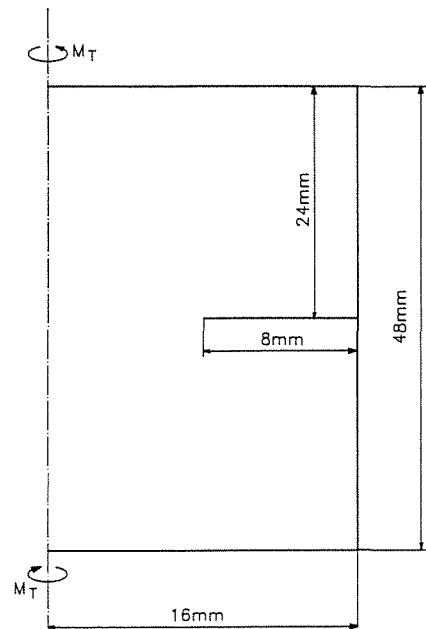


Fig. 8 Geometría de grieta simétrica bajo carga de torsión.

Debido a la simetría sólo se discretiza un cuarto de la estructura. Se han empleado 96 elementos cuadriláteros de ocho nudos cada uno, con un total de 330 grados de libertad (uno por nudo más el correspondiente al parámetro anodal). Las propiedades del material son: $\rho = 7829 \text{ Kg/m}^3$, $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $\nu = 0.3$; y la carga se aplica mediante un momento torsor en las caras superior e inferior según muestra la Fig 8. En los análisis dinámicos el momento responde a una función escalón de Heaviside.

El análisis se ha llevado desde $t= 0$ hasta $t= 125 \mu s$ para poder comparar con los trabajos de la bibliografía que consideran la misma geometría [7].

En la Fig. 9 se muestra la variación de K_{III} con el tiempo. Las curvas corresponden a las dos técnicas ya descritas. A efectos de comparación se presentan también los resultados obtenidos por Chen y Wang [7] en la Fig. 10. La independencia de las integrales respecto del contorno de integración se ha comprobado numéricamente, obteniéndose diferencias siempre inferiores al 1% entre los diferentes contornos.

De la evolución de K_{III} cabe destacar que, tras un lapso de tiempo hasta que las ondas de tensiones llegan a la punta de la grieta, el parámetro empieza a crecer alcanzando el valor estático en $t \approx 14 \mu s$ y un máximo en $t \approx 29 \mu s$ que supera el doble del valor estático.

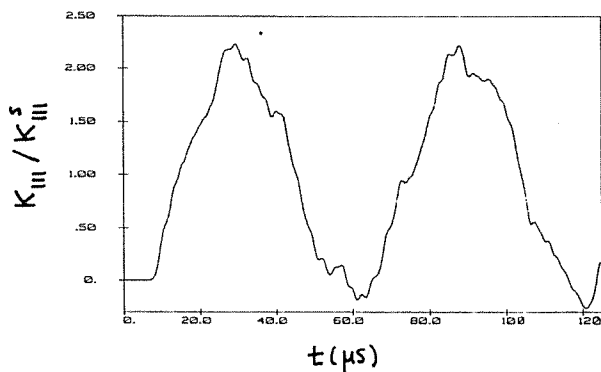


Fig. 9 Variación de K_{III} con el tiempo.

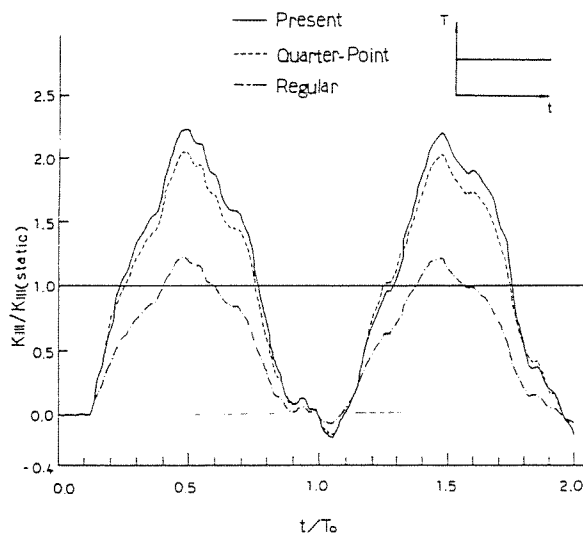


Fig. 10 Variación de K_{III} con el tiempo según Chen.

6 CONCLUSIONES

Se ha determinado la forma de los campos singulares característicos de entallas sometidas a torsión en régimen elástico. Estos campos se han utilizado para desarrollar dos técnicas numéricas basadas en el M.E.F. que permiten evaluar un parámetro que normaliza el estado singular de deformación del material. La primera consiste en la definición de un elemento finito especial con formulación global-local que incorpora la forma exacta de los campos singulares a la interpolación de los desplazamientos, de manera que el parámetro normalizador se obtiene directamente de la resolución del sistema de ecuaciones. El segundo método está basado en el desarrollo de una integral independiente del contorno, definida con la ayuda de unos campos auxiliares adecuados. Esta técnica puede utilizarse como un post-proceso de los resultados obtenidos en un análisis "standard" de elementos finitos.

Ambas técnicas se han comparado entre sí en problemas dinámicos, obteniéndose una excelente concordancia en los resultados. El problema de grietas sometidas a torsión se ha tratado como un caso particular de la formulación general, comparando los resultados con los disponibles en la bibliografía.

7. REFERENCIAS

- [1] Cherepanov, G.P., (1979), "Mechanics of Brittle Fracture", McGraw-Hill.
- [2] Muskhelishvili, N.I., (1977), "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff Int. Pub.
- [3] Williams. M.L., (1952), "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", J. Appl. Mech., 19, 526-528.
- [4] Atkinson C., Bastero J.M. y Martínez-Esnaola J.M., (1988), "Stress Analysis in Sharp Angular Notches using Auxiliary Fields", Engng Fract. Mech., 31, 637-646.
- [5] Marcos R., Martínez-Esnaola J.M. y Bastero J.M., (1989), "Análisis de Singularidades Elásticas en Entallas Angulares Bajo Carga Antiplana", VI Encuentro del Grupo Español de Fractura.
- [6] Marcos R., (1990), "Estudio Dinámico de Singularidades Elásticas Producidas por Entallas en Estructuras Planas y Axisimétricas", Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián, Universidad de Navarra.
- [7] Chen W. and Wang H., (1986), "Finite Element Analysis of a Axisymmetric Solid Subjected to Torsional Loadings", Engng.Fract. Mech., 23, 705-717, 1986.