

## FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIÓN EN TERMOELASTICIDAD ANISÓTROPICA

J. M. Martínez-Esnaola y J. Pargada

Centro de Estudios e Investigaciones Técnicas de Guipúzcoa (CEIT)  
P<sup>a</sup> Manuel de Lardizábal 15, 20009-San Sebastián.

**Resumen.** En esta comunicación, se analiza el problema de una grieta sometida a cargas termomecánicas en un medio semi-infinito para el caso más general de anisotropía elástica. El problema térmico se resuelve de forma precisa mediante un modelo de dislocaciones térmicas que tiene en cuenta la distorsión del campo de temperaturas originada por la presencia de la grieta. Las tensiones térmicas debidas a esta distribución de temperaturas se superponen a las tensiones aplicadas exteriormente, y las condiciones de contorno de grieta libre de tensiones en sus labios se imponen mediante una distribución continua de dislocaciones elásticas. Se presentan por último algunos ejemplos de aplicación del método.

**Abstract.** The problem of a crack subject to thermomechanical loading in a semi-infinite medium is analyzed in the case of general elastic anisotropy. The thermal problem is solved accurately using thermal dislocation models which take account of the disturbance in the temperature field produced by cracks. Thermal stresses due to this temperature distribution are added to the externally applied stresses and the traction free crack boundary conditions are modelled through continuous distributions of elastic dislocations. Finally, some example problems are considered to show the applicability of the model.

## 1. INTRODUCCIÓN

Aunque existen gran cantidad de métodos propuestos y soluciones para el cálculo de los factores de intensidad de tensión en Fractura, la mayoría de ellos consideran el caso isótropo o algún caso particular de anisotropía. El objetivo de este artículo es la determinación de factores de intensidad de tensión en un medio elástico con anisotropía general bajo condiciones de carga termomecánica.

El punto de partida es la solución obtenida en [1] para una dislocación térmica en un medio semi-infinito. El uso de esta solución fundamental para resolver el problema de una grieta que distorsione un flujo de calor impuesto exteriormente ya fue descrito en [1]. En la sección 2, se resumen las ideas básicas del método.

En la sección 3, se obtienen los campos de tensiones y desplazamientos asociados a una dislocación térmica en presencia de una superficie libre. En este análisis, se corrige la solución obtenida en [1] para un medio infinito mediante una solución imagen que garantiza las exigencias de continuidad y las condiciones de contorno en la superficie libre. Esta solución puede utilizarse en combinación con la

distribución de dislocaciones resultante del análisis térmico para calcular las tracciones sobre el plano de la grieta. En la sección 4, se describe la modelización de la grieta para anular las tracciones sobre los labios.

Finalmente, en la sección 5, se presentan algunos ejemplos de aplicación del método. Resulta de especial interés práctico la posibilidad de determinar, como caso particular, funciones de Green para la evaluación de factores de intensidad de tensión en un medio con anisotropía general.

## 2. PROBLEMA TÉRMICO

El problema considerado es el de una grieta sometida a un flujo de calor en un medio anisótropo semi-infinito en el plano  $x_1x_2$ .

Considérese una grieta como la representada en la Fig. 1 que forma un ángulo  $\theta$  con la superficie libre,  $x_2=0$ , y se extiende entre  $x=\alpha_0$  y  $x=\beta_0$ . Sea  $h(x)$  el flujo de calor aplicado exteriormente a través del plano  $y=0$  en ausencia de la grieta.

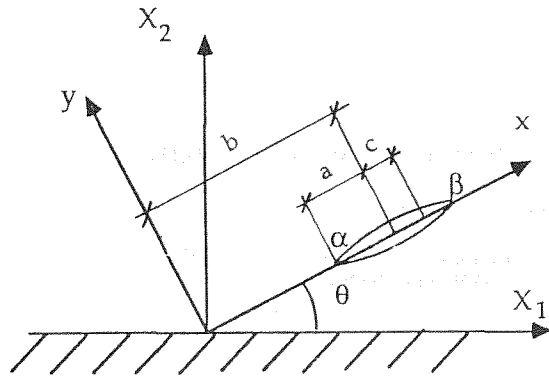


Fig. 1 Grieta próxima a una superficie libre.

La perturbación originada en el campo de temperaturas por la presencia de la grieta puede representarse mediante un modelo de dislocaciones, sustituyendo la grieta por una distribución continua de dislocaciones térmicas de densidad  $T_0(\xi)$  en la posición  $x=\xi, y=0$ , con  $\alpha_0 < \xi < \beta_0$ . Para determinar esta densidad de dislocaciones, se impone la condición de que la grieta presente una impedancia térmica infinita o que solamente una determinada fracción del flujo exterior atraviese la grieta. Los detalles de este análisis pueden encontrarse en la referencia [1] y conducen a una ecuación integral singular que puede invertirse y resolverse numéricamente para la obtención de la función de densidad  $T_0(\xi)$ .

### 3. DESPLAZAMIENTOS Y TENSIONES INDUCIDOS TÉRMICAMENTE POR UNA GRIETA

El análisis se iniciará estudiando el efecto de una dislocación térmica aislada.

Se considera un medio anisótropo semi-infinito en el plano  $x_1x_2$ , limitado inferiormente por la superficie  $x_2=0$  y libre de cargas externas, y en el que se encuentra situada una dislocación térmica en el punto  $\zeta=\xi_1+i\xi_2$ , como se muestra en la Fig. 2.

Las tensiones,  $\sigma_{ij}$ , se encuentran relacionadas con los desplazamientos,  $u_k$ , y la temperatura,  $T$ , según la ley constitutiva:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \beta_{ij} T \tag{1}$$

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor de constantes elásticas y  $\beta_{ij}$  son los coeficientes de relación tensión - temperatura. Por otra parte, las ecuaciones de equilibrio se expresan

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m} - \beta_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_l} = 0 \tag{2}$$

Siguiendo el análisis de Sturla y Barber [2], se ha obtenido [1] que una solución del sistema de ecuaciones (1)-(2) resulta ser de la forma:

$$u_i^{(0)} = C_i \psi(z_1) + \bar{C}_i \bar{\psi}(\bar{z}_1) \tag{3}$$

donde (véase referencia [1])

$$\psi(z_1) = \frac{T_0}{2\pi i} (z_1 - \zeta_1) [\ln(z_1 - \zeta_1) - 1] + A(z_1 - \bar{\zeta}_1) [\ln(z_1 - \bar{\zeta}_1) - 1] \tag{4}$$

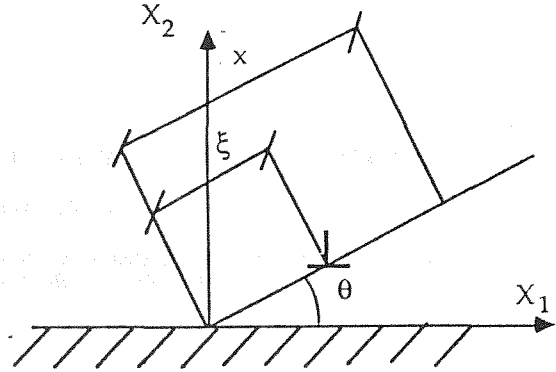


Fig. 2 Dislocación térmica en las proximidades de una superficie.

siendo  $A=1$  para el caso  $T=0$  en la superficie y  $A=-1$  para el caso de superficie aislada térmicamente. Los coeficientes  $C_k$  pueden encontrarse en [1] y  $z_1=x_1+qx_2$ , donde  $q$  es la raíz de la ecuación  $k_{11}+2k_{12}q+k_{22}q^2=0$  ( $k_{ij}$  son los coeficientes de conductividad térmica).

Sustituyendo (4) en (1), y escribiendo  $\varphi(z_1)=d\Psi(z_1)/dz_1$ , se obtiene la siguiente expresión de las tensiones  $\sigma_{ij}^{(0)}$ :

$$\sigma_{ij}^{(0)} = R_{ij} \varphi(z_1) + \bar{R}_{ij} \bar{\varphi}(\bar{z}_1) \tag{5}$$

donde

$$R_{ij} = (C_{ijk1} + qC_{ijk2})C_k - \beta_{ij} \tag{6}$$

A partir de (5), pueden obtenerse las tracciones  $t_k^{(0)}$  sobre el plano  $\mu$ , (Fig. 2)

$$t_k^{(0)} = Q_k \varphi(z_1) + \bar{Q}_k \bar{\varphi}(\bar{z}_1) \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1 &= (R_{21} - R_{11}) \text{sen}\theta \cos\theta + R_{12} (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \\ Q_2 &= R_{11} \text{sen}^2\theta + R_{22} \cos^2\theta - 2R_{12} \text{sen}\theta \cos\theta \\ Q_3 &= -R_{13} \text{sen}\theta + R_{23} \cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

A las soluciones correspondientes a los desplazamientos  $u_k^{(0)}$  - (3) - y a las tracciones sobre el plano  $\mu$ ,  $t_k^{(0)}$  - (7) - deben añadirse unos términos isotermos adicionales  $u_k^{(1)}$ ,  $t_k^{(1)}$  y  $u_k^{(2)}$ ,  $t_k^{(2)}$  de forma que los campos

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{(0)} + u_k^{(1)} + u_k^{(2)} \\ t_k &= t_k^{(0)} + t_k^{(1)} + t_k^{(2)} \end{aligned} \tag{9}$$

cumplan las ecuaciones constitutivas del medio, las ecuaciones de equilibrio, y además, las siguientes condiciones:

- Los desplazamientos no están producidos por el efecto elástico de la dislocación, sino por derivación del efecto térmico, por lo que las tensiones y los desplazamientos deben ser continuos alrededor del punto  $z=\zeta$ .

- La superficie limitante del medio,  $x_2=0$ , se presenta libre de cargas externas, por lo que las tracciones  $\sigma_{12}$  sobre la misma son nulas.

Las discontinuidades de desplazamientos y de tracciones sobre el plano  $\mu$  creadas en torno al punto  $z_1 = \zeta_1$  por las soluciones (3) y (7), resultan ser:

$$\begin{aligned} [u_k^{(0)}] &= T_{\alpha} \{C_k(z_1 - \zeta_1) + \bar{C}_k(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1)\} \\ [t_k^{(0)}] &= T_{\alpha} (Q_k + \bar{Q}_k) \end{aligned} \quad (10)$$

y deberán ser anuladas mediante la adición de las discontinuidades de desplazamientos y de tracciones sobre el plano  $\mu$  creadas en torno a dicho punto  $z_1 = \zeta_1$  por otros desplazamientos  $u_k^{(1)}$  y otras tracciones  $t_k^{(1)}$ . Para ello, siguiendo el análisis de Stroh [3], se definen unos desplazamientos isoterms de la forma

$$u_k^{(1)} = \sum_{\alpha} (A_{\alpha k} f_{\alpha}^{(1)}(z_{\alpha}) + \bar{A}_{\alpha k} \bar{f}_{\alpha}^{(1)}(\bar{z}_{\alpha})) \quad (11)$$

donde  $z_{\alpha} = x_1 + p_{\alpha} x_2$ . El significado de  $p_{\alpha}$  y las constantes  $A_{k\alpha}$  puede encontrarse en la referencia [1].

Las tensiones  $\sigma_{11}^{(1)}$  y  $\sigma_{22}^{(1)}$  resultan ser, consecuentemente con las ecuaciones constitutivas del medio (1) y con el mencionado carácter isotermo de esta solución,

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= -\sum_{\alpha} (L_{\alpha} P_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)}(z_{\alpha}) + \bar{L}_{\alpha} \bar{P}_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}^{(1)}(\bar{z}_{\alpha})) \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \sum_{\alpha} (L_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)}(z_{\alpha}) + \bar{L}_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}^{(1)}(\bar{z}_{\alpha})) \end{aligned} \quad (12)$$

Las expresiones de los vectores  $L_{i\alpha}$  pueden encontrarse en la referencia [1].

Con el objetivo de obtener unos campos elásticos que eliminen las discontinuidades de los campos originales, resulta adecuada la elección de funciones  $f_{\alpha}^{(1)}$  ( $z_{\alpha}$ ) de la forma:

$$f_{\alpha}^{(1)} = D_{\alpha} (z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) \{\ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - 1\} \quad (13)$$

La obtención de las constantes  $D_{\alpha}$  está desarrollada en las referencias [1, 4]. Finalmente, los campos de desplazamientos,  $u_k^{(1)}$ , y de tracciones sobre el plano  $\mu$ ,  $t_k^{(1)}$ , resultan

$$\begin{aligned} u_k^{(1)} &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} A_{\alpha k} B_{\alpha} (z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) \{\ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - 1\} - \bar{A}_{\alpha k} \bar{B}_{\alpha} (\bar{z}_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha}) \{\ln(\bar{z}_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha}) - 1\} \\ t_k^{(1)} &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} \{S_{\alpha k} B_{\alpha} \ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - \bar{S}_{\alpha k} \bar{B}_{\alpha} \ln(\bar{z}_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha})\} \end{aligned} \quad (14)$$

y las tensiones

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= -\frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} \{L_{\alpha} P_{\alpha} B_{\alpha} \ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - \bar{L}_{\alpha} \bar{P}_{\alpha} \bar{B}_{\alpha} \ln(\bar{z}_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha})\} \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} \{L_{\alpha} B_{\alpha} \ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - \bar{L}_{\alpha} \bar{B}_{\alpha} \ln(\bar{z}_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha})\} \end{aligned} \quad (15)$$

La siguiente condición -la nulidad de tensiones sobre la superficie limitante del medio- se satisface mediante la adición a los campos elásticos ( $u_k^{(0)} + u_k^{(1)}$ ) y ( $t_k^{(0)} + t_k^{(1)}$ ) de otros desplazamientos,  $u_k^{(2)}$ , y otras tracciones sobre el plano  $\mu$ ,  $t_k^{(2)}$ . Además, estos campos elásticos,  $u_k^{(2)}$  y  $t_k^{(2)}$ , no deberán introducir nuevas discontinuidades en el semiplano  $x_2 > 0$  y deberán cumplir las ecuaciones de equilibrio (2) y las ecuaciones constitutivas del medio (1). Esta última condición se ve satisfecha si se consideran unos campos elásticos idénticos a los expresados en (11) y (12), con la única excepción del cambio de los superíndices (1) por (2).

Con los requisitos mencionados, la condición  $-\sigma_{12} = 0$  cuando  $x_2 = 0$  puede expresarse como

$$\frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ \bar{R}_{12} [\ln(x_1 - \zeta_1) + A \ln(x_1 - \bar{\zeta}_1)] + \sum_{\alpha} L_{\alpha} B_{\alpha} \ln(x_1 - \zeta_{\alpha}) \} + \sum_{\alpha} \bar{L}_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}^{(2)}(x_1) + C.C. = 0 \quad (16)$$

Para evitar la introducción de nuevas discontinuidades en el semiplano correspondiente al medio,  $x_2 > 0$ , es conveniente la elección de funciones  $f_{\alpha}^{(2)}$  tal que:

$$\sum_{\alpha} L_{\alpha} f_{\alpha}^{(2)}(x_1) = \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ \bar{R}_{12} \ln(x_1 - \bar{\zeta}_1) - R_{12} A \ln(x_1 - \zeta_1) + \sum_{\alpha} \bar{L}_{\alpha} \bar{B}_{\alpha} \ln(x_1 - \bar{\zeta}_{\alpha}) \} \quad (17)$$

Premultiplicando ambos miembros de la igualdad por  $M_{\beta i}$  (siendo  $M_{\beta i} L_{i\alpha} = \delta_{\beta\alpha}$ ), se obtiene

$$f_{\beta}^{(2)}(x_1) = \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ M_{\beta i} \bar{R}_{12} \ln(x_1 - \bar{\zeta}_1) - M_{\beta i} R_{12} A \ln(x_1 - \zeta_1) + \sum_{\alpha} M_{\beta i} \bar{L}_{\alpha} \bar{B}_{\alpha} \ln(x_1 - \bar{\zeta}_{\alpha}) \} \quad (18)$$

Generalizando las funciones  $f_{\beta}^{(2)}$  para todo punto  $z_{\beta}$  correspondiente al semiplano  $x_2 > 0$  y reemplazando los subíndices  $i, \alpha, \beta$  por  $l, \gamma, \alpha$ , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{(2)}(z_{\alpha}) &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ M_{\alpha l} (\bar{R}_{12} - A R_{12}) (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) - 1\} + \\ &\quad + \sum_{\gamma} M_{\alpha l} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) - 1\} \} \end{aligned} \quad (19)$$

Los campos elásticos  $u_k^{(2)}$  y  $t_k^{(2)}$  son consecuentemente:

$$\begin{aligned} u_k^{(2)} &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} A_{\alpha k} M_{\alpha l} (\bar{R}_{12} - A R_{12}) (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) - 1\} + \\ &\quad + \sum_{\gamma} M_{\alpha l} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) - 1\} \} + C.C. \end{aligned} \quad (20)$$

$$t_k^{(2)} = \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \sum_{\alpha} S_{\alpha k} \{ M_{\alpha l} (\bar{R}_{12} - A R_{12}) \ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) + \sum_{\gamma} M_{\alpha l} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} \ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) \} + C.C.$$

Finalmente, a partir de las ecuaciones (3), (4), (7), (9), (14) y (20) se obtienen los campos de desplazamientos y de tracciones inducidos térmicamente sobre el plano  $\mu$ , por una dislocación en un medio semi-infinito

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ C_k (z_1 - \zeta_1) \{\ln(z_1 - \zeta_1) - 1\} + A (z_1 - \bar{\zeta}_1) \{\ln(z_1 - \bar{\zeta}_1) - 1\} \} + \\ &\quad + \sum_{\alpha} A_{\alpha k} \{ B_{\alpha} (z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) \{\ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) - 1\} + M_{\alpha l} (\bar{R}_{12} - A R_{12}) (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) - 1\} + \\ &\quad + \sum_{\gamma} M_{\alpha l} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} (z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) \{\ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma}) - 1\} \} \} + C.C. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{T_{\alpha}}{2\pi i} \{ Q_k [\ln(z_1 - \zeta_1) + A \ln(z_1 - \bar{\zeta}_1)] + \sum_{\alpha} S_{\alpha k} [B_{\alpha} \ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) + \\ &\quad + M_{\alpha l} (\bar{R}_{12} - A R_{12}) \ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_1) + \sum_{\gamma} M_{\alpha l} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} \ln(z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\gamma})] \} + C.C. \end{aligned}$$

La solución fundamental (21) puede utilizarse ahora para estudiar el efecto de una grieta situada en el plano  $\mu$  que se extiende entre  $x = \alpha_0$  y  $x = \beta_0$ , según se muestra en la Fig. 1.

La perturbación en los campos de desplazamientos y de tensiones inducida térmicamente por la grieta se analizará modelizando la grieta como una distribución continua de dislocaciones térmicas de densidad  $T_0(\xi)$  en  $x = \xi, y = 0$  con  $\alpha_0 < \xi < \beta_0$  -recuérdese que  $T_0(\xi)$  ha sido hallada anteriormente en la resolución del problema térmico.

Para obtener las tracciones sobre el plano  $\mu$  debidas a la distribución de dislocaciones, se integra la expresión (21) respecto a  $\xi$  de  $\xi = \alpha_0$  a  $\xi = \beta_0$ , reemplazando  $T_0$  por  $T_0(\xi)d\xi$ ,  $\alpha_0 < \xi < \beta_0$ , obteniéndose así:

$$t_k = \frac{1}{2\pi i} \left[ Q_k \left[ \int_{\beta_0}^{\alpha_0} T_0(\xi) \ln(z_1 - \bar{\zeta}_1) d\xi + A \int_{\beta_0}^{\alpha_0} T_0(\xi) \ln(z_1 - \bar{\zeta}_1) d\xi \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha} S_{\alpha} \left[ B_{\alpha} \int_{\beta_0}^{\alpha_0} T_0(\xi) \ln(z_0 - \bar{\zeta}_0) d\xi + M_{\alpha} (\bar{R}_{12} - AR_{12}) \int_{\beta_0}^{\alpha_0} T_0(\xi) \ln(z_0 - \bar{\zeta}_0) d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\gamma} M_{\alpha} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} \int_{\beta_0}^{\alpha_0} T_0(\xi) \ln(z_0 - \bar{\zeta}_0) d\xi \right] \right] + C.C. \quad (22)$$

Para toda dislocación simple  $\zeta$  y para todo punto  $z$  situado en el eje  $x$  se cumple :

$$z_0 - \bar{\zeta}_0 = (x - \xi)(\cos\theta + p_0 \sin\theta) \\ z_0 - \bar{\zeta}_1 = \cos\theta(x - \xi) + \sin\theta(p_0 x - \bar{q}\xi) \\ z_0 - \bar{\zeta}_2 = \cos\theta(x - \xi) + \sin\theta(p_0 x - \bar{p}_1 \xi) \quad (23) \\ z_1 - \bar{\zeta}_1 = (x - \xi)(\cos\theta + q \sin\theta) \\ z_1 - \bar{\zeta}_2 = \cos\theta(x - \xi) + \sin\theta(qx - \bar{q}\xi)$$

La resolución es más sencilla si se efectúa el siguiente cambio de variables, que limita  $x$  al intervalo  $\alpha_0 < x < \beta_0$ :

$$x = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \cos\Omega \quad (24) \\ \xi = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \cos\phi$$

Consecuentemente se definen las funciones  $t''_k(\cos\Omega)$  y  $T'_0(\cos\phi)$  de la forma :

$$t''_k(\cos\Omega) = t'_k(z_1, \bar{z}_1, z_0, \bar{z}_0) \quad (25) \\ T'_0(\cos\phi) = T_0(\xi)$$

Puesto que  $T'_0(\cos\phi)$  es singular en  $\cos\phi = \pm 1$ , se efectúa también el cambio:

$$T'_0(\cos\phi) = \frac{B(\cos\phi)}{\text{seno}} \quad (26)$$

A partir de las ecuaciones (22)-(26) y la condición de grieta cerrada se llega, tras algunas manipulaciones matemáticas [4] a la siguiente expresión de las tracciones sobre los labios de la grieta:

$$t''_k(\cos\Omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ Q_k \left\{ I_1(\cos\Omega) + A I_2(\cos\Omega, q, \bar{q}) \right\} + \sum_{\alpha} S_{\alpha} \left\{ B_{\alpha} I_1(\cos\Omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_{\alpha} (\bar{R}_{12} - AR_{12}) I_2(\cos\Omega, p_0, \bar{q}) + \sum_{\gamma} M_{\alpha} \bar{L}_{\gamma} \bar{B}_{\gamma} I_2(\cos\Omega, p_0, \bar{p}_1) \right\} \right] \quad (27)$$

donde

$$I_1(\cos\Omega) = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \int_0^{\Omega} B(\cos\phi) \ln(\cos\Omega - \cos\phi) d\phi \\ I_2(\cos\Omega, u, v) = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \int_0^{\Omega} B(\cos\phi) \ln \left[ \cos\theta \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} (\cos\Omega - \cos\phi) + \right. \\ \left. + \text{sen}\theta \left\{ \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} (u - v) + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} (u \cos\Omega - v \cos\phi) \right\} \right] d\phi \quad (28)$$

En relación a las ecuaciones (28) es importante señalar que la función  $B(\cos\phi)$  -o su forma equivalente  $T'_0(\cos\phi)$  según la ecuación (26)- se conocen de forma aproximada, mediante su valor en un número prefijado de puntos, como resultado de la resolución numérica del problema térmico. Por ello, para evaluar las ecuaciones (28), la función  $B(\cos\phi)$  se ha desarrollado en serie de polinomios de Chebyshev. Este método simplifica notablemente el cálculo de las integrales  $I_1$  e  $I_2$  [4].

#### 4. MODELIZACIÓN ELÁSTICA DE LA GRIETA

Las condiciones de contorno de grieta descargada en sus labios exigen la cancelación de las tracciones  $t''_k$  inducidas térmicamente sobre su plano (véase ecuación (27)). Para ello, la grieta se ha vuelto a modelizar como una distribución continua de dislocaciones (elásticas, en este caso). La solución fundamental para una dislocación aislada en las proximidades de una superficie libre es la obtenida por Atkinson y Eftaxiopoulos [5]. La densidad de dislocaciones resultante se ha calculado imponiendo la condición de labios descargados. Este método conduce, al igual que en el caso térmico, a una ecuación integral singular que puede invertirse y resolverse numéricamente. A partir de este resultado, el cálculo de los factores de intensidad de tensión es inmediato. Los detalles de esta formulación pueden encontrarse en la referencia [4].

#### 5. RESULTADOS

Para demostrar la aplicabilidad de la formulación presentada en las secciones anteriores, se presentan a continuación algunos ejemplos. Obsérvese que el método es también válido para problemas isoterms, sin más que sustituir las tracciones  $t''_k$  obtenidas en la ecuación (27) por la carga exterior aplicada en ausencia de grieta, que puede calcularse mediante cualquier método estándar de análisis.

La nomenclatura que se utilizará en los ejemplos que siguen se muestra en la Fig. 1, donde  $a$  es la semilongitud de grieta,  $b$  es la distancia desde el centro de la grieta a la superficie libre medida sobre el plano de la grieta,  $c$  es la distancia desde el centro de la grieta a un punto arbitrario de la misma, y  $\theta$  es el ángulo formado por el plano de la grieta y la superficie libre.

Las constantes termoelásticas utilizadas en todos los cálculos se detallan en el Apéndice 1.

El primer ejemplo es el de una carga puntual de apertura de valor  $P$  aplicada sobre los labios de la grieta. Este caso, de solución conocida, ha servido para comprobar la precisión del método. La Fig. 3 muestra la variación de los factores de intensidad de tensión normalizados respecto a  $K_0 = P/\sqrt{\pi a}$  en función de la posición del punto de aplicación de la carga. La diferencia con respecto a la solución exacta ha sido en todos los casos inferior al 1%.

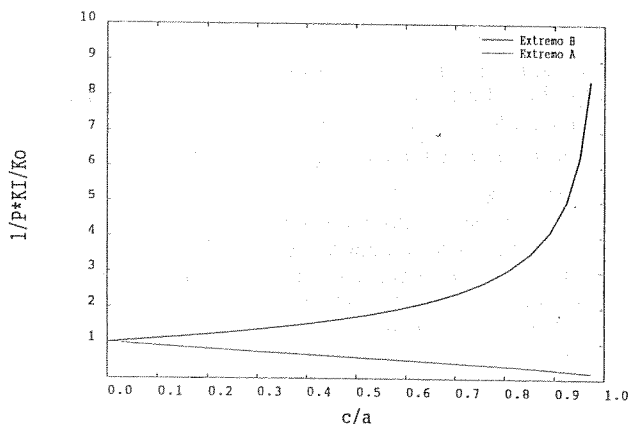


Fig. 3 Factores de intensidad de tensión para una carga puntual.

El siguiente ejemplo es el de una grieta, con  $\theta=45^\circ$ , sobre la que se aplica un flujo de calor constante  $h$ . En la Fig. 4 se ha representado la variación de los factores de intensidad de tensión a medida que la grieta se acerca a la superficie libre. Los valores de  $K$  están normalizados con respecto a  $K_0$ , que corresponde al valor de  $K_{II}$  para  $\theta=90^\circ$  y medio infinito.

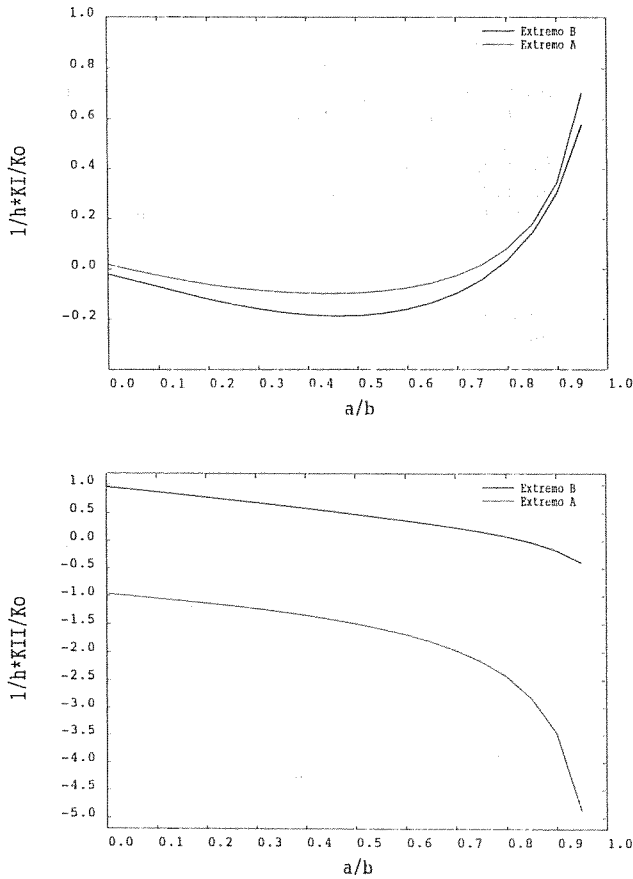


Fig. 4 Variación de  $K$  con la distancia ( $\theta=45^\circ$ ).

El tercer ejemplo corresponde a una grieta con  $a/b=0.8$ , sometida a un flujo de calor constante  $h$ . La Fig. 5 muestra los resultados obtenidos para los factores de intensidad de tensión en función del ángulo de la grieta.

Se puede observar que las posibilidades de variación de las constantes elásticas,  $C_{ijkl}$ , y las conductividades térmicas,  $k_{ij}$ , hacen muy difícil cualquier intento de normalización de los resultados. Sin embargo, la técnica descrita en este artículo permite obtener estimaciones muy aproximadas de los factores de intensidad de tensión, para un determinado material, que requieren tiempos de cálculo muy cortos en comparación con otras técnicas numéricas (tipo elementos finitos). Para demostrar la potencialidad del presente método, se ha considerado el problema de una grieta con  $a/b=0.5$  y  $\theta=45^\circ$  sobre la que se aplica un flujo puntual  $h$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 6, donde se representan los factores de intensidad de tensión en función del punto de aplicación de la carga térmica. El significado de  $K_0$  es el mismo que en el caso anterior para un flujo puntual aplicado en el centro de la grieta. Esta solución puede interpretarse como una función de Green  $f(x)$  para el problema termoelástico. Para un problema concreto, bastaría calcular el flujo de calor,  $h(x)$ , en ausencia de la grieta

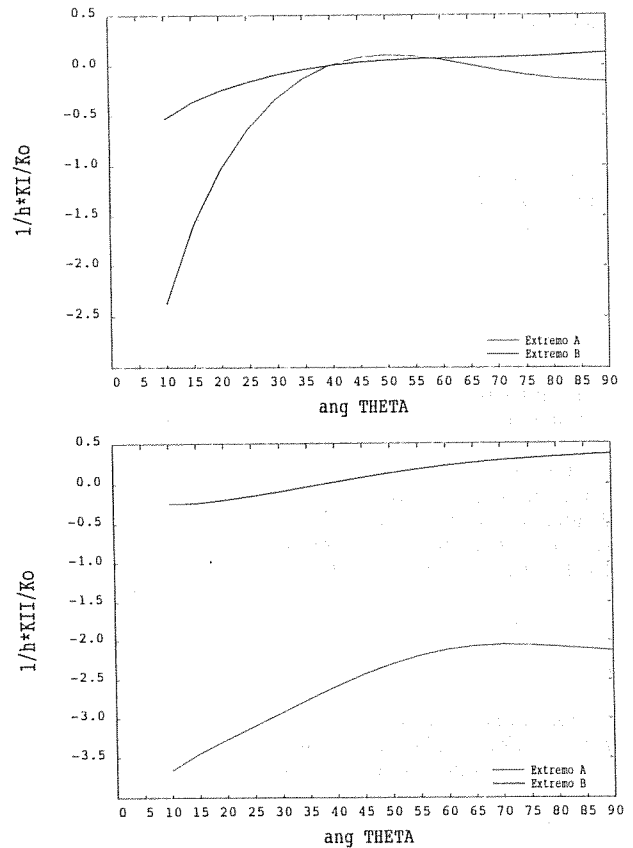


Fig. 5 Variación de  $K$  con el ángulo  $\theta$  ( $a/b=0.8$ ).

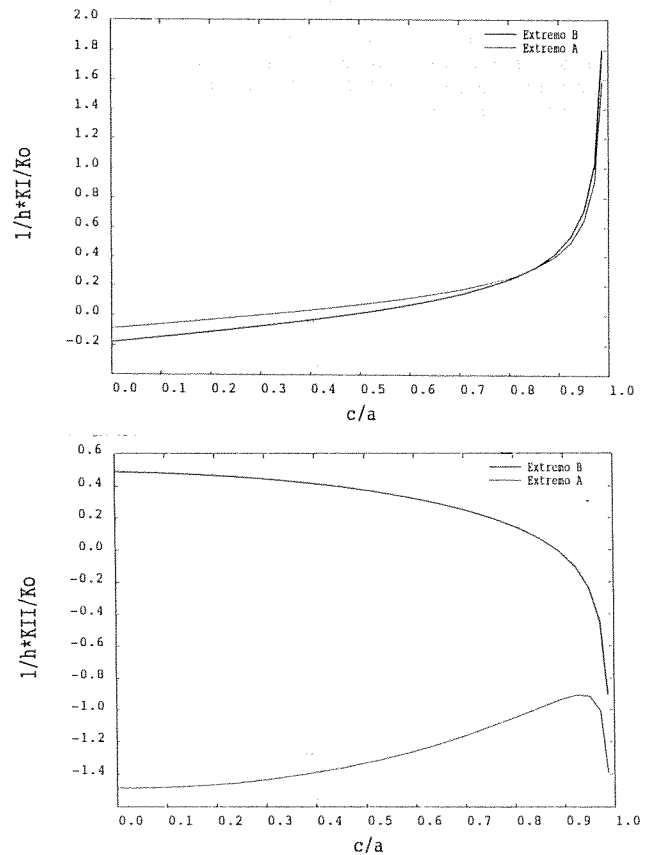


Fig. 6 Factores de intensidad de tensión para un flujo puntual ( $a/b=0.5$ ,  $\theta=45^\circ$ ).

mediante cualquier técnica estándar, y utilizar la función de la Fig. 6 como función de peso para determinar los factores de intensidad de tensión

$$K = \int_{\theta}^{\theta_0} f(x)h(x)dx \quad (29)$$

La técnica descrita en este artículo permite generar de forma rápida las funciones de Green para un determinado material (constantes  $C_{ijkl}$ ,  $k_{ij}$  y  $\beta_{ij}$ ) y una determinada configuración geométrica ( $a/b$  y  $\theta$ ).

## 6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo de dislocaciones para analizar el problema de una grieta sometida a cargas termomecánicas en un medio semi-infinito para el caso más general de anisotropía elástica. Para ello, ha sido necesario corregir la solución de desplazamientos y tensiones asociados a una dislocación térmica en un medio infinito mediante una solución imagen que garantiza el cumplimiento de las condiciones de contorno en la superficie libre.

Se ha encontrado que un tratamiento numérico adecuado de las ecuaciones resultantes conduce a estimaciones rápidas y precisas de los factores de intensidad de tensión.

Se han presentado diversos ejemplos de aplicación del método. Como aplicación de evidente interés práctico, hay que señalar la posibilidad de generar de forma muy rápida funciones de Green que permiten la evaluación de los factores de intensidad de tensión para un material y geometría dados sin más que evaluar numéricamente una integral.

**Agradecimientos.** Los autores desean expresar su agradecimiento al Departamento de Industria y Comercio del Gobierno Vasco y a la CICYT (proyecto MAT90-0105), por la financiación del presente trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Martínez-Esnaola, J.M., Bastero, J.M. y Arana, M., "Cargas térmicas sobre una grieta en elasticidad anisótropa", *Anales de Mecánica de la Fractura*, 8, pp. 203-208 (1991).
- [2] Sturla, F.A. and Barber, J.R., "Thermoelastic Green's functions for plane problems in general anisotropy", *J. Appl. Mech.*, 55, pp. 245-247 (1988).
- [3] Stroh, A.N., "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity", *Phil. Mag.*, 3, pp. 625-646 (1958).
- [4] Pargada, J., "Modelos de dislocaciones para grietas en termoelasticidad anisótropa", Proyecto Fin de Carrera, Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián (1992).
- [5] Atkinson, C. and Eftaxiopoulos, D., "Interaction between a crack and a free or welded boundary in media with arbitrary anisotropy", *Int. J. Fract.*, 50, pp. 159-182 (1991).

## Apéndice I

$$(C) = \begin{bmatrix} 100. & 40. & 15. & 0. & 0. & 0. \\ 40. & 50. & 8. & 0. & 0. & 0. \\ 15. & 8. & 10. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 30. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 12. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 5. \end{bmatrix}$$

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} .00001 & 0. & 0. \\ 0. & .00001 & 0. \\ 0. & 0. & .00001 \end{bmatrix}$$

$$(k) = \begin{bmatrix} 10. & 1. & x \\ 1. & 5. & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$