

## MODELO ESTADISTICO DE ROTURA DE PLACAS DE VIDRIO CON CONSIDERACIONES DE MECANICA DE LA FRACTURA

A. Bernardo, A. Fernández, C. Betegón, I. Viña

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Gijón  
Campus de Viesques s/n. 33204 GIJON

**Resumen.** Se propone un modelo estadístico para el cálculo de placas de vidrio para acristalamiento de edificios que permite obtener la probabilidad de rotura de las mismas bajo una carga cualquiera. Este modelo se basa en el estudio de las microfisuras superficiales que existen en las placas de vidrio, cuyo crecimiento, en determinadas condiciones de carga, lleva a su rotura. Dicho modelo incorpora tanto la Mecánica de la Fractura como la teoría no lineal de placas, para definir un tamaño crítico de las fisuras, a partir del cual llegan a crecer, y que es función tanto de su forma y posición en la placa como de la distribución de tensiones. De esta manera, se pueden elaborar unos nuevos ábacos de dimensionamiento que, para una probabilidad de rotura determinada, nos indiquen el espesor necesario en condiciones de servicio.

**Abstract.** A statistical model for window glass plates failure probability is proposed. The model takes into account the random distribution of pre-existing microcracks, and the stress distribution on the plate, by means of Fracture Mechanics and the non-linear theory of plates, in order to define a critical flaw size. The model allows the development of new design charts, which give the minimum plate thickness under service conditions, for a given failure probability.

### 1. INTRODUCCION

En los últimos años el proceso de diseño de placas de vidrio para acristalamiento de edificios está sufriendo un gran cambio [1]. El factor esencial que lo está motivando es el auge que ha experimentado el empleo de placas de vidrio en las edificaciones, aumentando tanto el tamaño de los acristalamientos como diversificándose las relaciones de los lados de los mismos, dentro de una geometría rectangular. Esto hace que los métodos de dimensionamiento utilizados hasta ahora, basados en tablas obtenidas por experimentación directa, a través de fórmulas empíricas o bien por aplicación de la teoría lineal de placas [2], requieran una revisión, ya que la teoría lineal predice en algunos casos espesores excesivamente grandes y las tablas experimentales no contemplan todos los casos posibles. Se hace, por lo tanto, necesario un nuevo planteamiento de los métodos de dimensionamiento de las placas de vidrio.

En este trabajo se propone un cálculo a rotura que utilice como criterio de diseño el valor de la probabilidad de rotura de una placa de vidrio bajo una carga determinada.

Es decir, que para unos valores dados de los lados de la placa de vidrio y para un valor de sobrecarga de viento que debe resistir, el espesor necesario que se obtendría sería aquel para el que la placa de vidrio con esas dimensiones tuviera una determinada probabilidad de rotura. Para esto, se establece el modelo estadístico que se desarrolla a continuación.

### 2. MODELO MATEMATICO NO LINEAL

Previamente al propio planteamiento estadístico, se aplica la teoría no lineal de placas a las placas de vidrio para, junto con las condiciones de borde simplemente apoyado, poder obtener los valores de tensiones y flechas en todos los puntos. Esas tensiones se utilizarán, en el planteamiento estadístico, al definir un tamaño crítico de las fisuras a partir del cual estas pueden crecer y llevar a la rotura de la placa.

Consideraremos en lo que sigue la placa rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$ , y de espesor  $t$  de la figura 1, sometida

a la carga lateral uniforme de valor q por unidad de área, que representa una placa de acristalamiento bajo la acción del viento.

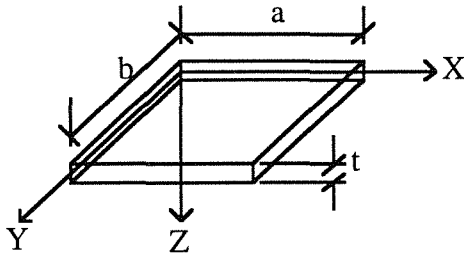


Fig. 1. Placa de referencia para las ecuaciones de von Kármán

Las deformaciones que tienen lugar en las placas de vidrio sometidas a cargas de uso, se pueden encuadrar en la categoría de " grandes flechas ", lo que implica la aparición de unas tensiones de membrana junto con las tensiones de placa, presentes en la teoría lineal.

El desarrollo de la teoría no lineal de placas conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales que se conoce con el nombre de Ecuaciones de von Kármán:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{t}{D} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1)$$

$$\nabla^4 \Phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

en las que w es la flecha, q es la carga lateral uniforme por unidad de área, t es el espesor de la placa,  $\Phi$  es la función de Airy, E es el módulo de elasticidad longitudinal,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y D

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

Con el fin de obtener una solución general normalizada, se consideran las ecuaciones de von Kármán adimensionales, introduciendo los siguientes parámetros:

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{ab}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{ab}}, \quad W = \frac{w}{t}, \quad \psi = \frac{\Phi}{Et^2} \quad (4)$$

Según trabajos previos [3], las condiciones de contorno que mejor reproducen el comportamiento real de las placas de acristalamiento en condiciones de uso, son las de borde simplemente apoyado.

Para resolver estas ecuaciones se utiliza un caso particular del Método de los Residuos Ponderados, en el que las funciones de ponderación se hacen coincidir con las funciones de prueba.

Las funciones de prueba que se proponen para cada incógnita son:

$$\text{Para } W, \quad \text{sen} \frac{m\pi}{\sqrt{a}} \zeta \quad \text{sen} \frac{n\pi}{\sqrt{b}} \eta \quad (5)$$

$$\text{Para } \psi, \quad \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{\sqrt{a}} \zeta \right) \left( 1 - \cos \frac{l\pi}{\sqrt{b}} \eta \right) \quad (6)$$

lo que da lugar a las siguientes soluciones aproximadas:

$$W \equiv W^* = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} \text{sen} \alpha_m \zeta \text{sen} \beta_n \eta \quad (7)$$

$$\psi \equiv \psi^* = \sum_{k=2,4,\dots} \sum_{l=2,4,\dots} \psi_{kl} \left( 1 - \cos \alpha_k \zeta \right) \left( 1 - \cos \beta_l \eta \right) \quad (8)$$

donde a los parámetros ajustables desconocidos, se les llama  $W_{mn}$  y  $\psi_{kl}$ , y además:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{\sqrt{a}}; \quad \beta_n = \frac{n\pi}{\sqrt{b}}; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\sqrt{a}}; \quad \beta_l = \frac{l\pi}{\sqrt{b}} \quad (9)$$

Al sustituir estas soluciones aproximadas en las ecuaciones queda un residuo que se anula en el sentido de media ponderada utilizando como funciones de ponderación las propias funciones de prueba. Se obtienen de esta manera dos sistemas de ecuaciones cuya resolución lleva a conocer el valor de los parámetros ajustables  $W_{mn}$  y  $\psi_{kl}$ .

### 3. VALIDACION EXPERIMENTAL DEL MODELO MATEMATICO

Se analizaron valores de tensiones y de flechas obtenidos por ensayos en placas de vidrio de dimensiones comerciales cuya relación de lados está comprendida entre 1:1 y 1:2.

Los vidrios a ensayar se montaron sobre un bastidor adecuado para tratar dos vidrios a la vez y la carga se produjo con aire a presión actuando entre ambos. Para medir las flechas se utilizaron relojes comparadores que eran calibrados antes de cada ensayo. A los resultados así obtenidos se les restó la deformación permanente que se producía en el bastidor. Las tensiones se midieron con bandas extensométricas que se colocaron de manera que midieran la tensión principal máxima. En aquellos puntos en los que no se tenía evidencia sobre cual era la dirección principal se colocaron rosetas extensométricas.

Los resultados teóricos se obtuvieron mediante un programa en PASCAL y utilizando 4x4 funciones de aproximación (a partir de este número de funciones de aproximación la mejora en los resultados es inapreciable en cifras significativas).

En total se compararon más de 500 valores de flechas y tensiones obteniéndose en general una mejor aproximación para las tensiones. Así, el valor medio de los errores obtenidos al comparar 316 valores teóricos de tensiones con sus correspondientes valores experimentales es de 19.50%, y el correspondiente a flechas es de 31.05%, habiéndose comparado en éste caso 219 valores. La distribución de estos errores se muestra en la tabla 1.

ERRORES	TENSIONES	FLECHAS
> de -30%	0.95%	15.98%
Entre -30 y -10%	3.16%	16.89%
Entre -10 y 0%	6.33%	7.76%
Entre 0% y 10%	14.24%	9.58%
Entre 10 y 20%	28.79%	16.89%
Entre 20 y 30%	35.76%	17.81%
Entre 30 y 40%	5.38%	4.57%
Entre 40 y 50%	3.48%	5.55%
>de 50%	1.89%	4.97%

**Tabla 1.** Errores de los valores obtenidos con el modelo matemático.

En conjunto los resultados pueden considerarse satisfactorios, ya que entre -10% y 30% están más del 85% de los valores de tensiones comparados. La distribución de los errores no es tan buena en el caso de flechas ya que entre -10% y 30% están el 50% de los valores. No obstante los valores de flechas obtenidos experimentalmente ofrecen menor fiabilidad que los de tensiones ya que los relojes comparadores utilizados miden también la deformación del bastidor y aunque esta es restada posteriormente, esta resta se hace considerando que esa deformación aumentó linealmente con la carga, lo que no es totalmente correcto. Además, como las flechas se obtienen por derivación de las tensiones con validar el modelo para estas es suficiente.

Se observa que el modelo predice valores menos sobrestimados para puntos próximos a los bordes llegando en algún caso a obtenerse valores de tensiones inferiores a los experimentales.

#### 4. MODELO ESTADISTICO DE ROTURA

El cálculo elástico clásico presenta unas limitaciones ya conocidas para el diseño, tales como la dificultad del conocimiento de las tensiones reales debido a las tensiones residuales y la no consideración del carácter aleatorio de la carga de rotura.

En el caso de las placas de vidrio, estos aspectos adquieren gran importancia ante la dificultad de conocer las tensiones residuales y debido a la existencia de defectos superficiales (fisuras) microscópicos producidos en el proceso de elaboración de las mismas.

La existencia de estas fisuras y el comportamiento del vidrio perfectamente elástico lineal, indican la idoneidad de las placas de acristalamiento para ser estudiadas mediante la teoría de la Mecánica de la Fractura Lineal. A esta teoría se recurre para asimilar las fisuras superficiales a una forma geométrica determinada y de este modo poder definir correctamente, mediante alguna magnitud, el tamaño de las mismas.

Se asimiló la forma de las fisuras superficiales a una geometría semicircular.

A la hora de plantear el modelo estadístico hay que considerar dos hechos fundamentales. Por una parte, la distribución de tensiones en la placa no es uniforme, por tanto, la rotura no se producirá en el lugar en el que la grieta tenga un mayor tamaño, sino donde la combinación entre tamaño de grieta y tensión sea la crítica. Además, existen unas orientaciones preferenciales de las fisuras, observadas en ensayos realizados en probetas obtenidas de las placas de vidrio cortándolas, en forma de vigas, con distintas orientaciones. En estos ensayos se obtuvieron valores de carga de rotura distintos para vigas cortadas con diferentes orientaciones, lo que se interpreta con la existencia de una orientación preferencial de los defectos superficiales. De esos mismos ensayos, también se puede deducir que la ley de distribución de los tamaños máximos de grieta depende de la orientación de la propia fisura, es decir, para cada posible orientación de fisuras tendremos una ley estadística de distribución de los tamaños máximos. Por tanto, habrá que modificar la consideración realizada en el punto primero, en el sentido de que la rotura no se producirá en el punto en el que la combinación entre tamaño de grieta y tensión sea la crítica, sino en aquel punto en el que lo sea la combinación entre tamaño de grieta, orientación de la misma y tensión.

Podemos, teniendo en cuenta lo anterior, realizar el siguiente planteamiento estadístico. Para ello definiremos el tamaño crítico de grieta en un punto de la placa asociado a una carga uniforme  $q$ , y lo llamamos  $a^*$ , como un tamaño de grieta tal que las tensiones inducidas por  $q$  conducen a la rotura de la placa en ese punto. Ese tamaño crítico de grieta será distinto en cada punto según que se considere una orientación u otra posible para cada grieta, pues el ángulo que forme la fisura con las tensiones en el punto considerado puede ser más favorable o menos favorable a la rotura. Denotaremos, por tanto, el tamaño crítico de grieta por  $a^*(x,y;q;\theta)$ .

Una vez definido el tamaño crítico, se discretiza la placa de vidrio con el fin de considerar un número finito de puntos, representativos de otros tantos elementos de pequeño tamaño  $\Delta x \Delta y$  en los que se supone dividida la

placa, en los que vamos a considerar la posibilidad de rotura. Cada elemento lo denotamos por las coordenadas de su punto central, en el que consideraremos la tensión y en el que supondremos la presencia de una única grieta.

Si denominamos  $a(x,y;\theta)$  al tamaño de grieta en el punto  $(x,y)$  y en la dirección  $\theta$ , decimos que la rotura se producirá en el elemento de coordenadas  $(x_0,y_0)$  y por crecimiento de una fisura orientada según el ángulo  $\theta_0$ , cuando actúa la carga  $q$ , si:

$$\text{Max}_{(x,y,\theta)} \frac{a(x,y;\theta)}{a^*(x,y;q;\theta)} = \frac{a(x_0,y_0;\theta_0)}{a^*(x_0,y_0;q;\theta_0)} = 1 \quad (10)$$

es decir, si:

$$\begin{aligned} a(x_0,y_0;\theta_0) &= a^*(x_0,y_0;q;\theta_0) \\ a(x_0,y_0;\theta) &< a^*(x_0,y_0;q;\theta) \quad \forall \theta \neq \theta_0 \\ a(x,y;\theta) &< a^*(x,y;q;\theta) \quad \forall \theta \text{ y } \forall (x,y) \neq (x_0,y_0) \end{aligned}$$

En términos probabilísticos esto se expresa de la siguiente manera. La probabilidad de que la rotura ocurra en  $(x_0,y_0)$  por crecimiento de una grieta que se orienta con un ángulo  $\theta_0$ , y bajo la acción de la carga  $q$ , es el producto de la probabilidad de que el tamaño máximo de grieta en ese punto y según esa dirección sea igual al tamaño crítico de grieta en ese punto y según esa dirección, por la probabilidad de que los tamaños máximos de grieta en ese punto y según las otras direcciones sean menores que los correspondientes tamaños críticos, y multiplicado a su vez por la probabilidad de que en los restantes puntos de la placa, los tamaños máximos de grieta en cada uno de ellos y para todas las direcciones sean menores que los respectivos tamaños críticos. Sumando para todos los elementos de la placa las probabilidades así obtenidas para cada uno de ellos, se obtiene la probabilidad de rotura de la placa para el valor de carga considerado.

Este modelo hay que modificarlo para recoger el hecho de que las grietas se orientan preferencialmente en unas direcciones determinadas, multiplicando cada orientación que se considere por la probabilidad de que la grieta se oriente en esa dirección.

Para expresar esta probabilidad de rotura de la placa de vidrio bajo una carga  $q$  en términos matemáticos, es mejor hacerlo como uno menos la probabilidad de que la placa no se rompa. De esta manera queda:

$$P(q) = 1 - \prod_{i,j} \prod_k F_{a\theta_k} \left( a^*(x_i,y_j;\theta_k,q) \right) P(\theta_k) \quad (11)$$

en la que  $F_{a\theta_k}$  es la función de distribución de los tamaños máximos de grieta, y  $P(\theta_k)$  es la probabilidad de que una grieta se oriente en la dirección  $k$ .

Hay que determinar pues las probabilidades de las orientaciones de las fisuras y la ley de distribución de los tamaños máximos de grieta para cada orientación. Además, hay que conocer una expresión que nos permita obtener el tamaño crítico de grieta, correspondiente a cada valor de la carga, en el punto y en la dirección considerada. Para esto recurriremos a la Mecánica de la Fractura.

### 5. CALCULO DE LOS PARAMETROS ESTADISTICOS

Basándose en consideraciones límites [4], se puede asumir que la distribución de los tamaños máximos de grieta en un elemento de la placa de área unidad sigue una ley de Gumbel:

$$G(a) = \exp \left\{ -\exp \left[ \frac{\alpha - a}{\beta} \right] \right\} \quad -\infty < a < \infty \quad (12)$$

Para estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de esta ley se realizan unos ensayos de flexión a tres puntos en vigas obtenidas cortándolas de placas de vidrio con diferentes orientaciones.

En estos ensayos se determina la carga de rotura y el punto en el que se produce la misma.

Con el fin de poder determinar, a partir de esos valores, los tamaños críticos de grieta que llevaron a la rotura en cada caso a la placa y así poder estimar los parámetros de la distribución de Gumbel, hay que asumir que la grieta que produce la rotura está orientada de una forma conocida. A esta grieta la llamamos grieta equivalente, y supondremos que se orienta perpendicular a la dirección longitudinal de la viga (que es la dirección para la que se tendría un menor tamaño crítico), es decir, que la rotura se producirá por crecimiento de la grieta en modo I. Si no se hiciera esa consideración, no se podrían estimar esos parámetros. En efecto, al producirse la rotura en un modo mixto, una viga podría romper por crecimiento de una grieta pequeña que tuviera una orientación favorable a la rotura, o bien por crecimiento de una grieta que teniendo una orientación menos favorable a la rotura tuviera un tamaño suficientemente mayor.

El tamaño crítico  $a^*$ , según se ha considerado que se produce la rotura (modo I de fractura), y para la geometría de grieta considerada, es:

$$K_{Ic} = 1.12 \left( \frac{2}{\pi} \right) \sigma (\pi a^*)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

donde  $K_{Ic}$  es el factor de intensidad de tensiones,  $\sigma$  es la tensión perpendicular al plano de fisura,  $a^*$  es el tamaño crítico de la fisura, 1.12 es un factor que da cuenta del hecho de que el defecto es superficial,  $2/\pi$  es un factor de forma aplicable a fisuras semicirculares

Siendo  $e$  la altura de la sección recta de la viga:

$$a^*(x, q) = 0.0695 e^4 K_{Ic}^2 / q^2 x^2 \quad (14)$$

Con esta expresión se obtuvieron los valores de los tamaños críticos para esa "grieta equivalente" y para distintas orientaciones ensayadas. Representando estos valores en papel probabilístico de Gumbel se comprobó que, en efecto, siguen esta ley.

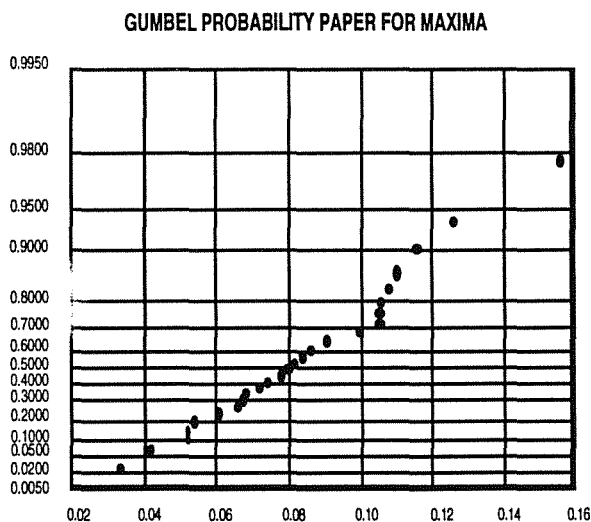


Fig.2. Tamaños críticos de grieta en papel probabilístico de Gumbel

Además, se estimaron los parámetros para las distintas orientaciones ensayadas considerando sólo las roturas que se produjeron a una distancia inferior o igual a 1cm del centro de la viga para disminuir el efecto de la variación de tensión en la viga que podría hacer necesario un tamaño de muestra mayor. Se obtuvieron los valores de la tabla 2.

$\theta$	$\alpha$	$\beta$
0°	0.048244	0.018431
30°	0.066106	0.014342
45°	0.065262	0.018179
60°	0.077581	0.027341
90°	0.070520	0.024071

Tabla 2. Parámetros de Gumbel para las orientaciones ensayadas.

## 6. CALCULO DE LOS PARAMETROS DE FRACTURA

Para poder desarrollar el planteamiento estadístico de rotura en la placa sólo nos queda ya obtener una expresión para el tamaño crítico de grieta.

En el caso de la placa, la rotura se va a poder producir, en general por un modo mixto de fractura por tanto, el tamaño crítico lo obtenemos de la manera siguiente.

$$a^* = \frac{K_{Ic}^2}{\pi \left( f_1^2 \sigma_I^2 + \frac{1}{0.64} f_2^2 \sigma_{II}^2 \right)} \quad (15)$$

donde  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  son respectivamente las tensiones en la dirección perpendicular a la grieta y en la dirección de la grieta, y  $f_1$  y  $f_2$  los factores de forma correspondientes a los modos I y II de fractura para la grieta circular superficial.

El valor de  $f_1$  se obtuvo de expresiones tabuladas, sin embargo, el valor de  $f_2$  hubo que obtenerlo numéricamente al no encontrarse tabulado:

$$f_1 = 1.12 \frac{2}{\pi}$$

$$f_2 = 1.15 \frac{4}{\pi(2-\nu)}$$

donde los factores 1.12 y 1.15 aparecen por tratarse de grietas superficiales.

## 7. CALCULO PROBABILISTICO DE ROTURA

La fórmula (3) hay que modificarla, ya que al estimar los parámetros de Gumbel con los ensayos en vigas, se introdujo el concepto de grieta equivalente que engloba tanto las diferentes leyes de tamaños máximos como la diferente probabilidad de orientación de las fisuras superficiales.

Así, la expresión que da la probabilidad de rotura de una placa de vidrio bajo una carga  $q$ , es:

$$P(q) = 1 - \prod_{i,j,k} F_{a\theta_k} \left( a^* (x_i, y_j; \theta_k, q) \right) \quad (16)$$

en la que  $F_{a\theta_k}$  es la función de distribución de los tamaños máximos de grieta equivalente.

Con esta fórmula y mediante un programa que se ha desarrollado a tal efecto se puede obtener la probabilidad de rotura para cualquier placa de vidrio.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo estadístico que permite dimensionar las placas de acristalamiento de edificaciones considerando su probabilidad de rotura, lo que presenta las ventajas, frente a las actuales tablas de dimensionamiento, de mantener los coeficientes de seguridad para todas las posibles dimensiones y no sobredimensionar para tamaños grandes.

Hasta el momento los resultados obtenidos se contrastan con las tablas existentes de dimensionamiento. Para contrastar correctamente los resultados, habría que realizar ensayos a rotura en placas.

Para obtener resultados más exactos habría que realizar ensayos para vigas cortadas según el mayor número posible de orientaciones.

## 6. REFERENCIAS

- [1] Minor J.E., "Window glass design practices: a review". *ASCE. Journal of Structural Division*. Vol 107 (1981)
- [2] *Manual del vidrio*. CITAV 1985
- [3] Anians D.C., "Experimental study of edge displacements of laterally loaded window glass plates". *Report PB82-183690. 1980. Texas Tech University. 1980.*
- [4] Castillo E, Rodriguez J, Fernández A, Viña I., "Modeling the random failure of glass plates and beams under non-constant stress distributions". *The First International Conference on Statistical Computing*. Vol. 1 (1991)