

APLICACION DE LA MECANICA DE LA FRACTURA A PROBLEMAS DE INYECCION DE MACIZOS FISURADOS

J. Planas y A. M. Fathy

Departamento De Ciencia De Materiales, Universidad Politécnica de Madrid.
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Ciudad Universitaria S/N, 28040 Madrid

Resumen. El artículo analiza del proceso de inyección de una fisura preexistente con un fluido que, con posterioridad, endurecerá por fraguado o polimerización. En este primer trabajo se empieza por analizar los tipos de fisura que uno puede encontrar, para centrarse inmediatamente en fisuras creadas por algún proceso transitorio y posteriormente cerradas por gravedad. El artículo presenta el sistema de ecuaciones que gobierna el proceso de inyección, y muestra que las ecuaciones de mecánica de la fractura son esenciales para tener en cuenta la apertura de la fisura provocada por la presión de inyección. Un método aproximado de análisis de las ecuaciones permite demostrar que la apertura de la fisura debido a la presión del fluido modifica de forma radical la evolución de la inyección. En particular, la presión en el taladro de inyección no aumenta monótonamente a caudal constante, como sucede si se ignora la deformabilidad del medio, sino que alcanza un máximo para descender después lentamente.

Abstract. This paper analyzes a crack grouting process with a viscous fluid. In this initial approach to the subject, the typologies of cracks are first discussed and then attention is restricted to cracks created in some transient event and closed by gravity later on. The paper presents the system of equations that govern the grouting process, and shows that fracture mechanics provides the essential equations to take into account the opening of the crack due to grouting pressures. A simplified method of analysis is presented which shows that the opening of the crack caused by the fluid pressure radically modifies the evolution of the grouting process. In particular, the grouting pressure in the borehole is no longer monotonically increasing at constant flow rate, as it is the case when the deformability of the medium is ignored, but goes through a maximum in the early moments of grouting and then decreases slowly.

1. INTRODUCCION

Este artículo trata de la inyección de grietas en grandes obras de hormigón o en macizos rocosos. Más específicamente, muestra como la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) puede ser utilizada para efectuar un planteamiento consistente del problema.

Discute en primer lugar las ideas básicas de la inyección, y los tipos de fisuras que uno puede encontrar en la práctica desde el punto de vista del efecto de la inyección (Secciones 2 y 3).

Describe a continuación cualitativamente el progreso de la inyección en fisuras cerradas por el peso propio para mostrar que se produce una apertura de la fisura cuando la presión de inyección sobrepasa la precompresión debida a las cargas permanentes (Sección 4).

A continuación del artículo presenta las ecuaciones que gobiernan la inyección para el caso de flujo radial. Se plantean primero las ecuaciones de flujo para fluido newtoniano en fisura lisa, que se integran analíticamente para el caso de fisura de apertura constante (Secciones 5 y 6). A continuación se determinan las ecuaciones que

relacionan la apertura de la fisura debidas a las presiones del fluido en la hipótesis de elasticidad lineal (Sección 7).

Para obtener un panorama preliminar del tipo de comportamiento que puede esperarse, se presenta una solución aproximada que transforma el conjunto de ecuaciones integrodiferenciales en el espacio y en el tiempo en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el tiempo, y se presentan los resultados numéricos para un caso particular (Sección 8). Las conclusiones básicas, entre las que destaca que la consideración de la deformabilidad del medio cambia radicalmente la evolución de la respuesta, cierran el artículo.

2. LA INYECCIÓN DE GRIETAS

Sin entrar en profundidad en la casuística de las inyecciones de grietas, el objetivo principal de la inyección es rellenar una grieta con un material inicialmente fluido cuyo posterior fraguado sella la grieta.

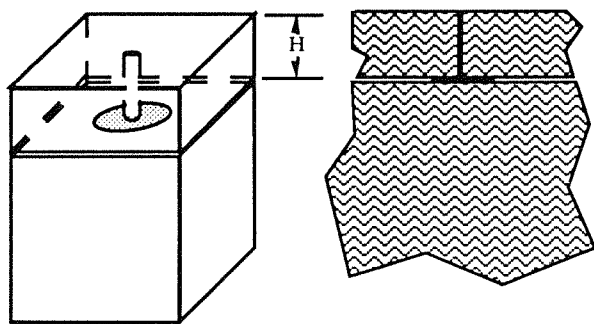


Fig. 1. Inyección axisimétrica de una fisura horizontal en un macizo.

El estudio del proceso de inyección pasa por resolver el problema de cómo el fluido se extiende entre los labios de la fisura, normalmente a partir de un taladro de inyección como se indica en la Fig. 1.

Dejando para más adelante el caso particular de la fisura axisimétrica, la aproximación más simple es suponer una ley de flujo de tipo Darcy, en la cual

$$\langle v \rangle = -k(w) \frac{\partial p}{\partial s} \quad (1)$$

donde $\langle v \rangle$ es la velocidad media del fluido dentro de la grieta, $\partial p / \partial s$ la derivada de la presión en la dirección de la velocidad media (el módulo del gradiente) y $k(w)$ una "permeabilidad", que depende explícitamente de la apertura de la fisura, w , además de otros parámetros (viscosidad, rugosidad, etc).

Lo más importante en este momento es notar que la permeabilidad depende drásticamente de la apertura de la fisura, por ejemplo, para una fisura de labios lisos y fluido newtoniano, la permeabilidad viene dada por

$$k(w) = \frac{w^2}{12 \eta} \quad (2)$$

donde η es la viscosidad (Véase, por ejemplo Bird, Armstrong and Hassager, 1987 [1].)

Como consecuencia de lo anterior, cabe distinguir entre las inyecciones a baja presión —que no producen movimientos apreciables en la estructura— y las inyecciones a presión elevada, que pueden producir movimientos locales apreciables y, en consecuencia, modificar la permeabilidad de la grieta y la totalidad del proceso de inyección. Hacia este segundo tipo de inyección va dirigido el presente trabajo, por lo que las ecuaciones que determinan la apertura de la fisura a lo largo del proceso de inyección son el objetivo fundamental.

Antes de descender a casos particulares, analizaremos los tipos de grietas con los que podemos enfrentarnos, atendiendo, fundamentalmente, a la forma de las

ecuaciones que relacionan la apertura de la grieta con las presiones de inyección.

3. TIPOS DE GRIETAS

Desde el punto de vista de la forma de las ecuaciones que rigen la evolución de su apertura, las fisuras se pueden clasificar en tres tipos:

1. *Grietas activas*. Son aquellas generadas por causas que están todavía en acción, de forma que la grieta está todavía creciendo o en estado crítico (creciendo a velocidad muy pequeña). Un ejemplo típico son las grietas generadas por deformaciones diferenciales (expansión química, retracción, entumecimiento, asientos diferidos) que siguen aumentando hasta el momento del estudio.

2. *Grietas estables*. Son aquellas generadas por causas que han finalizado su acción, dejando la grieta abierta. Es el caso límite del caso anterior y los ejemplos son los mismos con la condición de que cesaran con suficiente antelación al estudio.

3. *Grietas cerradas*. Son aquellas que se abrieron por acciones extraordinarias y luego volvieron a cerrarse debido a las cargas permanentes y que en el momento del estudio tienen sus caras comprimidas. Es el caso de grietas creadas por accidentes de todo tipo, en particular grietas horizontales producidas durante un terremoto.

Desgraciadamente la clasificación no es independiente de las condiciones de contorno, y una misma grieta puede pasar de una a otra situación al modificar esas condiciones. Por ejemplo, una grieta en una presa puede ser activa a embalse lleno, estar estabilizada cuando el nivel se encuentra entre el 50% y el 90% del máximo, y estar cerrada cuando el nivel desciende por debajo del 50%. Además, la inyección puede llevar de una situación de grieta cerrada o de grieta estable a una de grieta activa.

Obviamente en la práctica puede resultar difícil saber en qué situación se encuentra una grieta particular, porque tanto la geometría de la grieta como las condiciones de contorno reales suelen ser difíciles de determinar con precisión. Uno de los objetivos a largo plazo del estudio emprendido es, precisamente, establecer técnicas de detección del paso de una a otra situación.

4. EL PROCESO DE INYECCIÓN

El proceso de inyección está influido por los equipos y la estrategia de inyección que se utilice. Para fijar ideas, consideraremos una grieta en un gran macizo cerrada por acción gravitatoria, como la indicada en la Fig. 1, donde la inyección se realiza mediante una bomba de característica presión-caudal (p - Q) conocida (Fig. 2).

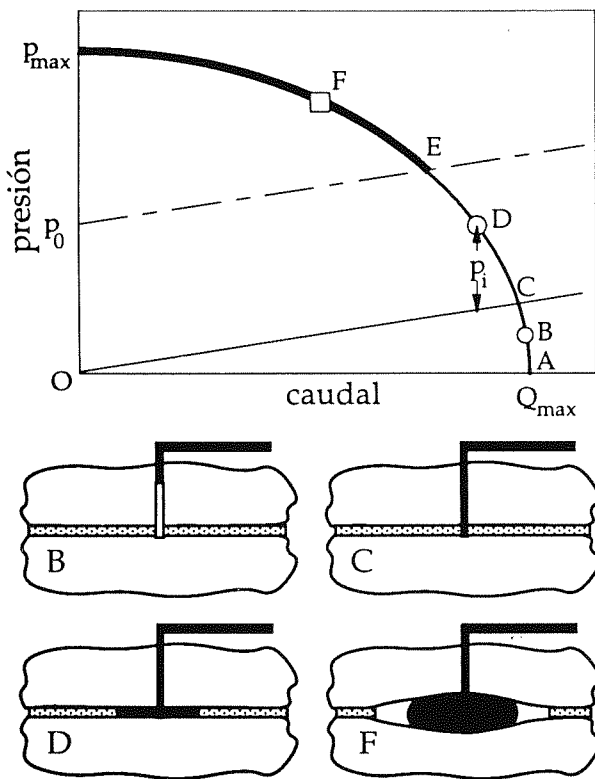


Fig. 2. La relación (p, Q) de la bomba y evolución de la inyección a lo largo del camino ABCDEF.

Para simplificar en lo posible el estudio de este proceso, supondremos que la inyección se realiza en un macizo muy extenso, y que la fisura es horizontal y sus propiedades isotropas. En esta situación, la inyección tendrá simetría axial y la presión de cierre de fisura será

$$p_0 = \rho_c g H \tag{3}$$

donde ρ_c es la densidad del macizo, g la aceleración de la gravedad y H es la profundidad de la grieta.

Prescindiendo del transitorio de arranque, el caudal inicial será el caudal máximo porque la pérdida de carga en las tuberías es nula (punto A de la Fig. 2). A medida que los tubos se van llenando, la pérdida de carga irá aumentando (*grosso modo* proporcionalmente a la longitud de tubo llena y proporcional al caudal si el régimen es laminar) hasta llegar al punto C en el que el fluido alcanza la boca de la grieta. A partir de este momento la presión en la boca de la grieta empieza a aumentar y vale p_i , la diferencia entre la presión entregada por la bomba y la pérdida de carga en la conducción, que se supone proporcional al caudal (régimen laminar) y está dada por la recta OC en la Fig. 2. Al principio (tramo CDE) el fluido entrará entre las caras de la grieta a presión inferior la presión de cierre p_0 debido al hormigón o la roca que yace sobre la

fisura, y por tanto la fisura no empezará a abrirse hasta alcanzar el punto E, en que $p_i = p_0$. A partir de este punto la fisura se abrirá hasta llegar a situaciones como la esquematizada en F.

El planteamiento del problema requiere definir las ecuaciones del flujo, que dependen de la apertura de la fisura, y las ecuaciones de las deformaciones de la estructura que relacionan dichas aperturas con las presiones de inyección.

5. LAS ECUACIONES DE FLUJO

Sean

- R_0 : radio del taladro de inyección.
- r : distancia radial al eje de inyección.
- t : tiempo contado desde el instante en que el fluido alcanza la boca de la grieta (punto C de la Fig 2).
- $R(t)$: radio de la zona inyectada.
- $p(r,t)$: distribución de presiones
- $w(r,t)$: distribución de aperturas de fisura.
- $\langle v \rangle(r,t)$: distribución de velocidades medias.

Es conveniente definir el caudal a la distancia r , $Q(r,t)$, como

$$Q(r,t) = 2\pi r w(r,t) \langle v \rangle(r,t) \tag{4}$$

Con esta notación las ecuaciones que definen el flujo son, dejando implícita, por brevedad, la dependencia de r y de t :

Ecuación de Darcy: la ecuación (1) se reescribe, en función de Q , p y w como

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Q}{2\pi r w k(w)} = 0 \tag{5}$$

Ecuación de continuidad: supuesto que el macizo es impermeable al fluido y que el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} + 2\pi r \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

Condiciones de contorno: Si se desprecian las tensiones capilares y se supone que la fisura está conectada con la atmósfera, la presión en el borde de inyección es nula:

$$p(R,t) = 0 \tag{7}$$

Además, la velocidad de avance del frente de inyección, dR/dt , coincide con la velocidad media del fluido en dicho frente, por lo que, usando (4) resulta

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Q(R,t)}{2\pi R w(R,t)} \tag{8}$$

La última ecuación de contorno corresponde a la ecuación de bombeo, y es la que introduce la ecuación característica de la bomba, las características de los conductos de inyección y la propia estrategia de inyección (manipulación de la bomba por el operario). Para centrar ideas, en lo que sigue supondremos inyección a caudal constante Q_i .

La relación entre el caudal de la bomba Q_i y el caudal en la boca de la fisura debe tener en cuenta que cuando la fisura se abre Δw en la boca, se produce un "alargamiento" aparente del tubo de inyección de volumen igual a $\pi R_0^2 \Delta w$, que debe ser rellenado por el caudal entrante. El resto será el caudal saliente. La correspondiente ecuación de contorno es

$$Q(R_0, t) = Q_i - \pi R_0^2 \left. \frac{\partial w(r, t)}{\partial t} \right|_{r=R_0} \quad (9)$$

El conjunto de ecuaciones (4)-(9) permite determinar presiones, caudales y tamaño de la zona inyectada en función del tiempo siempre que se conozca la evolución de la apertura de la fisura en el espacio y el tiempo.

6. INYECCION A APERTURA DE FISURA CONSTANTE

Cuando la apertura de la fisura permanece constante —lo que sucede cuando la presión en la boca de la fisura no supera la precompresión de la fisura debido al peso propio— las ecuaciones anteriores pueden integrarse analíticamente. Q resulta ser constante en el espacio y en el tiempo (igual al caudal de inyección Q_i) y la presión en la boca de la fisura p_i y el tiempo transcurrido t hasta que el radio de inyección ha alcanzado el valor R son

$$p_i = \frac{6\eta Q_i}{\pi w^3} \ln \frac{R}{R_0} \quad (10)$$

$$t = \frac{\pi w}{Q_i} (R^2 - R_0^2) \quad (11)$$

Estas ecuaciones muestran que a apertura de fisura constante la presión de inyección aumenta monótonamente con el tiempo en forma logarítmica y que si la inyección se prolonga suficientemente se alcanzará la presión necesaria para abrir la fisura (o para romper el material)

7. LA APERTURA DE LA FISURA

Supongamos que debido a la presión de inyección los labios de la fisura dejan de estar en contacto sobre un círculo de radio a , tal como se indica en la Fig. 3 (donde se ha considerado el caso $R < a$)

El problema se plantea de la forma siguiente: supuesta conocida la distribución de las presiones de inyección y

comportamiento elástico del macizo ¿Cual es el valor de a ? ¿Cual es el perfil de la apertura de la fisura?

La primera parte se resuelve escribiendo que, puesto que la grieta ya estaba formada antes de iniciar la inyección, la energía necesaria para propagarla es nula. En otras palabras, como el material ya está roto, la tenacidad de fractura es nula. Esto significa que la zona de fisura abierta es tal que el factor de intensidad de tensiones es nulo.

El factor de intensidad de tensiones puede obtenerse como la suma del producido por la presión de inyección más el producido por el peso propio (que es negativo). Un esquema de superposición elemental y el uso de las soluciones conocidas para el "penny shaped crack" (Tada, [2]) lleva a la condición

$$\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} p(r, t) dr - p_0 a = 0 \quad (12)$$

donde se sobreentiende que $p(r, t) = 0$ para $r > R$.

Por lo que respecta a la apertura de fisura, puede considerarse que, a pesar de estar mecánicamente cerrada (es decir, comprimida) la fisura tiene una cierta apertura hidráulica debida a la presencia de asperezas superficiales no encajadas. Si llamamos w_0 a esa apertura inicial de la grieta, podemos calcular la apertura adicional debida a las presiones por superposición de las debidas al peso propio (presión constante igual a p_0) y las debidas a la presión de inyección.

No se encontraron soluciones para la apertura de fisura en el caso de distribución de presión arbitraria, por lo que se ha buscado la solución a partir de la expresión para K_I dada en [2] para una carga en corona circular mediante el uso del teorema de reciprocidad.

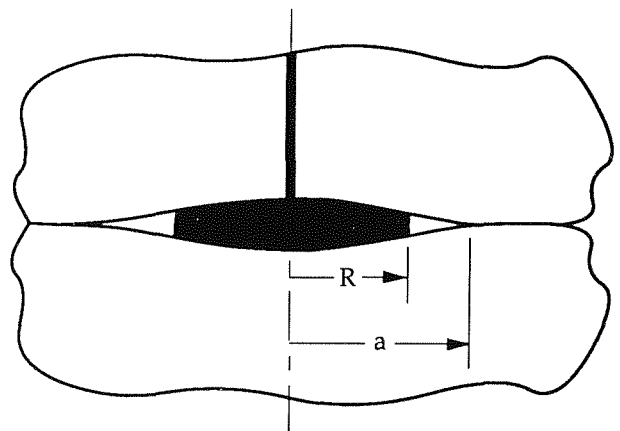


Fig. 3. Zona de inyección (en negro) y zona de pérdida de contacto.

La solución puede expresarse como una integral simple con un núcleo dado por una función elíptica incompleta, o como una integral doble con núcleos irracionales de más facil manejo numérico. Con esta última solución, la expresión para la apertura de fisura dada la distribución de presiones es

$$w(r,t) = w_0 - \frac{8}{\pi E'} p_0 \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{8}{\pi E'} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}} \left[\int_0^u \frac{r'}{\sqrt{u^2 - r'^2}} p(r',t) dr' \right] du \quad (13)$$

donde E' es el módulo de elasticidad efectivo en simetría radial, $E' = E/(1-\nu^2)$, y se sobreentiende de nuevo que $p(r', t)=0$ para $r' > R$.

8. UNA SOLUCIÓN APROXIMADA

El problema de la inyección axisimétrica de una fisura en un medio de grandes dimensiones, incluyendo la deformabilidad del medio) está gobernado por las ecuaciones de flujo (4)-(9) y las ecuaciones derivadas de mecánica de la fractura (12) y (13). Este sistema de ecuaciones integro-diferenciales no es estándar, y su aproximación numérica por métodos clásicos (elementos finitos o diferencias finitas) presenta ciertos problemas que se discutirán en otra parte.

Sin embargo, uno puede obviar esos problemas y hacerse una idea de la influencia de la deformabilidad del medio buscando una aproximación que elimine la necesidad de realizar una integración numérica en el espacio.

Una aproximación de este tipo puede conseguirse suponiendo que lo que más influye en la solución es la apertura media de la fisura en la zona inyectada, más que su precisa distribución espacial. La primera simplificación consiste, pues, en considerar una apertura de fisura constante en el espacio, pero variable en el tiempo. Con esta restricción, las ecuaciones de flujo (4)-(9) pueden integrarse analíticamente como se muestra en el Apéndice 1, con unos resultados que dependen de la variación de la apertura de la fisura en el tiempo.

La segunda simplificación consiste en relacionar de una manera razonable la apertura de la fisura con la deformabilidad del medio y con el nivel de presiones de inyección. La aproximación adoptada consiste en tomar para la deformación la predicha por las ecuaciones (12) y (13) cuando se sustituye la distribución de presiones real por una distribución uniforme como se indica en la Fig. 4. La distribución uniforme se define de forma que tanto la presión máxima como la resultante de las presiones son idénticas a las de la distribución real.

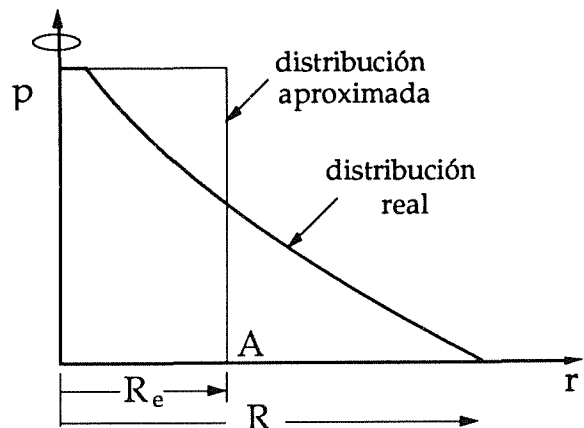


Fig. 4 Sustitución de la distribución real de presiones por una distribución uniforme.

Como apertura uniforme de la grieta se toma la calculada para los puntos del borde de la distribución aproximada de presiones (punto A de la Fig. 4).

El resultado, bastante laborioso, pero sin mayores problemas de cálculo, es un conjunto de tres ecuaciones que relacionan la presión de inyección p_i , la apertura de fisura w , y el tiempo t , con el radio de la inyección R (y con los datos del problema, por supuesto.)

Estas tres ecuaciones, que se obtienen en los Apéndices 1 y 2, toman la forma siguiente:

$$t = \frac{1}{Q_i} (\pi R^2 w - \pi R_0^2 w_0) \quad (14)$$

$$p_i = \frac{6\eta Q_i}{\pi w^3} A(R, \dot{w}) \quad (15)$$

$$w = w_0 + \frac{8R_0}{\pi E'} [p_i - \sqrt{p_0 (2p_i - p_0)}] B(R, \dot{w}) \quad (16)$$

donde las funciones $A(R, \dot{w})$ y $B(R, \dot{w})$ son adimensionales y dependen de la extensión de la inyección R (que se toma como variable independiente) y debilmente de la velocidad de apertura de la fisura \dot{w} . La expresión para $A(R, \dot{w})$ se incluye en el Apéndice 1 —ecuación (A7). $B(R, \dot{w})$ es proporcional al radio R_e de la distribución de presión uniforme equivalente definida en la figura 4, y se obtiene en el Apéndice 2.

En resumidas cuentas, se ha reducido el sistema de ecuaciones integrodiferencial inicial a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer grado en \dot{w} .

La integración numérica en el tiempo se ha efectuado usando una aproximación de diferencias centrales para \dot{w} (obtenida de incrementar la primera ecuación) y resolviendo para p_i , w y t iterativamente para cada R .

Se comprobó que la solución por iteración directa da problemas de convergencia. Creemos que ello es debido a que la relación entre p_i y w en la primera ecuación tiene derivada negativa. Un esquema de cálculo en la que se utiliza una linealización de estas ecuaciones en las variables p_i y w resultó dar buenos resultados.

La Fig. 5 muestra la solución obtenida para un caso particular correspondiente a la inyección con una resina de alta viscosidad (120 Pa s), a caudal constante de 2 l/min, de una fisura de 1 mm de apertura inicial situada a una profundidad de unos 20 m en una roca con un módulo de elasticidad efectivo de 20 GPa. En la figura se compara la solución correspondiente a una fisura de apertura constante (medio supuestamente indeformable) con la solución aproximada teniendo en cuenta la deformabilidad del medio.

Como puede observarse, la variación de la distancia inyectada no se ve esencialmente perturbada en cuanto a su tendencia, que es monótona creciente en ambos casos, con reducciones en el alcance del orden del 20% cuando el medio es deformable.

En cambio, la respuesta de la presión es completamente diferente. En lugar de ser monótona creciente, la deformabilidad del medio hace que la presión suba primero muy rápidamente (como si la fisura no se abriera) hasta una presión de unos 12 MPa, para disminuir a continuación muy suavemente. En el periodo de tiempo estudiado, la deformabilidad del medio

reduce la presión de inyección a un cuarto de la que se predice si se desprecia la deformabilidad.

9. CONCLUSIONES

Del trabajo realizado hasta el momento se pueden extraer las siguientes conclusiones.

1. La mecánica de la fractura provee herramientas adecuadas para analizar el proceso de inyección de fisuras ya existentes.
2. La simplificación propuesta para poder integrar semianalíticamente las ecuaciones que rigen el proceso de inyección permite obtener resultados cualitativos de la evolución de las variables básicas de la inyección.
3. La deformabilidad de la estructura es esencial en el estudio de la inyección. Cuando se mantiene el caudal constante, la presión de inyección está limitada por la deformabilidad de la estructura y después de alcanzar un máximo se hace decreciente.

AGRADECIMIENTOS. Los autores agradecen el estímulo y la ayuda financiera proporcionada por RODIO Cimentaciones Especiales, S.A. en el Proyecto de Investigación P92-0405-206 (OTT de Universidad Politécnica de Madrid)

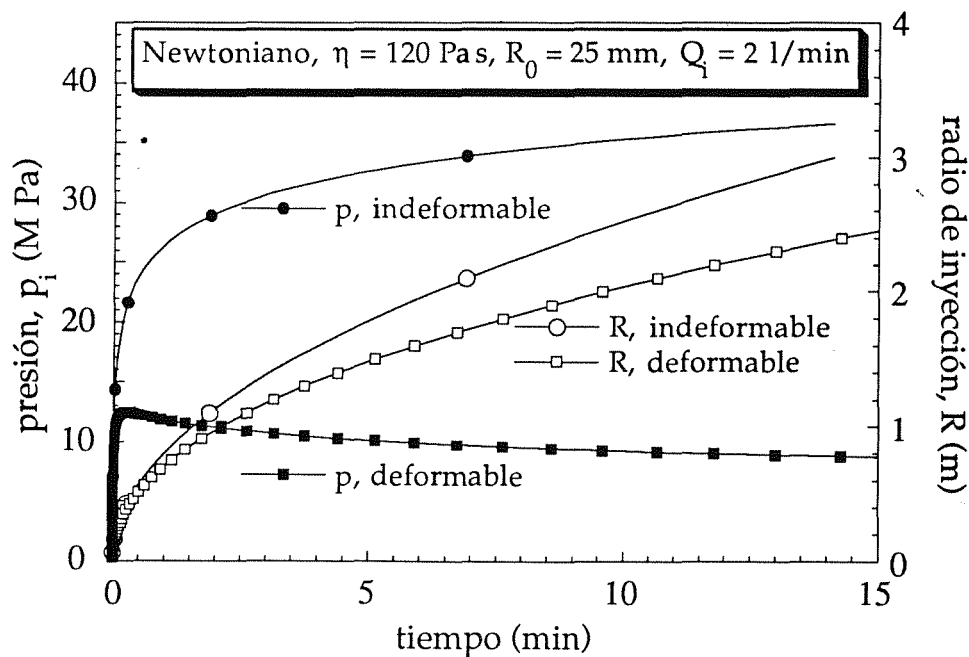


Fig. 5. Comparación de la evolución de presión y radio de la zona inyectada para hipótesis de medio indeformable (apertura de grieta constante) y medio deformable con un módulo de elasticidad de 20 GPa. En ambos casos la apertura hidráulica inicial de la fisura se ha supuesto de 1 mm, y la presión de cierre debido a la cubierta de 0.5 MPa.

10. REFERENCIAS

- [1] Bird, R. B., Armstrong, R.C. and Hassager, O., "Dinamics of polymeric liquids. Volume 1: Fluid Mechanics.", Second edition, John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [2] Tada, H., Paris, P. and Irwin, G. (1985). "The Stress Analysis of Cracks Handbook," Del Research Corp., St. Louis, Missouri, 1985.

APENDICE 1. Integración analítica de las ecuaciones de flujo para apertura uniforme variando en el tiempo

Cuando sobre la zona de inyección se puedan considerar aperturas aproximadamente constantes en el espacio, de forma que

$$w = w(t), \quad \frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = \frac{dw(t)}{dt} = \dot{w}(t) \quad (A1)$$

es posible integrar la ecuación (6) entre R_0 y r , y tener en cuenta (9) para obtener la distribución de caudales

$$Q(r,t) = Q_i - \pi r^2 \dot{w}(t) \quad (A2)$$

La evolución temporal del proceso se obtiene substituyendo el caudal de la ecuación (A2) en la ecuación (8) e integrando la ecuación resultante en el tiempo. De aquí resulta la expresión para el tiempo transcurrido hasta que el frente de inyección alcanza la distancia R

$$t = \frac{1}{Q_i} (\pi R^2 w - \pi R_0^2 w_0) \quad (A3)$$

La distribución de presiones se obtiene substituyendo ésta ultima relación en la ecuación de Darcy (5) e integrando respecto de r entre r y $R(t)$ con la condición de contorno (7):

$$p(r,t) = \frac{Q_i}{2\pi w k(w)} \ln \frac{R}{r} - \frac{\dot{w}}{4w k(w)} (R^2 - r^2) \quad (A4)$$

De aquí, la presión de inyección $p_i = p(R_0, t)$ resulta

$$p_i = \frac{Q_i}{2\pi w k(w)} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{\dot{w}}{4w k(w)} (R^2 - R_0^2) \quad (A5)$$

que puede reescribirse en la forma mostrada en la ecuación (15) usando (2) y escribiendo

$$A(R, \dot{w}) = \ln \frac{R}{R_0} - \frac{\pi \dot{w}}{2Q_i} (R^2 - R_0^2) \quad (A7)$$

APENDICE 2. Determinación de la distribución de presiones aproximada y de la apertura de fisura asociada

El radio R_e se obtiene de imponer la igualdad de resultantes de la fuerza de presión. La resultante de la distribución de presiones (A4), con la precaución de poner $p=p_i$ para $r < R_0$, resulta ser

$$F = \frac{Q_i}{4w k(w)} (R^2 - R_0^2) \left[1 - \pi (R^2 + R_0^2) \frac{\dot{w}}{2Q_i} \right] \quad (A8)$$

Igualando esta resultante a $\pi R_e^2 p_i$, se obtiene

$$R_e = \sqrt{\frac{F}{\pi p_i}} = R_0 B(R, \dot{w}) \quad (A9)$$

donde

$$B(R, \dot{w}) = \frac{1}{\sqrt{2} R_0} (R^2 - R_0^2)^{1/2} \left[1 - \pi (R^2 + R_0^2) \frac{\dot{w}}{2Q_i} \right]^{1/2} \quad (A10)$$

Una vez obtenido R_e , el radio a de la zona de pérdida de contacto se obtiene fácilmente de (13):

$$a = R_e \frac{p_i}{\sqrt{p_0(2p_i - p_0)}} \quad \text{con } p_i \geq p_0 \quad (A11)$$

El aumento de la apertura de fisura debido a la presión de inyección, en el punto A de la Fig. 4, se determina usando la ecuación (14) y la apertura total resulta ser, después de substituir (A11)

$$w = w_0 + \frac{8}{\pi E'} R_e \left[p_i - \sqrt{p_0(2p_i - p_0)} \right] \quad (A12)$$

con $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$.