

## EVALUACION DE LA FLEXIBILIDAD DEBIDA A UNA CARGA CASI-PUNTUAL

J. Planas, G.V. Guinea y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales  
E. T. S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid  
Ciudad Universitaria s/n, 28040-Madrid

**Resumen.** En la presente comunicación se analiza desde un modelo exclusivamente elástico-lineal el desplazamiento de los puntos bajo una carga casi-puntual y se calcula su dependencia respecto del tamaño de la zona cargada. El problema se aborda para el caso bidimensional en tensión plana. En el artículo se desarrolla una expresión general para el desplazamiento de puntos bajo una distribución de cargas en la superficie de un macizo semi-infinito y se aplica el resultado al estudio de una de las geometrías de ensayo más comunes: la probeta de flexión en tres puntos. El trabajo demuestra la influencia de la zona de reparto en el cálculo de la flexibilidad de la probeta y señala las implicaciones experimentales más importantes.

**Abstract.** Displacements due to quasi-point loads on the surface of linear elastic bodies are analyzed. Such displacements are relevant when work done by these forces needs to be evaluated. A general expression for the relative displacement due to a distributed load on the surface of a semi-infinite body was found. This result was applied to evaluate the relative displacement between characteristic points in the standard three point beam test. Results show that there is a strong dependence on the spread of the distributed load.

## 1. INTRODUCCION

Una de las formas más comunes de sollicitación en el ámbito de la experimentación mecánica de materiales es sin duda el apoyo puntual. Este nombre se utiliza tanto para el apoyo puntual propiamente dicho, que es una situación tridimensional, como para la carga en línea, que es su equivalente bidimensional. En ambos casos la realidad experimental es que el contacto con la probeta no se realiza de forma puntual (o lineal), si no que la carga se reparte en cierta zona, pequeña en comparación con las dimensiones de la probeta. A esta situación le denominamos apoyo casi-puntual.

Desde el punto de vista tensional la diferencia entre el apoyo puntual estricto y el apoyo casi-puntual es insignificante a distancias del apoyo superiores a algunas veces la anchura de la zona en la que se reparte la carga. La diferencia también es despreciable cuando se evalúan los desplazamientos en zonas alejadas al apoyo, pero no sucede lo mismo cuando se mide el desplazamiento de puntos bajo la carga, que están afectados de forma sustancial por el tamaño y forma del apoyo.

Sin embargo es frecuente utilizar para la interpretación de los ensayos expresiones teóricas basadas en el desplazamiento bajo el punto de carga, debido a que este desplazamiento es conjugado respecto de la fuerza aplicada y el producto de los dos nos proporciona el trabajo realizado.

Las dificultades aparecen cuando se quiere calcular el trabajo de las fuerzas exteriores porque, si son puntuales, los desplazamientos conjugados deben ser infinitamente grandes y si se supone que las cargas están repartidas, los desplazamientos son función de la anchura de la zona de reparto, dato que difícilmente se conoce.

En este artículo se estudia, bajo el punto de vista de la elasticidad lineal, la influencia del tamaño y forma del apoyo en el desplazamiento bajo el punto de carga. El problema que abordamos es un problema elástico plano que aparece con frecuencia en las disposiciones de ensayo: la carga en faja. Se estudia primero el desplazamiento en un sólido elástico semi-infinito, para aplicar luego este resultado a uno de los ensayos más extendidos como es el de flexión en tres puntos.

**2. DESPLAZAMIENTO BAJO UNA DISTRIBUCION ARBITRARIA EN UN MACIZO SEMI-INFINITO**

Sea un sólido elástico bidimensional semi-infinito sobre el que se aplica una carga puntual por unidad de espesor,  $P$ , figura 1. El desplazamiento vertical,  $u$ , de un punto situado en la posición definida por las coordenadas polares  $(r, \theta)$  viene dado, en tensión plana, por la expresión [1, 2]:

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \ln r - \frac{P(1+\nu)}{\pi E} \sin 2\theta + \frac{2P}{\pi E} \ln d \quad (1)$$

en la que  $E$  y  $\nu$  son, respectivamente, el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material. La ecuación anterior supone nulo el desplazamiento vertical de un punto situado bajo la carga a distancia  $d$ .

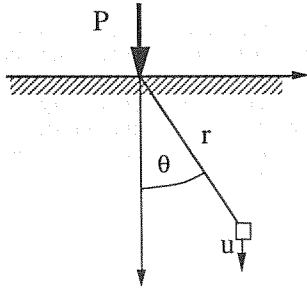


Fig. 1. Carga puntual en un sólido semi-infinito

A partir de la ecuación (1) se pueden determinar por integración los desplazamientos debidos a una distribución de carga,  $\sigma(s)$ , extendida una distancia,  $a$  que suponemos mucho menor que,  $d$ , figura 2.

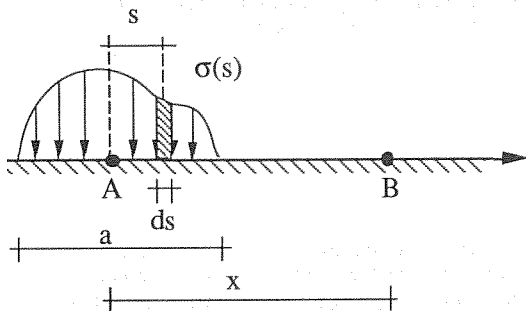


Fig.2. Cálculo del desplazamiento debido a una distribución de carga

El desplazamiento infinitesimal de un punto B de la superficie situado fuera de la distribución de carga en la posición  $x$  debido a la fuerza  $\sigma(s) ds$ , figura 2, será de acuerdo con (1):

$$du_B = \left[ \frac{2}{\pi E} \ln \frac{d}{|x-s|} - \frac{1+\nu}{\pi E} \right] \sigma(s) ds \quad (2)$$

y el desplazamiento relativo entre el punto B y el punto A, que está en el origen de la distribución, resultará igual a:

$$du_{AB} = du_A - du_B = \frac{2}{\pi E} \sigma(s) \ln \frac{|x-s|}{|s|} ds \quad (3)$$

El valor del desplazamiento relativo  $u_{AB}$  se calcula integrando la ecuación (3):

$$u_{AB} = \frac{2}{\pi E} \int_a^x \sigma(s) \ln \frac{|x-s|}{|s|} ds \quad (4)$$

La integral anterior es singular en el origen y no permite hacer un desarrollo en serie para  $x/a$ . Sin embargo este inconveniente se puede soslayar si postulamos para (4) la estructura siguiente:

$$u_{AB} = \frac{2}{\pi E} F\left(\frac{x}{a}\right) P \quad (5)$$

siendo  $P$  la carga total bajo la distribución y  $F$  una función adimensional que depende de la relación  $x/a$ . Derivando las ecuaciones (4) y (5) respecto a  $x^* = x/a$  igualando sus resultados, e introduciendo la variable adimensional  $s^* = s/a$  se obtiene:

$$F'(x^*) = \frac{a}{P} \int_{\text{carga}} \frac{1}{x^*-s^*} \sigma(s^*) ds^* \quad (6)$$

que permite un sencillo desarrollo en serie de la fracción bajo el signo integral dado por:

$$\frac{1}{x^*-s^*} = \frac{1}{x^*} + \frac{s^*}{(x^*)^2} + \dots + \frac{(s^*)^n}{(x^*)^{n+1}} + \dots \quad (7)$$

con lo que  $F'$  queda:

$$F'(x^*) = \frac{1}{x^*} + \frac{1}{(x^*)^2} \int_{\text{carga}} s^* \sigma(s^*) ds^* + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(x^*)^{i+1}} \int_{\text{carga}} (s^*)^i \sigma(s^*) ds^* \quad (8)$$

en donde se puede anular el segundo sumando sin más que elegir el origen de  $s^*$  en el centro de gravedad de la distribución de carga. Integrando la ecuación (8) resulta:

$$F\left(\frac{x}{a}\right) = \ln \frac{|x|}{a} - \frac{1}{P} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{M_i}{x^i} + C \quad (9)$$

en la que  $C$  es una constante de integración y  $M_i$  es el momento  $i$ -ésimo de la distribución de carga, dado por:

$$M_i = \int_{\text{carga}} s^i \sigma(s) ds \quad (10)$$

El desplazamiento  $u_{AB}$  queda finalmente como:

$$u_{AB} = \frac{2P}{\pi E} \left[ \ln \frac{|x|}{a} - \frac{1}{P} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{M_i}{x^i} + C \right] \quad (11)$$

ecuación válida para calcular el desplazamiento del punto bajo el centro de la distribución de carga respecto de un punto en la superficie a distancia  $x$ . La ecuación (11) da la clave para el análisis de los desplazamientos bajo una carga casi-puntual y, como se aprecia, los desplazamientos divergen según una ley logarítmica cuando la anchura de la distribución tiende a cero.

La constante  $C$  que aparece en la ecuación (11) es una constante universal, igual para todas las distribuciones de carga. Este hecho se demuestra fácilmente si se consideran los desplazamientos debidos a dos distribuciones diferentes que tengan igual resultante  $P$ , igual extensión  $a$  e igual posición del centro de gravedad. Los desplazamientos debidos a ambas distribuciones serán :

$$u_{AB}^I = \frac{2P}{\pi E} \left[ \ln \frac{|x|}{a} - \frac{1}{P} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{M_i^I}{x^i} + C_I \right] \quad (12)$$

$$u_{AB}^{II} = \frac{2P}{\pi E} \left[ \ln \frac{|x|}{a} - \frac{1}{P} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{M_i^{II}}{x^i} + C_{II} \right] \quad (13)$$

Para una distribución que sea la resta de las dos anteriores el desplazamiento será:

$$u_{AB}^I - u_{AB}^{II} = -\frac{2}{\pi E} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{M_i^I - M_i^{II}}{x^i} + \frac{2P}{\pi E} (C_I - C_{II}) \quad (14)$$

y como este desplazamiento no puede depender de  $P$  deberá ser  $C_I = C_{II}$ .

Hemos calculado de forma directa el valor de la constante  $C$  resolviendo exactamente la ecuación (4) para una distribución de carga uniforme. El resultado es:

$$C = 1 + \ln 2 = 1.693 \quad (15)$$

### 3. APLICACION A UNA PROBETA DE FLEXION EN TRES PUNTOS

Los resultados del apartado anterior se utilizan en este apartado para calcular los desplazamientos en una probeta de flexión en tres puntos. La geometría del problema se da en la figura 3, y coincide con la de la probeta tipo viga usada en distintas normas de ensayos de fractura.

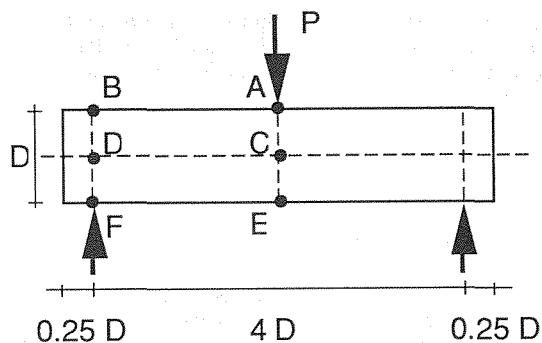


Fig.3. Geometría de flexión

Para el cálculo del desplazamiento  $u_{AB}$  procedemos a la descomposición indicada en la figura 4. Los problemas I y II corresponden a dos sólidos semi-infinitos solicitados en sus contornos por cargas casi-puntuales. El problema III asegura que las tensiones en el contorno de la probeta sean nulas. El desplazamiento total  $u_{AB}$  será la suma de los tres desplazamientos solución de cada problema.

El desplazamiento  $u_{AB}^I$  del problema I viene dado por la ecuación (11), que fue deducida en el apartado anterior. En la hipótesis de que la carga es casi-puntual, esto es, que la zona de reparto,  $a$ , es mucho menor que las dimensiones de la viga (por ejemplo  $D$ ) podemos despreciar en (11) el término debido a los momentos de segundo orden y superiores de la distribución de carga, ya que  $M_i$  tiende a cero como  $a^{i+1}$ . En consecuencia la expresión para  $u_{AB}^I$  queda como :

$$u_{AB}^I = \frac{2P}{\pi E} \left[ \ln \frac{2D}{a} + 1 + \ln 2 \right] \quad (16)$$

al ser en este caso  $x = 2D$ .

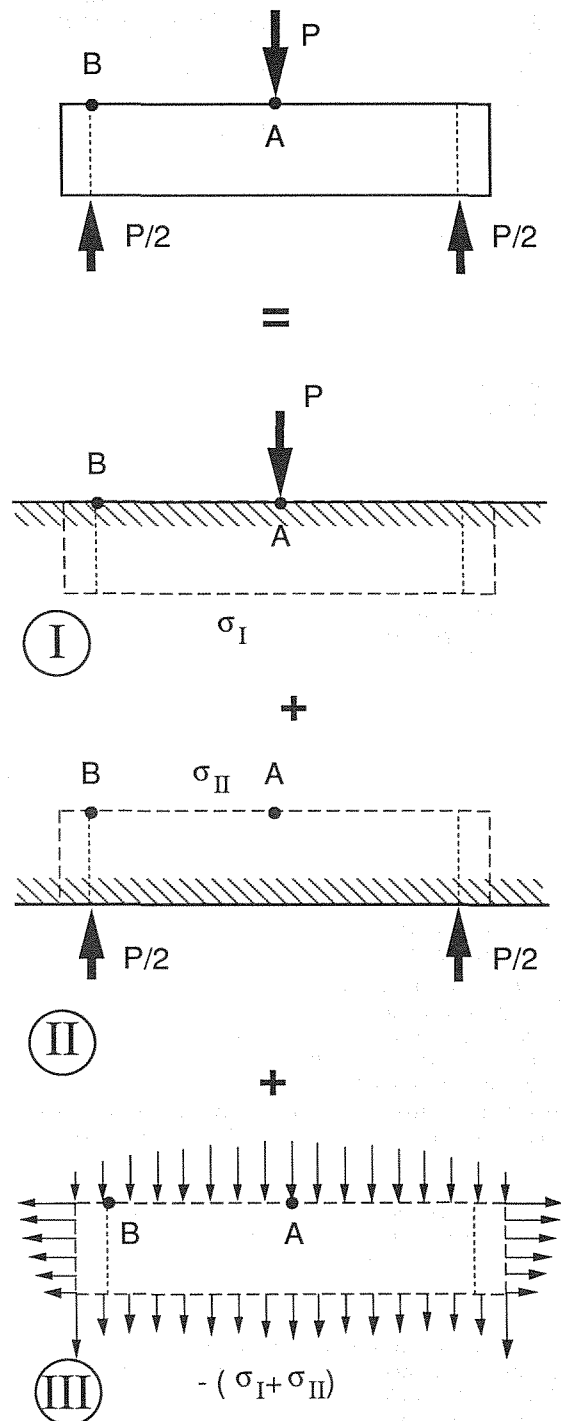


Fig.4. Descomposición del problema de una viga en flexión

Para resolver el problema II, y dado que los puntos A y B están muy lejos de los puntos donde actúan de las cargas, podemos calcular  $u_{AB}^{II}$  a partir de la ecuación (1) del desplazamiento vertical debido a una carga puntual. El cálculo lleva a:

$$u_{AB}^{II} = \frac{P}{\pi E} \left[ \ln \frac{5}{\sqrt{17}} + \frac{28}{85} (1+\nu) \right] \quad (17)$$

A diferencia de los otros dos problemas, el problema III no admite solución analítica. Para resolverlo debemos calcular las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en el contorno de la viga correspondientes a los problemas I y II y aplicarlas con signo opuesto a la viga del problema III. El cálculo en este caso ha sido realizado de forma numérica modelizando la viga por elementos finitos. Por simetría sólo hemos discretizado la mitad de la viga, utilizando una malla totalmente regular de 20 x 45 elementos isoparamétricos de 8 nodos. Las tensiones  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  de cada problema se han calculado bajo la hipótesis de carga puntual, pues los contornos donde no se anulan están a gran distancia de los puntos de carga.

El resultado del cálculo numérico en tensión plana y  $\nu = 0.3$  da un valor para el desplazamiento,  $u_{AB}^{III}$ :

$$u_{AB}^{III} = \frac{P}{E} 16.543 \quad (18)$$

Sumando los resultados de las ecuaciones (16), (17) y (18), evaluamos el desplazamiento  $u_{AB}$  de la viga en flexión representada en la figura 3 como:

$$u_{AB} = \frac{P}{E} \left[ 18.260 + \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{D}{a} \right) \right] \quad (19)$$

expresión válida para tensión plana y  $\nu$  igual a 0.3.

Si seguimos un proceso similar al desarrollado en este apartado y calculamos los desplazamientos  $u_{CD}$ ,  $u_{EF}$  o  $u_{AF}$  (figura 3) el resultado es:

$$u_{CD} = \frac{P}{E} 18.512 \quad (20)$$

$$u_{EF} = \frac{P}{E} \left[ 18.301 + \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{D}{a} \right) \right] \quad (21)$$

$$u_{AF} = \frac{P}{E} \left[ 18.493 + \frac{3}{\pi} \ln \left( \frac{D}{a} \right) \right] \quad (22)$$

valores calculados en tensión plana para un material de coeficiente de Poisson igual a 0.3.

Como se desprende de las ecuaciones (19), (20), (21) y (22), para evaluar la flexibilidad de la probeta resulta sustancial la posición donde se miden los desplazamientos: bajo los apoyos o fuera de ellos. En el caso de desplazamientos medidos bajo los apoyos ( $u_{AB}$ ,  $u_{EF}$  y  $u_{AF}$ ) aparece el término  $\ln(D/a)$ , que depende drásticamente de la zona de reparto de la carga. La diferencia de coeficientes con que interviene este término en las ecuaciones (19), (21) y (22) se debe a la diferente intensidad y de la fuerza aplicada en el apoyo en cada situación ( $P$  para el punto A y  $P/2$  para el punto F), y a que en  $u_{AF}$  intervienen los desplazamientos tanto bajo el apoyo central como el lateral.

Si medimos, sin embargo, los desplazamientos a lo largo de la línea media de la probeta el término logarítmico desaparece, como corresponde a una situación de puntos alejados de los apoyos. Podemos comparar el resultado de (20) con el cálculo dado por Timoshenko [1] de la flecha del punto medio del eje de una viga prismática calculado con  $\nu = 0.3$  y tensión plana:

$$\delta = \frac{P_T L^3}{48EI} \left[ 1 + 2.85 \left( \frac{D}{L} \right)^2 - 0.84 \left( \frac{D}{L} \right)^3 \right] \quad (23)$$

siendo  $P_T$  la carga total aplicada,  $L$  la luz entre apoyos,  $D$  el canto e  $I$  la inercia de la sección. Si sustituimos nuestros datos  $L = 4D$ ,  $I = BD^3/12$  y  $P = P_T/B$  tendremos:

$$\delta = \frac{P}{E} 18.64 \quad (24)$$

que está muy próximo al calculado en (20).

De las ecuaciones de los desplazamientos (19), (21) y (22) deducimos que la medida de desplazamientos bajo los apoyos vendrá influida en mayor o menor medida por la anchura del apoyo. Esta influencia puede ser de importancia y por ejemplo para una viga de acero de 50 mm de canto y una anchura de apoyo de 0.04 mm, típica de un rodillo de 20 mm de diámetro, el término logarítmico de (19) es igual a 4.5, lo que supone el 20% del valor total de la flexibilidad. En consecuencia, los datos de desplazamientos de puntos bajo los apoyos han de manejarse con sumo cuidado, acotándolos en cada caso con ayuda de (19), (20), (21) ó (22).

#### 4. CONCLUSIONES

El trabajo que se presenta en este artículo ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- Hemos calculado la expresión general del desplazamiento bajo una carga repartida en un macizo semi-infinito, y se ha demostrado que siempre aparece una dependencia logarítmica con la extensión de la zona cargada (ecuación (11)).

- Como aplicación del resultado anterior hemos calculado la flecha de una viga normalizada en flexión en diversas posiciones, demostrando que la dependencia con la anchura de la zona de apoyo estará presente siempre que se midan los desplazamientos en los bordes superior e inferior de la viga (ecuaciones (19), (21) y (22)).

- La dependencia con la anchura de la zona de carga, en tanto que ésta es desconocida, invalida los resultados de los desplazamientos que se miden bajo los apoyos así como los cálculos que de ellos se deriven (como el módulo de elasticidad por ejemplo). Por ello es necesario tener esta dependencia presente a la hora de diseñar y realizar ensayos que involucren este tipo de medidas.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología y a la Universidad Politécnica de Madrid la ayuda recibida a través de los proyectos nº PB90-0276 y A91-00200231.

#### 6. REFERENCIAS

- [1] Timoshenko S. y Goodier J.N., "Teoría de la Elasticidad", Urmo, (1968).
- [2] Love A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, (1944).