

INESTABILIDAD PLASTICA Y RESISTENCIA A TRACCION DE BARRAS CILINDRICAS ENTALLADAS

A. VALIENTE

Departamento de Ciencia de Materiales
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.— En este trabajo se aborda el problema de determinar la evolución del radio de curvatura de una entalla con simetría de revolución en una barra cilíndrica de material elastoplástico sometida a tracción. La solución obtenida se basa en los campos de tensiones y deformaciones deducidos por Bridgman y los complementa, permitiendo predecir la capacidad resistente de una barra cilíndrica entallada y sometida a tracción. Asimismo, proporciona un método para obtener curvas tensión-deformación mediante probetas entalladas hasta niveles de deformación muy superiores a los que se consiguen en un ensayo de tracción simple. Estos resultados teóricos son contrastados satisfactoriamente con datos experimentales.

Abstract.— This work deals with the problem to determine the evolution of the radius of curvature at the root of a axisymmetric notch in a cylindrical bar of elastoplastic material subjected to axial tension. The solution found applies if the stress and strain fields in the notch are well described by the Bridgman's solution. Combining both solutions, the maximum load achievable in a axisymmetric notched bar is predicted. Also, a method is proposed to obtain experimentally stress-strain curves up to high strain levels from notched specimens. These theoretical results are successfully checked with experimental data.

1. Introducción.

La barra cilíndrica de tracción debilitada mediante una entalla de revolución es una configuración geométrica que se emplea cada vez más para caracterizar la resistencia a la rotura de los materiales dúctiles, y que incluso encuentra aplicación en el diseño de elementos estructurales.

Las teorías de rotura dúctil, tanto las que se basan en modelos de formación, crecimiento y coalescencia de huecos [1,2], como las fenomenológicas que postulan condiciones locales de rotura [3], conducen a criterios de fractura que involucran altos niveles de deformación y estados tensionales de fuerte triaxialidad.

La caracterización de estos criterios, ya sea con fines de diseño estructural o para evaluar la resistencia a la rotura dúctil, requiere ensayos en los cuales sea posible controlar la triaxialidad del estado tensional y generar y medir deformaciones hasta del 100 %. Es precisamente en este ámbito donde se está extendiendo el uso de barras cilíndricas entalladas [4,5,6], porque en una barra de estas características sometida a tracción, la entalla origina campos de tensión triaxial y campos de deformación no homogéneos que precisan el desarrollo de grandes deformaciones plásticas.

La limitación principal en el uso de probetas cilíndricas entalladas para ensayos de rotura es la falta de soluciones analíticas que determinen los campos de tensiones y deformaciones en función de las magnitudes medidas en los ensayos. La solución que habitualmente se emplea es la obtenida por Bridgman [7] para el cuello de estricción de una barra sometida a tracción simple, pero esta solución depende del radio de curvatura del perfil de estricción, y en el caso de una entalla en una barra de material dúctil, dicho radio varía al someter la barra a tracción, especialmente cuando se alcanza el régimen de grandes deformaciones en la entalla y se supera la carga de inestabilidad plástica.

En este trabajo se completa la solución de Bridgman. Sin añadir ninguna hipótesis, se establece y se resuelve la ecuación que determina la evolución del radio de curvatura de la entalla durante el proceso de carga. A partir de la solución del radio de curvatura se obtienen otros resultados de interés, como la predicción de la carga de inestabilidad plástica de una barra cilíndrica entallada y la determinación de la curva tensión-deformación de un material dúctil mediante probetas entalladas, hasta valores de la deformación considerablemente más altos que los que se alcanzan en un ensayo de tracción simple. Estos resultados han sido satisfactoriamente contrastados con datos experimentales.

2. Solución de Bridgman.

Bridgman estudió el estado tensional en el cuello de estricción de una barra cilíndrica sometida a tracción y determinó los campos de tensiones y deformaciones en el plano transversal de simetría de la barra deformada [7]. Su solución, referida al caso de una entalla con simetría de revolución, se obtiene aplicando las ecuaciones de la plasticidad de Levy-Mises, con el criterio de plastificación de Von Mises, y asumiendo las dos hipótesis siguientes (figura 1):

- En la sección de mínimo diámetro (sección de entalla) la velocidad de deformación longitudinal según la dirección del eje de la barra es uniforme.
- Las superficies isostáticas más próximas al plano de simetría transversal de la entalla, pertenecientes a la misma familia que éste, son esferas.

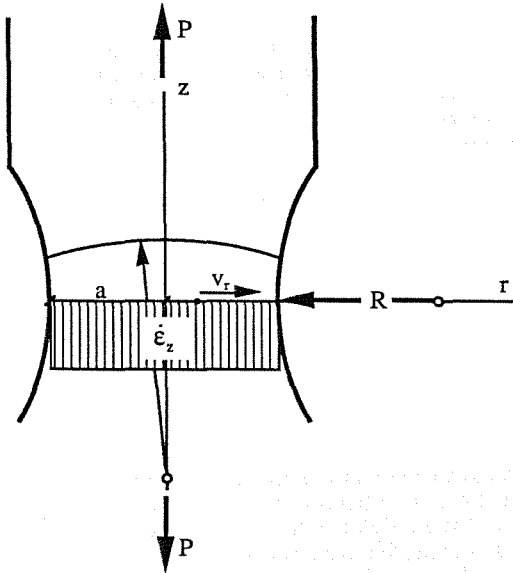


Figura 1.- Perfil de la entalla e hipótesis de Bridgman.

La condición de incompresibilidad, implícita en las ecuaciones de Levy-Mises:

$$0 = \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} + \dot{\epsilon}_z \quad (2.1)$$

y la hipótesis primera:

$$\dot{\epsilon}_z = \text{cte} \quad (2.2)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$v_r(0) = 0 \quad v_r(a) = \dot{a} \quad (2.3)$$

permiten obtener los campos de velocidades y de velocidades de deformación en la sección de entalla:

$$v_r = \dot{a} \frac{a}{r} \quad (2.4)$$

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.5)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -2\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.6)$$

La deformación y la tensión equivalentes son también uniformes en dicha sección. En efecto, debido a la doble simetría existente, las direcciones radial, longitudinal y anular de la barra son direcciones principales en todos los puntos de la sección, y por tanto se verifica:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{9} [(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta)^2]} \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2]} \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.5) y (2.6) en (2.7) se tiene:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = 2 \left| \frac{\dot{a}}{a} \right| = -2 \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.9)$$

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^{\dot{a}} \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = -2 \int_{a_0}^a \frac{da}{a} = 2 \ln \frac{a_0}{a} = \text{cte} \quad (2.10)$$

donde a_0 es el radio inicial de la sección de entalla.

La tensión equivalente está biunívocamente relacionada con la deformación equivalente a través de la curva tensión-deformación y en consecuencia:

$$\bar{\sigma} = F(\bar{\epsilon}^p) = \text{cte} \quad (2.11)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las ecuaciones de Levy-Mises, la igualdad de deformaciones (2.5) implica la igualdad de tensiones:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (2.12)$$

y de acuerdo con (2.8):

$$\bar{\sigma} = \sigma_z - \sigma_r = \text{cte} \quad (2.13)$$

Estos resultados y la segunda hipótesis formulada permiten calcular las tensiones en la sección de entalla integrando a lo largo de una recta radial la ecuación de equilibrio correspondiente, expresada en términos de las tensiones principales:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\rho} = 0 \quad (2.14)$$

donde ρ es el radio de curvatura de las curvas isostáticas normales a la sección. A partir de la hipótesis segunda es posible obtener una expresión de ρ en función del radio de curvatura de la entalla, R (figura 1):

$$\rho = \frac{2aR + a^2 - r^2}{2r} \quad (2.15)$$

Teniendo en cuenta (2.13) y (2.15), el resultado de integrar la ecuación (2.14) con la condición de contorno:

$$\sigma_r(a) = 0 \quad (2.16)$$

es el siguiente:

$$\sigma_r = \bar{\sigma} \ln \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \quad (2.17)$$

Las dos tensiones restantes se determinan a partir de (2.12) y (2.13):

$$\sigma_\theta = \bar{\sigma} \ln \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \quad (2.18)$$

$$\sigma_z = \bar{\sigma} \left(1 + \ln \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \right) \quad (2.19)$$

Esta última ecuación, con ayuda de (2.10) y (2.11), permite obtener la carga de tracción que soporta la barra:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^r 2\pi r \sigma_z dr = \\ &= \pi \bar{\sigma} a^2 \left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \right) = \\ &= \pi a^2 F \left(2 \ln \frac{a_0}{a} \right) \left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \right) \quad (2.20) \end{aligned}$$

Así pues, la solución de Bridgman proporciona los campos de tensiones y deformaciones en la sección de entalla y la carga de tracción de la barra en función de dos variables geométricas. Este resultado es insuficiente para predecir la capacidad resistente de la barra, ya se agote por inestabilidad plástica o por rotura dúctil. Sólo conociendo la relación de dependencia mutua entre las dos variables durante el proceso de deformación es posible predecir la carga de agotamiento.

3. Evolución del radio de curvatura de la entalla.

La ecuación (3.1), deducida en el apéndice A, expresa la derivada temporal de la curvatura de una línea material en función de las componentes locales del campo de velocidades de deformación y del rotacional del campo de velocidades:

$$\dot{c} = -c \dot{\epsilon}_t - \frac{1}{2} \tau \dot{\gamma}_{\theta z} + \frac{1}{2} \frac{d\dot{\gamma}_{\theta z}}{ds} + \frac{d\bar{\omega}}{ds} \cdot \bar{b} \quad (3.1)$$

En un problema con simetría de revolución, una curva material, inicialmente coplanaria con el eje de revolución, permanece en el mismo plano a lo largo del proceso de deformación, y por tanto:

$$\tau = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{b} = -\bar{e}_\theta \quad (3.3)$$

Por otra parte, también debido a la simetría de revolución, se tiene:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \bar{e}_\theta = \omega \bar{e}_\theta \quad (3.4)$$

y en consecuencia:

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds} \cdot \bar{b} = \frac{d(\omega \bar{e}_\theta)}{ds} \cdot (-\bar{e}_\theta) = -\frac{d\omega}{ds} = -\nabla \omega \cdot \bar{t} \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.2), (3.3) y (3.5) en (3.1) resulta:

$$\dot{c} = -c \dot{\epsilon}_t + \frac{1}{2} \frac{d\dot{\gamma}_{\theta z}}{ds} - \nabla \omega \cdot \bar{t} \quad (3.6)$$

La curva que define el perfil de la entalla (figura 2) es una línea material que cumple las condiciones anteriores y que además forma parte de una superficie del sólido libre de tensiones, con lo cual:

$$\tau_{in} = 0 \quad (3.7)$$

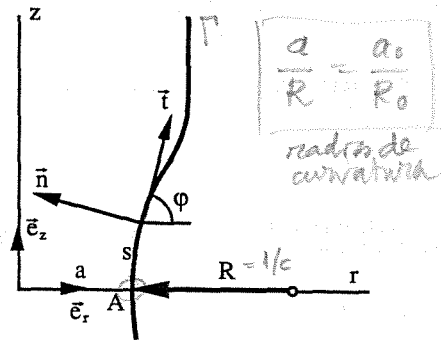


Figura 2.—Elementos geométricos y sistema de referencia de la curva del perfil de entalla.

y de acuerdo con las ecuaciones de Prandtl-Reuss para un sólido elastoplástico:

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = 3\tau_{\theta z} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} + \frac{\dot{\tau}_{\theta z}}{G} = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{\gamma}_{\theta z}}{ds} = 0 \quad (3.8)$$

Por tanto, la ecuación (3.6) aplicada a dicha curva, se reduce a:

$$\dot{c} = -c \dot{\epsilon}_t - \nabla \omega \cdot \bar{t} \quad (3.9)$$

A partir de la expresión de ω dada por (3.4) y de las igualdades que relacionan las componentes de los campos de velocidades y de velocidades de deformación en coordenadas cilíndricas, se obtiene fácilmente la siguiente expresión de $\nabla \omega$:

$$\nabla \omega = \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_r}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}_{\theta z}}{\partial r} \right) \bar{e}_r + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\epsilon}_z}{\partial r} \right) \bar{e}_z \quad (3.10)$$

En el punto de intersección de la entalla con el plano de mínima sección (punto A de la figura 2), se verifica:

$$\bar{t} = \bar{e}_z \quad \dot{\epsilon}_t = \dot{\epsilon}_z \quad (3.11)$$

y por tanto, la ecuación (3.9) particularizada en el punto A con la expresión de $\nabla \omega$ dada por (3.10), resulta:

$$\dot{c} = -c \dot{\epsilon}_z + \frac{\partial \dot{\epsilon}_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}_{\theta z}}{\partial z} \quad (3.12)$$

Esta ecuación hace posible determinar la curvatura del fondo de la entalla a partir del campo de velocidades de deformación en la sección de entalla, siempre que el último sumando del segundo miembro pueda ser expresado en función de las componentes de dicho campo. Para ello basta tener en cuenta, de acuerdo con (3.8), que la normal y la tangente al perfil de entalla son direcciones principales de velocidad de deformación, y por tanto:

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = (\dot{\epsilon}_t - \dot{\epsilon}_n) \text{sen} 2\phi \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_{rz}}{\partial z} = \frac{\partial(\dot{\epsilon}_t - \dot{\epsilon}_n)}{\partial z} \text{sen} 2\varphi + 2(\dot{\epsilon}_t - \dot{\epsilon}_n) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{cos} 2\varphi \quad (3.14)$$

En el punto A, además de (3.11), se tiene:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{ds} = c \quad \dot{\epsilon}_n = \dot{\epsilon}_r \quad (3.15)$$

y en consecuencia, particularizando en (3.14):

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_{rz}}{\partial z} = -2(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)c \quad (3.16)$$

Si este resultado se introduce en la ecuación (3.12) se obtiene finalmente:

$$\dot{c} = -c\dot{\epsilon}_r + \frac{\partial \dot{\epsilon}_z}{\partial r} \quad (3.17)$$

Para el campo de velocidades de deformación de Bridgman dado por (2.5) y (2.6), la ecuación anterior toma la forma:

$$\dot{c} = -c \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.18)$$

e integrando respecto al tiempo resulta:

$$ac = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{R} = \frac{a_0}{R_0} \quad (3.19)$$

Así pues, el radio de curvatura del fondo de entalla y el radio de la sección de entalla varían proporcionalmente durante el proceso de deformación.

4. Inestabilidad plástica y resistencia a tracción.

El resultado obtenido en el apartado 3 permite completar la fórmula de Bridgman para la carga de tracción de una barra cilíndrica entallada. Sustituyendo (3.19) en (2.20), se tiene:

$$P = \pi a^2 F \left(2 \ln \frac{a_0}{a} \right) \left(1 + 2 \frac{R_0}{a_0} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a_0}{R_0} \right) \quad (4.1)$$

De este modo, la carga de tracción queda expresada en función de una sola variable geométrica, el radio a de la sección de entalla, y su valor máximo, que determina la resistencia a tracción de la barra y el comienzo de la deformación inestable, puede ser calculado. Sin embargo, la interpretación del resultado es más sencilla si la ecuación (4.1) se modifica introduciendo la deformación plástica equivalente (2.12) como variable independiente, y la tensión media nominal en la sección de entalla:

$$s_N \equiv \frac{P}{\pi a_0^2} \quad (4.2)$$

en sustitución de la carga de tracción. La relación resultante es la siguiente:

$$s_N = F(\bar{\epsilon}^P) e^{-\bar{\epsilon}^P} \left(1 + 2 \frac{R_0}{a_0} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a_0}{R_0} \right) \quad (4.3)$$

Si se compara esta ecuación con la que expresa la tensión nominal en función de la deformación plástica equivalente en un ensayo de tracción simple del mismo material, esto es:

$$s = F(\bar{\epsilon}^P) e^{-\bar{\epsilon}^P} \quad (4.4)$$

se observa que únicamente difieren en el factor constante:

$$f \left(\frac{a_0}{R_0} \right) \equiv \left(1 + 2 \frac{R_0}{a_0} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a_0}{R_0} \right) \quad (4.5)$$

y por tanto los valores máximos de ambas tensiones estarán en la misma proporción, es decir:

$$s_{NR} = s_R f \left(\frac{a_0}{R_0} \right) \quad (4.6)$$

Así pues, la carga máxima que puede soportar una barra cilíndrica entallada es igual a la resistencia a tracción del material multiplicada por un factor geométrico:

$$P_R = \pi a_0^2 s_{NR} = \pi a_0^2 s_R f \left(\frac{a_0}{R_0} \right) \quad (4.7)$$

Otra posibilidad que ofrece la ecuación (4.3) es la de determinar la curva tensión-deformación del material mediante ensayos de tracción realizados con probetas entalladas. En efecto, escrita del siguiente modo:

$$\bar{\sigma} = F(\bar{\epsilon}^P) = \frac{e^{-\bar{\epsilon}^P} s_N}{f \left(\frac{a_0}{R_0} \right)} \quad (4.8)$$

dicha ecuación permite calcular los valores de la tensión y la deformación conociendo la deformación plástica equivalente y la tensión nominal media en la sección de entalla, y dado que estas magnitudes pueden a su vez ser calculadas mediante las ecuaciones (2.10) y (4.2), basta medir durante el ensayo la carga aplicada y el diámetro de la sección de entalla para obtener la curva tensión-deformación.

Este método proporciona más información que el ensayo de tracción simple, porque los valores posteriores al punto de carga máxima son también válidos, a diferencia de lo que ocurre en tracción simple. En una probeta de sección uniforme el estado teórico deja de ser real al producirse una localización de deformaciones no deseada por efecto de la inestabilidad, pero en una probeta entallada la localización tiene lugar desde el principio del ensayo y está contemplada en el análisis teórico.

5. Comprobación experimental.

Para comprobar la validez de las predicciones teóricas deducidas en el apartado anterior se han llevado a cabo ensayos de tracción sobre probetas cilíndricas entalladas y se han utilizado datos experimentales contenidos de la referencia [8].

Los materiales elegidos para la realización de los ensayos han sido acero ferrítico A 533 B y acero eutectoide trefilado. El de la referencia [8] es también acero eutectoide, pero sin trefilar, en estado de laminación. Las propiedades mecánicas de los tres materiales figuran en la tabla 1 y las características geométricas de las entallas en la tabla 2.

TABLA 1.- Propiedades mecánicas de los aceros empleados en la comprobación experimental.

	A 533 B	Eutectoide trefilado	Eutectoide laminado
Límite elástico	482 MPa	1400 MPa	600 MPa
Resistencia a tracción	625 MPa	1620 MPa	1151 MPa
Deformación bajo carga máxima	11,5 %	6,5 %	6,1 %

TABLA 2.- Características geométricas de las entallas elegidas para la comprobación experimental

	R_0/a_0	a_0/A_0	(1)
Acero A 533 B	0,084	0,802	
	0,847	0,896	
	0,909	0,896	*
Acero eutectoide trefilado	0,333	0,420	
	0,667	0,420	
	1,333	0,420	*
Acero eutectoide laminado	0,904	0,950	
	3,597	0,805	
	4,000	0,805	

(1) A_0 representa el radio inicial de la zona uniforme de la probeta.

La figura 3 recoge los resultados experimentales correspondientes a la carga de inestabilidad. Los valores representados gráficamente frente al cociente R_0/a_0 son los de la relación s_{NR}/s_R , definida en el apartado anterior. Únicamente falta el del ensayo del acero eutectoide trefilado con la entalla más aguda, por haberse producido la rotura de la probeta antes de alcanzar la carga máxima. En el mismo gráfico se ha dibujado la curva que representa la ecuación (4.6), esto es, la función definida por (4.5).

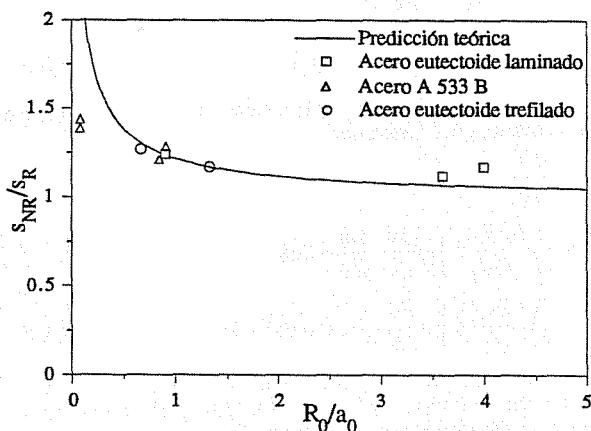


Figura 3.- Valores teóricos y experimentales de la resistencia a tracción de una barra entallada.

La concordancia entre la predicción teórica y los resultados experimentales es buena para valores intermedios de R_0/a_0 , precisamente los pertenecientes al intervalo donde cabe esperar que la solución de Bridgman sea aplicable, ya que para valores pequeños y grandes la situación corresponde, respectivamente, a los casos de una barra fisurada o lisa en lugar de entallada, como han confirmado los análisis numéricos de distintos autores [9]. Dentro del intervalo de interés las diferencias entre valores teóricos y experimentales son mínimas, a pesar de los diferentes materiales y geometrías de entalla comparados.

En los dos ensayos de la tabla 2 que aparecen señalados con el símbolo *, además de la carga aplicada también el diámetro de la sección de entalla fue medido, empleando para ello un extensómetro transversal. Como se indicó en el apartado anterior, estas medidas permiten aplicar las ecuaciones (2.10), (4.2) y (4.10) para determinar la curva tensión-deformación del material, en este caso la del acero A 533 B y la del acero eutectoide trefilado empleados en la investigación.

Las curvas obtenidas por ese procedimiento pueden observarse en la figura 4, donde también se han representado las procedentes de ensayos de tracción simple de los mismos aceros. De nuevo la concordancia es buena, y sólo se aprecian pequeñas diferencias para las deformaciones más bajas, es decir, cuando tiene lugar la plastificación de la sección de entalla y se produce la transición hacia el estado de plastificación completa postulado en la solución de Bridgman. Es importante destacar asimismo la gran diferencia que hay en la información obtenida por ambos procedimientos acerca de la curva tensión-deformación, tanto mayor cuanto más dúctil es el material.

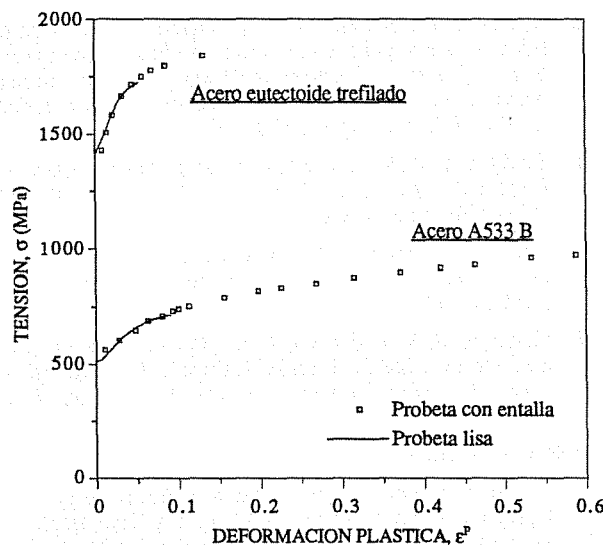


Figura 4.- Curvas tensión-deformación obtenidas en ensayos de tracción simple y ensayos de tracción con probetas entalladas.

6. Conclusiones.

- El problema fundamental que ha sido resuelto analíticamente es el de predecir la evolución que experimenta el radio de curvatura de una entalla en una barra cilíndrica de material dúctil sometida a tracción. Dicha predicción está basada en la solución de Bridgman pero no añade ninguna hipótesis adicional.
- El resultado obtenido ha permitido complementar la solución de Bridgman con consecuencias de considerable interés práctico: predecir la capacidad resistente de una barra cilíndrica entallada, determinar experimentalmente la curva tensión-deformación de un material hasta deformaciones muy superiores a las de un ensayo de tracción simple, y caracterizar criterios de rotura dúctil.
- Las comprobaciones experimentales realizadas cubren una gama de materiales y geometrías de entalla muy diferenciada y pueden calificarse de muy satisfactorias, tanto en lo que se refiere a la predicción de la capacidad resistente de una barra cilíndrica entallada, como a la determinación de la curva tensión-deformación mediante ese tipo de probetas.

REFERENCIAS

- [1] McClintock, F.A. "A criterion for ductile fracture by the growth of holes". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 363-371, 1968.
- [2] Rice, J.R. y Tracey, D.M. "On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields". *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 17, pp. 201-217, 1969.
- [3] Ritchie, R.O. y Thompson, A.W. "On macroscopic and microscopic analyses for crack initiation and crack growth toughness in ductile alloys". *Metallurgical Transactions A*, Vol 16A, pp. 233-248, 1985.
- [4] Hancock, J.W. y Mackenzie, A.C. "On the mechanisms of ductile fracture in high-strength steels subjected to multiaxial stress states". *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 24, pp. 147-169, 1976.
- [5] Mackenzie, A.C., Hancock, J.W. y Brown, D.K. "On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels". *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 9, pp. 167-188, 1977.
- [6] Ritchie, R.O., Server, W. L. y Wullaert, R.A. "Critical fracture stress and fracture strain models for the prediction of lower and upper shelf toughness in nuclear pressure vessels steels". *Metallurgical Transactions A*, Vol 10A, pp. 1557-1570, 1979.
- [7] Bridgman, P.W., "Studies in large plastic flow and fracture". *Harvard University Press*, Cambridge (Masachussetes, USA), 1964.
- [8] Toribio, J. "Fractura elastoplástica de alambres entallados". *Tesis doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, 1987.
- [9] Hancock, J.W. y Brown, D.K. "On the role of strain and stress state in ductile failure". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 31, pp. 1-24, 1983.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología por la ayuda nº PR84-0511, que ha hecho posible la realización de esta investigación.

APENDICE.

Sea Γ la configuración actual de una línea material (figura A.1). El vector tangente unitario en un punto es la derivada espacial del vector de posición a lo largo de Γ :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{t} \tag{A.1}$$

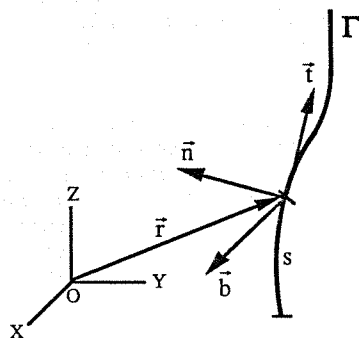


Figura A.1.- Triedro de Frenet de una línea material.

Los vectores unitarios que forman el triedro intrínseco en un punto, sus derivadas a lo largo de Γ y las curvaturas de flexión y torsión, c y τ , se relacionan entre sí a través de las fórmulas de Frenet :

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} = c\vec{n} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = -c\vec{t} + \tau\vec{b} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = -\tau\vec{n} \tag{A.4}$$

La derivada material respecto al tiempo de la curvatura de flexión puede calcularse a partir de las expresiones anteriores haciendo uso de la igualdad:

$$\dot{c} = (c\vec{n}) \cdot \dot{\vec{n}} = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \right) \cdot \dot{\vec{n}} \tag{A.5}$$

y aplicando la siguiente expresión para efectuar la doble derivación material respecto al tiempo y espacial respecto al arco de la curva Γ :

$$\left(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial s} \right) \cdot = \left(\frac{d\vec{\phi}}{ds} \right) \cdot = \frac{(d\vec{\phi}) \cdot}{ds} - \frac{(ds) \cdot}{ds} \frac{d\vec{\phi}}{ds} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial s} - \dot{\epsilon}_t \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial s} \tag{A.6}$$

donde se ha introducido la definición de velocidad de deformación longitudinal referida a la dirección tangente a la curva Γ :

$$\frac{(ds) \cdot}{ds} = \dot{\epsilon}_t \tag{A.7}$$

En el caso del vector de posición, teniendo en cuenta que su derivada material respecto al tiempo es el vector velocidad, y aplicando las ecuaciones (A.1) y (A.2), se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \right) \cdot &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \cdot \right] - \dot{\epsilon}_t \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \vec{t}}{\partial s} - \dot{\epsilon}_t \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right] - \dot{\epsilon}_t \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial s^2} - \frac{\partial \dot{\epsilon}_t}{\partial s} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} - 2\dot{\epsilon}_t \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial s^2} - \frac{\partial \dot{\epsilon}_t}{\partial s} \vec{t} - 2\dot{\epsilon}_t c\vec{n} \end{aligned} \tag{A.8}$$

Si se sustituye esta expresión en (A.5) y se emplea nuevamente (A.2), resulta:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial s^2} \cdot \vec{n} - 2\dot{\epsilon}_t c = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \vec{n} \right) - \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} - 2c\dot{\epsilon}_t = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \vec{n} \right) - \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot (-c\vec{t} + \tau\vec{b}) - 2c\dot{\epsilon}_t \end{aligned} \tag{A.9}$$

La derivada del vector velocidad a lo largo de la curva Γ está relacionada con las velocidades de deformación según las direcciones del triedro de Frenet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} &= (\nabla \vec{v}) \vec{t} = \dot{\epsilon}_t \vec{t} + \vec{\omega} \times \vec{t} = \\ &= \dot{\epsilon}_t \vec{t} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_m \vec{n} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_b \vec{b} + \vec{\omega} \times \vec{t} \end{aligned} \tag{A.10}$$

donde:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \tag{A.11}$$

Sustituyendo en (A.9) la expresión (A.10) y simplificando el resultado con ayuda de las ecuaciones (A.1), (A.2) y (A.3), se obtiene finalmente:

$$\dot{c} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}_m}{\partial s} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial s} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \tau \dot{\gamma}_b - c\dot{\epsilon}_t \tag{A.12}$$