

MODELO DE ZONA DE CONTACTO EN FRACTURA PARA LA PREDICCIÓN DE SU RAMIFICACIÓN O RELAJACIÓN PLÁSTICA

Bastero de Eleizalde, C.*; Sánchez Benito, M.I.**

* E.T.S. de Ingenieros Industriales.
 Universidad de Navarra.
 Paseo Manuel de Lardizabal, 13. Apdo. 1674. 20009 San Sebastian

** Departamento de Matemática Aplicada.
 E.T.S. de Ingenieros Industriales y de Telecomunicacion
 Alda de Urquijo s/n, Bilbao 48013.

Resumen. Este trabajo se centra en materiales isotropos soldados a un sustrato rígido con una grieta de despegamiento en su intercara. Se usa el modelo de zona de contacto, obteniendo resultados para el campo de desplazamientos y el campo de tensiones en la punta de la grieta. Teniendo en cuenta estos resultados es posible predecir el ángulo donde tendrá lugar la posible relajación plástica o ramificación de la fractura.

Abstract. This paper focuses on isotropic materials welded to a rigid substrate with a debond crack on its interface. The contact zone model is used obtainig results for the near-tip displacement and stress fields. Using these results, it is possible to predict the angle at which the crack may branch or plastic relaxation may occur.

1. INTRODUCCION.

Bastero y Atkinson [1] estudiaron la banda de deslizamiento asimétrica que proviene de la punta de una grieta cuando tenía lugar un proceso de despegamiento entre un sólido isotropo compresible y una matriz rígida. Estos resultados coincidían con los obtenidos por Atkinson y Bastero [2], en un caso homogéneo, cuando la asimetría era debida a la creación de una barrera al deslizamiento en una cara de la grieta y la existencia de una única banda de deslizamiento estaba relacionada con las condiciones de crecimiento de la grieta por fatiga.

En este caso se plantea también una grieta por despegamiento en un medio no homogéneo -una matriz elástica despegándose de un sustrato rígido-, pero la compresibilidad de la matriz isotropa -como es bien conocido- introduce unos campos singulares de tipo oscilatorio en la punta de la grieta, cuya falta de sentido físico es patente. El modo de evitar la interpenetración entre los labios de la grieta ya fué sugerida por Comninou [3] y Atkinson [4] mediante la suposición de la existencia de una zona de contacto en la que se asegura el contacto entre ellas pero se admite la posibilidad de deslizamiento.

Con este modelo se pueden obtener los valores de las tensiones cortantes máximas que permitirán conocer los ángulos de ramificación o de relajación -en el caso de plasticidad de corto alcance (small scale yielding) en la punta de la grieta. Se demuestra que este modelo predice el ángulo que va suavemente al límite incompresible, $\arccos(1/3)$.

Por último, aunque la forma del campo de tensiones en el modelo de la zona de contacto difiere del modelo con interpenetración, se observa cómo el modelo de contacto mantiene el valor de la integral G -velocidad de liberación de energía-.

2. GRIETA ABIERTA.

Se considera un material isotropo soldado a un sólido rígido, en cuya intercara de unión surge una grieta semiinfinita por despegamiento. Sin pérdida de generalidad se estudian el campo de tensiones y desplazamientos cerca de la punta de la grieta que surge debido a cargas puntuales, ya que diferentes cargas conducirían a campos similares en la punta de la grieta. Debido a la geometría del problema es conveniente usar coordenadas polares (r,θ) .

La grieta semiinfinita está situada en la intercara con cargas puntuales P, Q situadas a una distancia l de la punta de la grieta, donde se sitúa el origen de coordenadas, considerando el origen del ángulo polar en la intercara, tal y como aparece en la figura 1.

Aplicando la transformada de Mellin a las ecuaciones de elasticidad plana, ver Tranter [5], se obtiene

$$2 \cdot \mu \cdot (\tilde{u}_r + i \cdot \tilde{u}_\theta) = \kappa \cdot A \cdot e^{-i\theta(s+2)} + (s+1) \cdot \bar{A} \cdot e^{i\theta(s+2)} - \bar{B} \cdot e^{i\theta s}$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - i \cdot \tilde{\sigma}_{r\theta} = (s+1) \cdot [-A \cdot e^{-i\theta(s+2)} + (s+1) \cdot \bar{A} \cdot e^{i\theta(s+2)} - \bar{B} \cdot e^{i\theta s}]$$

donde u_r y u_θ son las componentes en (r, θ) de los desplazamientos y $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ las componentes de las tensiones. Además \tilde{u}_r and \tilde{u}_θ son las transformadas de Mellin de u_r y u_θ , respectivamente, dadas por

$$\tilde{u}_i = \int_0^\infty u_i \cdot r^s \cdot dr \quad (1)$$

y $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ corresponden a

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \int_0^\infty \sigma_{ij} \cdot r^{s+1} \cdot dr \quad (2)$$

Como condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \text{en } \theta = 0 & \quad u_r = u_\theta = 0 \\ \text{en } \theta = \pi & \quad \sigma_{\theta\theta} - i \cdot \sigma_{r\theta} = -(P-i \cdot Q) \cdot \delta(r-l) \end{aligned}$$

y aplicando la transformada de Mellin

$$\begin{aligned} \text{en } \theta = 0 & \quad \tilde{u}_r + i \cdot \tilde{u}_\theta = 0 \\ \text{en } \theta = \pi & \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta} - i \cdot \tilde{\sigma}_{r\theta} = -(P-i \cdot Q) \cdot l^{s+1} \end{aligned}$$

Tras cierta algebra se obtiene

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - i \cdot \tilde{\sigma}_{r\theta} = (s+1) \cdot [-A \cdot (\kappa \cdot e^{i\theta s} + e^{-i\theta(s+2)}) + (s+1) \cdot \bar{A} \cdot (e^{i\theta(s+2)} - e^{i\theta s})] \quad (3)$$

$$2 \cdot \mu \cdot (\tilde{u}_r + i \cdot \tilde{u}_\theta) = \kappa \cdot A \cdot [e^{-i\theta(s+2)} - e^{i\theta s}] + (s+1) \cdot \bar{A} \cdot [e^{i\theta(s+2)} - e^{i\theta s}] \quad (4)$$

donde

$$A = \frac{(P - i \cdot Q) \cdot l^{s+1}}{(s+1) \cdot (\kappa \cdot e^{i\pi s} + e^{-i\pi s})} \quad (5)$$

Para calcular los valores de las tensiones y desplazamientos en la punta de la grieta se aplica el teorema de inversión de la transformada de Mellin

$$\sigma_{\theta\theta} - i \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - i \tilde{\sigma}_{r\theta}) \cdot r^{-s-2} ds$$

$$u_r + i u_\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} (\tilde{u}_r + i \tilde{u}_\theta) \cdot r^{-s-1} ds$$

con $-3/2 < \gamma < -1/2$ y $-3/2 < \epsilon < -1/2$ y para ello será necesario estudiar los polos de las expresiones anteriores, que serán los ceros del denominador de A, esto es

$$s_n = -(n+1/2) + i\alpha, \quad \bar{s}_n = -(n+1/2) - i\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \kappa$$

A partir del teorema de inversión se cierra el contorno integral por la izquierda y se aplica el teorema de los residuos, obteniendo las expresiones correspondientes a los desplazamientos

$$2 \cdot \mu \cdot (u_r + i \cdot u_\theta) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{(P-i \cdot Q) \cdot l^{i\alpha-1/2} \cdot \sqrt{\kappa}}{\pi \cdot (1 - 2 \cdot i \cdot \alpha)} \cdot \{e^{\theta(\alpha-i/2)} - e^{-\theta(\alpha+3i/2)}\} \cdot r^{1/2-i\alpha} - \\ & - \frac{(P+i \cdot Q) \cdot l^{-i\alpha-1/2}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\kappa}} \cdot e^{\theta\alpha} \cdot \{e^{i\theta/2} - e^{-3i\theta/2}\} \cdot r^{1/2+i\alpha} \end{aligned}$$

Al considerar estos desplazamientos en la punta de la grieta, es decir, en $\theta = \pi$, aparece la conocida interpenetración entre las caras de la grieta, ya que s_n son valores complejos

$$u_{\theta}(r,\pi) = \frac{-(1+\kappa) \cdot (r/l)^{1/2}}{2 \cdot \mu \cdot \pi \cdot (1+4 \cdot \kappa^2)} \cdot \left[P \cdot \left(\cos(\alpha \cdot \ln(l/r)) - 2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot \ln(l/r)) \right) + Q \cdot \left(\sin(\alpha \cdot \ln(l/r)) + 2 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot \ln(l/r)) \right) \right]$$

Esto sugiere definir un modelo con zona de contacto, como Comninou [3] y Atkinson [4], que se estudia en el apartado siguiente.

Por otro lado, se calcula la velocidad de liberación de energía, definida como

$$G = \lim_{\delta b \rightarrow 0} \frac{1}{\delta b} \cdot \int_0^{\delta b} [\sigma_{r\theta}(r, 0) \cdot u_r(r - \delta b, \pi) + \sigma_{\theta\theta}(r, 0) \cdot u_{\theta}(r - \delta b, \pi)] \cdot dr$$

A partir de (3) y (4), y aplicando el teorema de inversión, se determinan las tensiones y los desplazamientos correspondientes, obteniendo

$$G = \frac{\kappa + 1}{4 \cdot \mu \cdot \pi \cdot l} \cdot (P^2 + Q^2) \tag{6}$$

3. ZONA DE CONTACTO.

Para evitar el problema de la interpenetración se considera que las caras de la grieta permanecen en contacto en una región próxima a la punta de ésta, de longitud *a*, tal y como aparece en la figura 2.

Las condiciones de contorno a considerar son:

en $\theta = 0$	$u_r = u_{\theta} = 0$	
en $\theta = \pi$	$u_{\theta} = 0$	$r < a$
en $\theta = \pi$	$\sigma_{\theta\theta} = -P \cdot \delta(r-l)$	$r > a$
en $\theta = \pi$	$\sigma_{r\theta} = -Q \cdot \delta(r-l)$	$r > a$
en $\theta = \pi$	$\sigma_{r\theta} = 0$	$r < a$

Aplicando la transformada de Mellin a estas condiciones se obtiene

en $\theta = 0$	$\bar{u}_r + i \cdot \bar{u}_{\theta} = 0$
en $\theta = \pi$	$\bar{u}_{\theta} = a^{s+1} \cdot U_{-}(s)$
en $\theta = \pi$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta} - i \cdot \bar{\sigma}_{r\theta} = -(P-i \cdot Q) \cdot l^{s+1} + a^{s+1} \cdot \sigma_{+}(s)$

donde

$$U_{-}(s) = \int_1^{\infty} u_{\theta} \cdot r_1^s \cdot dr_1 \tag{7}$$

$$\sigma_{+}(s) = a \cdot \int_0^1 \sigma_{\theta\theta} \cdot r_1^{s+1} \cdot dr_1 \tag{8}$$

son funciones incógnitas, y $r = r_1 \cdot a$.

A partir de las expresiones obtenidas para las transformadas de las tensiones y los desplazamientos, y teniendo en cuenta las expresiones anteriores se obtiene la siguiente ecuación funcional que permitirá obtener σ_{+} y U_{-} :

$$\frac{4 \cdot \mu}{1 + \kappa} \cdot U_{-} \cdot K(s) = \sigma_{+} - \left(P \cdot x^{s+1} + \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \cdot Q \cdot x^{s+1} \cdot \tan(\pi s) \right)$$

donde

$$K(s) = \frac{(s+1) \cdot \cos(\pi \cdot s - i \cdot \pi \cdot \alpha) \cdot \cos(\pi \cdot s + i \cdot \pi \cdot \alpha)}{\cos(\pi \cdot s) \cdot \sin(\pi \cdot s)}$$

se descompone, utilizando las propiedades de la función Gamma, como

$$K(s) = K_{+}(s) \cdot K_{-}(s)$$

con

$$K_{+}(s) = \frac{\Gamma(3/2 + s) \cdot \Gamma(s+2)}{\Gamma(3/2 + s - i \cdot \alpha) \cdot \Gamma(3/2 + s + i \cdot \alpha)}$$

regular y no nula en el semiplano $Re(s) > -3/2$ y

$$K_{-}(s) = \frac{\Gamma(-1/2 - s) \cdot \Gamma(-s)}{\Gamma(-1/2 - s - i \cdot \alpha) \cdot \Gamma(-1/2 - s + i \cdot \alpha)}$$

regular y no nula en el semiplano $Re(s) < -1/2$.

Teniendo en cuenta estas descomposiciones la ecuación funcional se transforma en:

$$C(s) + \frac{\sigma_{+}(s)}{K_{+}(s)} = U_{-}(s) \cdot K_{-}(s) \cdot \frac{4 \cdot \mu}{1 + \kappa} \tag{9}$$

donde

$$C(s) = - \left(P \cdot x^{s+1} + \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \cdot Q \cdot x^{s+1} \cdot \tan(\pi \cdot s) \right) \cdot \frac{1}{K_+(s)}$$

se descompone aplicando el teorema de Cauchy:

$$C(s) = C_+(s) + C_-(s)$$

con

$$C_+(s) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{C(z)}{z-s} \cdot dz$$

regular y no nula en el semiplano $Re(s) > -3/2$ y

$$C_-(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\varepsilon'-i\infty}^{\varepsilon'+i\infty} \frac{C(z)}{z-s} \cdot dz$$

regular y no nula en el semiplano $Re(s) < -1/2$, con $-3/2 < \varepsilon < Re(s) < \varepsilon' < -1/2$.

De esta forma la ecuación (9) se convierte en:

$$C_+(s) + \frac{\sigma_+(s)}{K_+(s)} = U_-(s) \cdot K_-(s) \cdot \frac{4 \cdot \mu}{1+\kappa} - C_-(s) \quad (10)$$

En la ecuación anterior el miembro de la izquierda representa una función analítica en el semiplano $Re(s) > -3/2$, mientras que el segundo lo es en $Re(s) < -1/2$, de lo que se deduce que uno y otro miembro son la prolongación analítica, y por tanto definen una función $J(s)$ que es analítica en todo el plano complejo:

$$C_+(s) + \frac{\sigma_+(s)}{K_+(s)} = U_-(s) \cdot K_-(s) \cdot \frac{4 \cdot \mu}{1+\kappa} - C_-(s) = J(s)$$

Como $l/a \gg 1$ se puede obtener una aproximación de $C_+(s)$ cerrando el contorno integral por la izquierda y usando el teorema de los residuos

$$C_+(s) = \left(\frac{l}{a} \right)^{-1/2} \left[\left(\frac{l}{a} \right)^{i\alpha} (P-iQ) \cdot \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(1/2+i\alpha) \cdot \Gamma(i\alpha)} \cdot \frac{1}{(s_1-s)} + \left(\frac{l}{a} \right)^{-i\alpha} \cdot (P+iQ) \cdot \frac{\Gamma(-2i\alpha)}{\Gamma(1/2-i\alpha) \cdot \Gamma(-i\alpha)} \cdot \frac{1}{(s_1-s)} \right] + O \left(\frac{l}{a} \right)^{-3/2} \quad (11)$$

Imponiendo las condiciones de que en el caso más desfavorable $\sigma_{\theta\theta}$ presente una singularidad integrable

para $r_1 \rightarrow 1^-$ y que u_θ sea continuo en $\theta = \pi$, se deduce que $J(s)$ es idénticamente nulo, obteniendo:

$$\sigma_+(s) = -C_+(s) \cdot T_+(s) \quad (12)$$

y

$$U_-(s) = \frac{(1+\kappa) \cdot C_-(s)}{4 \cdot \mu \cdot K_-(s)} \quad (13)$$

Considerando la expresión obtenida para $\sigma_+(s)$ se deducen las tensiones en $\theta = 0$, a partir de su transformada, aplicando el teorema de inversión de la transformada de Mellin, obteniendo:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1+\kappa) \cdot (1+4 \cdot \alpha^2) \cdot C_+(-2)}{4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa} \cdot a} + O[r] \quad (14)$$

y

$$\sigma_{r\theta} = - \frac{\alpha \cdot (1+\kappa) \cdot C_+(-3/2) \cdot a^{-1/2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa}} \cdot r^{-1/2} + O[r^{1/2}] \quad (15)$$

Análogamente se obtienen los desplazamientos en $\theta = \pi$

$$u_r(r,\pi) = \frac{\alpha \cdot \sqrt{\kappa} \cdot C_+(-3/2) \cdot a^{-1/2}}{\mu \cdot \sqrt{\pi}} \cdot r^{1/2} + O[r^{3/2}] \quad (16)$$

$$u_\theta(r,\pi) = O[r^{3/2}] \quad (17)$$

y el campo de tensiones en $\theta = \pi$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\pi) = \frac{\alpha \cdot C_+(-3/2) \cdot a^{-1/2} \cdot r^{-1/2}}{4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa}} \cdot \left(3 \cdot \sin \frac{\theta}{2} + (1+2 \cdot \kappa) \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (18)$$

$$\sigma_{r\theta}(r,\pi) = - \frac{\alpha \cdot C_+(-3/2) \cdot a^{-1/2} \cdot r^{-1/2}}{4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa}} \cdot \left(3 \cdot \cos \frac{\theta}{2} + (1+2 \cdot \kappa) \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19)$$

A partir de la definición de $\sigma_+(s)$ y aplicando el teorema de inversión se obtiene $\sigma_{\theta\theta}$ en $\theta = \pi$, $r < a$:

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\pi) \approx - \frac{\alpha \cdot (\kappa - 1) \cdot C_+^{(-3/2)} \cdot a^{-1/2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa}} \cdot a^{-1/2} \cdot r^{-1/2} + \frac{(1 + \kappa) \cdot (1 + 4 \cdot \alpha^2) \cdot C_+^{(-2)}}{4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\kappa} \cdot a} \quad (20)$$

Para evaluar $\sigma_{\theta\theta}(r,\pi)$ en el otro extremo de la zona de contacto se considera la definición de $\sigma_+(s)$ y el teorema Tauberiano que relaciona el comportamiento de $\sigma_+(s)$ cuando $|s| \rightarrow \infty$ y $\sigma_{\theta\theta}(r,\pi)$ cuando $r_1 \rightarrow 1^-$, obteniendo:

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{l^{-1/2} (a-r)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\left(\frac{l}{a} \right)^{i\alpha} (P-iQ) \cdot \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(1/2+i\alpha) \cdot \Gamma(i\alpha)} - \left(\frac{l}{a} \right)^{-i\alpha} (P+iQ) \cdot \frac{\Gamma(-2i\alpha)}{\Gamma(1/2-i\alpha) \cdot \Gamma(-i\alpha)} \right] \quad (21)$$

cuando $r \rightarrow a^-$.

Análogamente a partir de $U_-(s)$ se obtiene u_θ cuando $r \rightarrow a^+$ en $\theta = \pi$:

$$u_\theta \approx \frac{1+\kappa}{2\mu\sqrt{\pi}} \cdot l^{-1/2} (r-a)^{1/2} \left[\left(\frac{l}{a} \right)^{i\alpha} (P-iQ) \cdot \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(1/2+i\alpha) \cdot \Gamma(i\alpha)} + \left(\frac{l}{a} \right)^{-i\alpha} (P+iQ) \cdot \frac{\Gamma(-2i\alpha)}{\Gamma(1/2-i\alpha) \cdot \Gamma(-i\alpha)} \right] \quad (22)$$

La longitud de la zona de contacto, a , se determina de la condición de que $\sigma_{\theta\theta}(r,\pi)$ en $r = a^-$ sea finita, esto es

$$W \cdot \cos[\alpha \cdot \log(l/a)] - V \cdot \sin[\alpha \cdot \log(l/a)] = 0$$

donde

$$W = Rl \left[(P - i \cdot Q) \cdot \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(1/2+i\alpha) \cdot \Gamma(i\alpha)} \right]$$

y

$$V = Im \left[(P - i \cdot Q) \cdot \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(1/2+i\alpha) \cdot \Gamma(i\alpha)} \right]$$

Con esta condición,

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\pi) \approx \frac{-4 \cdot \alpha \cdot l^{-1/2} \cdot (a-r)^{1/2}}{a \cdot \sqrt{\pi}} \cdot [W \cdot \sin[\alpha \cdot \log(l/a)] + V \cdot \cos[\alpha \cdot \log(l/a)] + O(a/l)] \quad r < a \quad (23)$$

$$u_\theta \approx \frac{2 \cdot (1 + \kappa) \cdot \alpha \cdot l^{-1/2} \cdot (r-a)^{3/2}}{3 \cdot \mu \cdot \sqrt{\pi} \cdot a} \cdot [W \cdot \sin[\alpha \cdot \log(l/a)] + V \cdot \cos[\alpha \cdot \log(l/a)] + O(a/l)] \quad r > a \quad (24)$$

Para obtener la solución real hay que imponer la condición de que la grieta se abra, de forma que el coeficiente de $(r-a)^{3/2}$ en u_θ debe ser positivo, y la condición anterior se traduce en las ecuaciones

$$\sin[\alpha \cdot \log(l/a)] = \frac{W}{(W^2 + V^2)^{1/2}}$$

y

$$\cos[\alpha \cdot \log(l/a)] = \frac{V}{(W^2 + V^2)^{1/2}}$$

que permiten determinar la relación entre l y a

$$a = l \cdot e^{-\arctg(W/V)/\alpha} \quad (25)$$

Teniendo en cuenta esta relación, (11) se convierte en

$$C_+(s) = e^{-\arctg(W/V)/(2\alpha)} \cdot \frac{2\alpha \cdot (W^2 + V^2)^{1/2}}{9/4 + \alpha^2 + 3s + s^2}$$

y por tanto

$$\bar{C}_+(s) = C_+(s)$$

y

$$C_+^{(-3/2)} = \frac{2}{\alpha} \cdot e^{-\arctg(W/V)/(2\alpha)} \cdot (W^2 + V^2)^{1/2} \quad (26)$$

De esta forma, a partir de (14), (15) y (26) se obtiene

$$\sigma_{r\theta}(r,0) = -\frac{(1+\kappa)}{\sqrt{\pi}} \cdot (W^2+V^2)^{1/2} \cdot (r \cdot l)^{-1/2} + 0[r^{1/2}]$$

y

$$\sigma_{\theta\theta}(r,0) = 0[1]$$

Con esta condición, a partir de (16), (17), y (26)

$$u_r(r,\pi) = \frac{2 \cdot \sqrt{\kappa}}{\mu \cdot \sqrt{\pi}} \cdot (W^2+V^2)^{1/2} \cdot r^{1/2} \cdot l^{-1/2} + 0[r^{3/2}]$$

y

$$u_\theta(r,\pi) = 0[r^{3/2}]$$

De nuevo se calcula la velocidad de liberación de energía, a partir de estos valores, obteniendo de nuevo el mismo valor que en el modelo de grieta abierta, dado en (6)

$$G = \frac{\kappa + 1}{4 \cdot \mu \cdot \pi \cdot l} \cdot (P^2 + Q^2) \quad (6)$$

De acuerdo con (18) y (19), en la punta de la grieta el ángulo que hace máxima la tensión $\sigma_{\theta\theta}$ hace cero la tensión $\sigma_{r\theta}$, de forma que este ángulo proporcionará el valor donde tendrá lugar la posible ramificación de la grieta. En la figura 3 se ha representado este ángulo frente a κ , observado que se acerca suavemente a $\arccos(1/3)$.

En las figuras 4 y 5 se representan las tensiones $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$ frente a θ , para $\kappa = 1$ y $\kappa = 3$, respectivamente.

4. REFERENCIAS

[1] Bastero, C. y Atkinson, C. "Incipient yielding at a debond crack tip under mixed mode loading", Int. Jour. Fract., 38, 192. 1988.

[2] Atkinson, C. y Bastero, C., "Plastic relaxation at a crack tip by aximetric slip", Proc. Roy. Soc. London, A418, 261.1988.

[3] Comninou, M., "The interface crack", Journal of Applied Mechanics, 44, 631-636. 1977.

[4] Atkinson, C., "The interface crack with a contact zone (an analitical treatment)", Int. Journ. Fracture, 19, 161-177. 1982.

[5] Tranter, C.J., "Integral Transforms in Mathematical Physics", John Wiley & Sons. (1956).

5. FIGURAS.

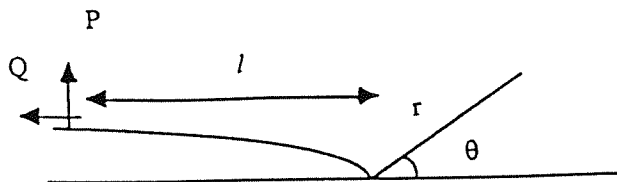


Fig. 1. Grieta abierta.

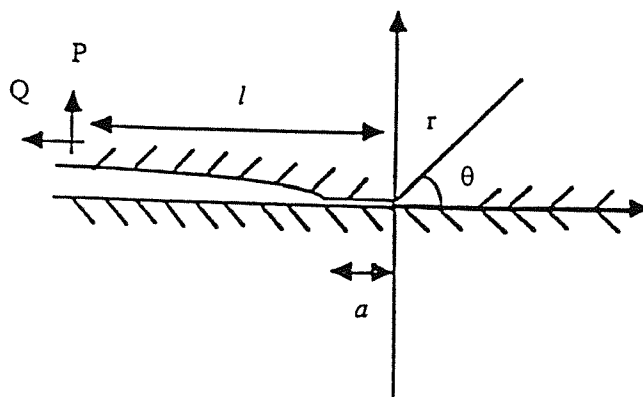


Fig. 2. Grieta con zona de contacto.

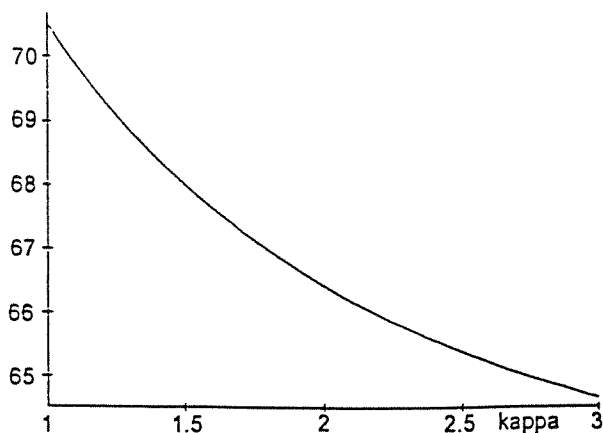


Fig. 3. Angulo de ramificación.

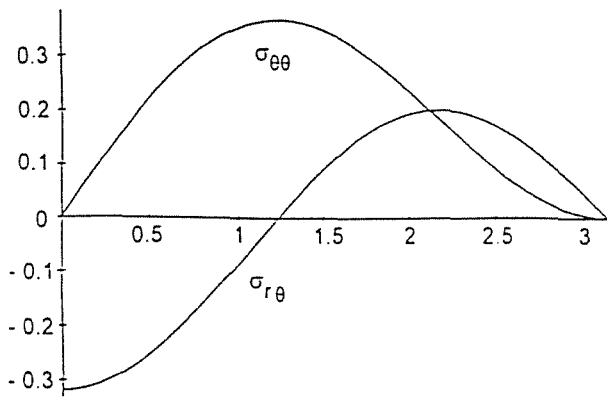


Fig. 4. Representación de las tensiones para $\kappa = 1$.

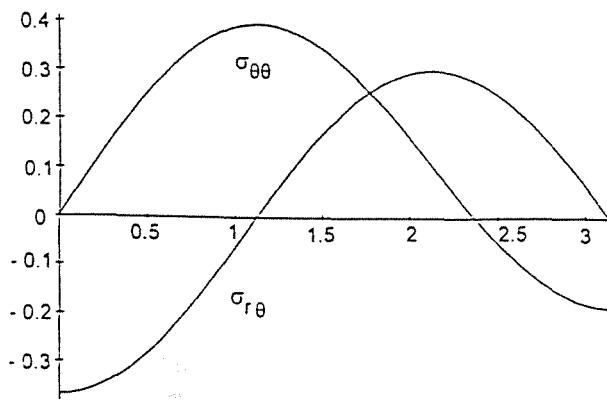


Fig. 5. Representación de las tensiones para $\kappa = 3$.