

ROTURA FRAGIL DE PMMA PROVOCADA POR ENTALLAS

F.J. Gómez, A. Valiente y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales
E.T.S. de Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid

Resumen. En este trabajo se presenta un estudio numérico y experimental de la rotura del polimetilmetacrilato en modo I a partir de entallas en ángulo, en las cuales se produce una singularidad de tensiones comparable a la que origina una fisura. Con los valores obtenidos se han determinado las singularidades que originan la rotura para diferentes ángulos de entalla. Comparando estas singularidades con la correspondiente a una fisura de igual profundidad, se han establecido los límites a partir de los cuales las diferencias no afectan a la condición de rotura.

Abstract. This paper deals with fracture conditions at V-notch specimens for a linear-elastic material. A numerical and experimental analysis of notched bend specimens was performed to study the stress singularities at fracture as a function of notch angle. The singularities are compared with the stress singularity of a crack of the same depth and the comparison is used for establishing the limits from which fracture loads are not modified by the differences between a crack and a V-notch.

1. INTRODUCCION

En el caso de sólidos fisurados, la Mecánica de la Fractura ha desarrollado criterios de rotura basados en el carácter universal de los campos de tensiones y deformaciones que origina la fisura. Sin embargo, cuando en lugar de fisuras son entallas los defectos que debilitan el sólido, el principio básico para formular el criterio de rotura falla porque los campos de tensiones y deformaciones debidos a las entallas no tienen el carácter universal anterior.

Las entallas en arista viva provocan campos de tensiones y deformaciones singulares que han sido estudiados por diferentes autores [1, 2]. El carácter de la singularidad y por tanto la forma del campo tensional es función del ángulo de apertura de la entalla y del tipo de material. La solución correspondiente al caso elástico-lineal es conocida y se debe a Williams [1].

El objetivo de este estudio es encontrar un criterio de rotura aplicable a entallas en arista viva basado en la solución de Williams. Para ello, se ha llevado a cabo un programa de ensayos de rotura con entallas de este tipo en PMMA (polimetilmetacrilato), por ser un material con comportamiento elástico lineal hasta rotura. Además se han calculado numéricamente, por el método de los elementos finitos, los factores de intensidad de tensiones de la solución de Williams que corresponden a las probetas ensayadas.

2. SINGULARIDAD DE TENSIONES DEBIDAS A UNA ENTALLA EN ARISTA VIVA

La singularidad del campo de tensiones elástico en las proximidades de una entalla en arista viva fue estudiada por Williams [1], quien determinó el orden de la singularidad en función del ángulo de la entalla. Para sollicitación en modo puro, los primeros términos del desarrollo en serie de los campos de tensiones y desplazamientos son de la forma:

$$\sigma = Kr^{\lambda-1}f(\theta, \lambda, \beta) \quad (1)$$

$$\bar{u} = \frac{K}{2\mu} r^{\lambda} \bar{g}(\theta, \lambda, \beta, \nu) \quad (2)$$

donde r y θ son las variables de posición (figura 2), β el semiángulo de entalla (figura 2), ν el coeficiente de Poisson y μ el módulo de rigidez transversal; $\lambda = \lambda(\beta)$, $f(\theta, \lambda, \beta)$, $\bar{g}(\theta, \lambda, \beta, \nu)$ son funciones universales para cada modo de sollicitación (escalar, tensorial y vectorial respectivamente) y K es un factor de proporcionalidad que depende de la geometría del sólido, del tamaño de la entalla y del sistema de cargas aplicadas.

La dependencia de λ con el ángulo β para sollicitación en modo I aparece en la figura 1.

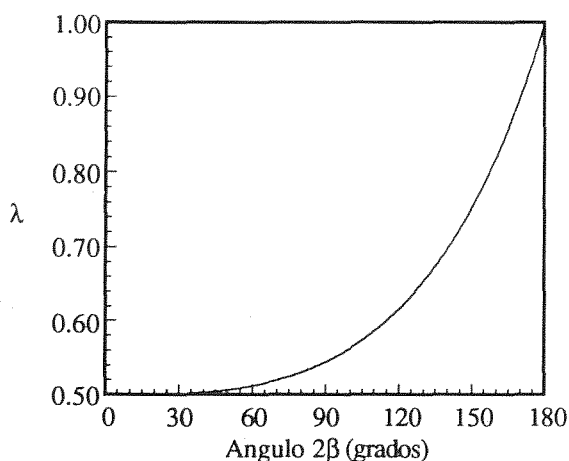


Fig. 1. Relación entre λ y el ángulo β .

Los campos (1) y (2) incluyen el caso de una fisura. Haciendo $\beta=0$, $\lambda=0.5$ y $K=K_{IC}$ se reducen a las conocidas distribuciones de tensiones y desplazamientos correspondientes a una fisura bajo sollicitación en modo I.

Para entallas con un mismo ángulo β , el factor K desempeña el mismo papel que el factor de intensidad de tensiones, K_I , en una fisura, ya que determina la intensidad del estado tensional e introduce el efecto de la geometría y de las cargas. Por consiguiente, para un mismo ángulo de entalla, la condición de rotura será que el factor K alcance un valor crítico. A diferencia, pues, de la tenacidad de fractura, este valor crítico será función no sólo del material, sino también del ángulo de entalla. El factor K se puede hallar calculando numéricamente las tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la entalla, pero los inconvenientes de este método son los mismos que en el caso de K_I . Por ello, Carpenter [3], apoyándose en el teorema de reciprocidad, ha desarrollado un método de cálculo mediante el cual K se determina a partir de una integral curvilínea independiente del camino de integración:

$$K = 2\mu\sqrt{\pi} \frac{\int_{\Gamma} (\sigma \bar{n} \cdot \bar{u}^* - \sigma^* \bar{n} \cdot \bar{u}) ds}{h(\beta, \nu)} \quad (3)$$

En esta expresión \bar{n} representa el vector normal a la curva de integración (figura 2), σ el tensor de tensiones, \bar{u} el vector desplazamiento y σ^* , \bar{u}^* y $h(\beta, \nu)$ son funciones definidas a partir de las soluciones (1) y (2) como:

$$\sigma^* = r^{-\lambda-1} f(\theta, -\lambda, \beta) \quad (4)$$

$$\bar{u}^* = \frac{r^{-\lambda}}{2\mu} \bar{g}(\theta, -\lambda, \beta, \nu) \quad (5)$$

$$h(\beta, \nu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(\theta, \lambda, \beta) \bar{e}_r \bar{g}(\theta, -\lambda, \beta, \nu) - f(\theta, -\lambda, \beta) \bar{e}_r \bar{g}(\theta, \lambda, \beta, \nu)) d\theta \quad (6)$$

siendo \bar{e}_r el versor radial.

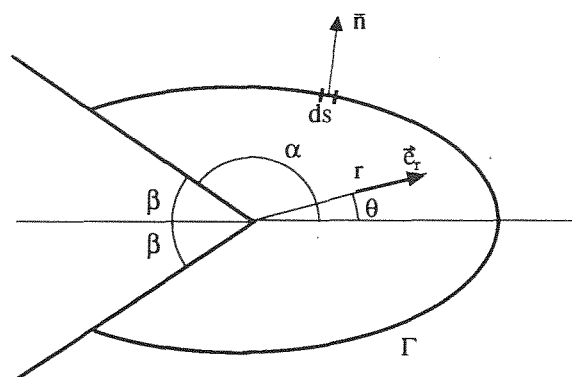


Fig. 2. Camino de integración.

Mediante este método se puede calcular K con suficiente precisión sin que sea necesaria la utilización de elementos singulares, ni tampoco un excesivo refinamiento de la malla en la entalla.

3. ENSAYOS DE ROTURA

El programa experimental ha consistido en la realización de ensayos de flexión hasta rotura con probetas entalladas en V. El material utilizado para confeccionar las probetas ha sido PMMA, un polímero transparente con comportamiento elástico y lineal hasta rotura. La tabla 1 indica las propiedades del metacrilato utilizado en los ensayos de rotura. Las constantes elásticas y la resistencia a tracción han sido determinadas mediante ensayos de tracción simple. La tenacidad de fractura, K_{IC} , lo ha sido mediante el método de ensayo que establece la norma ASTM E399 [4] empleando probetas de flexión fisuradas.

Tabla 1. Propiedades mecánicas del PMMA.

Módulo de elasticidad:	2.69 GPa
Coefficiente de Poisson:	0.4
Resistencia a tracción:	69 MPa
Tenacidad de fractura, K_{IC} :	1.0 MPa \sqrt{m}

La forma y dimensiones de las probetas empleadas en los ensayos de rotura puede verse en la figura 3.

Se han ensayado probetas con cuatro valores distintos del ángulo β : $2\beta = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ y 90° . Para cada valor de β se han ensayado cuatro probetas. Las entallas se han mecanizado en taller con herramienta de corte convencional.

Los ensayos se han llevado a cabo en control de deformación a través de un extensómetro resistivo longitudinal, que, fijado en la cara inferior de la probeta, permitía medir la apertura de la entalla (CMOD). Además de esta magnitud, se ha registrado la carga aplicada a la probeta.

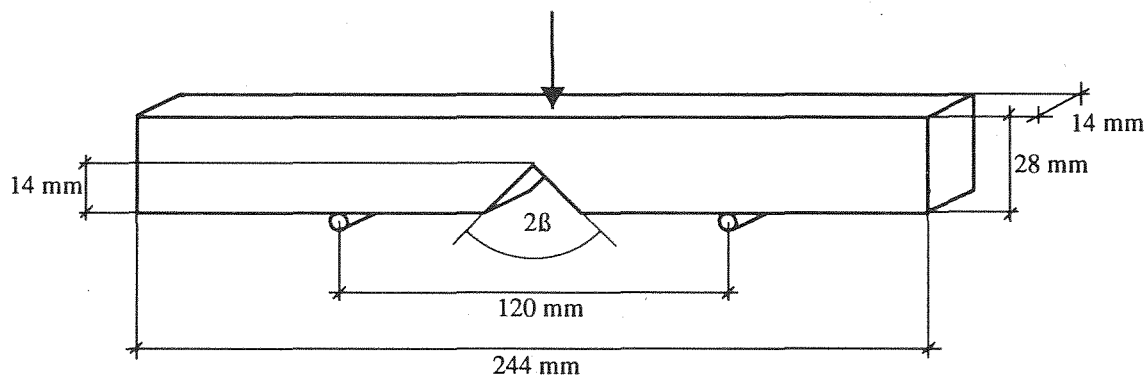


Fig. 3. Forma y dimensiones de las probetas.

Como característica común a todos los ensayos cabe señalar que la rotura se ha producido al propagarse de forma estable una fisura desde el fondo de la entalla.

Las curvas Carga-CMOD obtenidas pueden observarse en la figura 4. Los resultados más significativos de los ensayos se resumen en la tabla 2. (Carga y CMOD al iniciarse la rotura y rigidez de la probeta)

Tabla 2. Resultados de los ensayos de rotura.

Angulo 2β	Carga _R (kN)	CMOD _R (mm)	Rigidez (kN/mm)
15	0.19±2%	0.17±4%	1.16±2%
30	0.24±2%	0.20±2%	1.17±1%
60	0.21±2%	0.199±1%	1.08±1%
90	0.30±3%	0.30±3%	1.014±0.3%

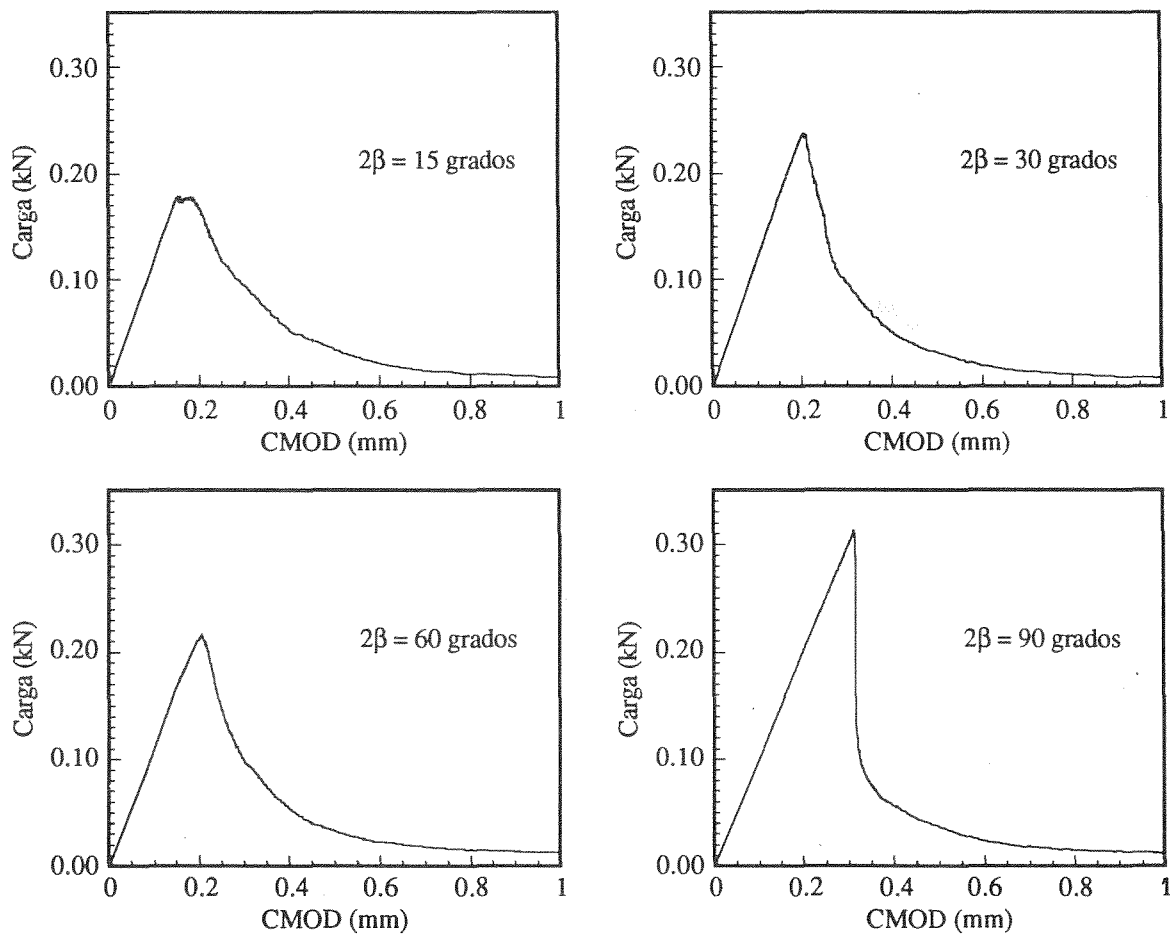


Fig. 4. Relación Carga-CMOD.

4. DETERMINACION DE LAS TENSIONES EN LA ENTALLA

Para determinar por completo el estado tensional en las proximidades del vértice de la entalla es necesario calcular el factor K de la ecuación (1). Para ello se ha realizado una modelización de los ensayos de rotura por el método de los elementos finitos, utilizando el programa comercial ABAQUS, en su versión 5.2. [5]. Las hipótesis consideradas en el cálculo han sido material elástico-lineal, pequeñas deformaciones y deformación plana. Para representar las probetas se han utilizado mallas formadas por elementos cuadráticos convencionales de 6 y 8 nodos con tamaños comprendidos entre 25 μm de lado en las proximidades de la entalla, y 2.3 mm lejos de ella.

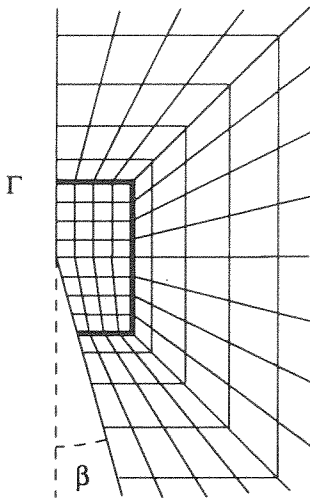


Fig. 5. Camino de integración en la malla de elementos finitos.

Para calcular el factor K se ha aplicado la ecuación (3), evitando así el efecto de los errores debidos a la utilización de elementos convencionales en la zona de singularidad de tensiones. La integral de la ecuación (3) se ha calculado sobre un cuadrado simétrico respecto al plano de simetría de la probeta, centro el vértice de la entalla y 0.2 mm de lado (figura 5).

Tabla 3. Factores de intensidad de tensiones generalizados.

Angulo 2β	k/P ($10^3\text{m}^{-1-\lambda}$)	R_{num} (kN/mm)	R_{exp} (kN/mm)
15	2.5766	1.16	1.16
30	2.6029	1.16	1.17
60	2.7289	1.14	1.08
90	3.0741	1.02	1.01

Dado que el problema elástico modelizado es lineal, el factor K, en lo sucesivo factor de intensidad de tensiones generalizado, es proporcional a la carga aplicada a la probeta. Por ello en la tabla 3 aparecen los valores de dicho factor por unidad de carga, obtenidos para cada una de las probetas a partir de los resultados de la modelización numérica. Asimismo aparecen los rigideces

de las probetas, también obtenidas numéricamente, pero junto a ellas se han incluido las medidas en los ensayos de rotura a fin de comprobar la fiabilidad de los resultados numéricos.

5. ANALISIS DE RESULTADOS

El orden de la singularidad de tensiones que originan las entallas en arista viva, es decir, el exponente de la variable r en el campo de tensiones (1), así como la forma del propio campo, dependen del ángulo de entalla. Dado que cuando λ es igual a 1/2, el campo (1) se transforma en el correspondiente a una fisura, cabe pensar que para entallas con valores de λ próximos a 1/2, las diferencias en la singularidad de tensiones no afecten al criterio de rotura correspondiente a una fisura, y el valor crítico del factor de intensidad de tensiones generalizado sea independiente del ángulo de entalla y coincida con la tenacidad de fractura.

En principio la aproximación será válida hasta un cierto valor de λ , y a través de λ hasta un cierto valor del ángulo de entalla. Para determinar este ángulo hay que comparar el valor de los factores de intensidad de tensiones generalizados que producen la rotura de las probetas entalladas con la tenacidad de fractura del material.

El factor de intensidad de tensiones generalizado K es función de la forma de la sollicitación y de la geometría, pero proporcional a la magnitud de las cargas aplicadas. Por tanto, para las probetas ensayadas podrá escribirse del siguiente modo:

$$K = \frac{P}{B^2} a^{1-\lambda} h\left(\frac{a}{b}, \beta\right) \quad (7)$$

siendo, a la profundidad de la entalla, b el canto y B el espesor de la probeta.

La expresión anterior con $\beta=0^\circ$ y $\lambda=1/2$, corresponde a una fisura de profundidad a, y el factor K se transforma en el factor de intensidad de tensiones K_I :

$$K_I = \frac{P}{B^2} a^{0.5} h\left(\frac{a}{b}, 0\right) \quad (8)$$

La condición de rotura a explorar es:

$$K = K_{IC} = K_I \quad (9)$$

y por tanto sustituyendo (7) y (8) en (9) resulta:

$$\frac{P_e}{P_f} = a^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{h\left(\frac{a}{b}, 0\right)}{h\left(\frac{a}{b}, \beta\right)} \quad (10)$$

donde los subíndices e y f, añadidos a las cargas, indican que son cargas de rotura para probetas entalladas y fisuradas, respectivamente. En la figura 6 se compara la condición de rotura dada por (10) con los resultados

experimentales de la tabla 2. La carga de rotura para probeta fisurada se ha deducido de la condición (9) empleando la tenacidad de fractura de la tabla 1 y la expresión del factor de intensidad de tensiones de la referencia [6].

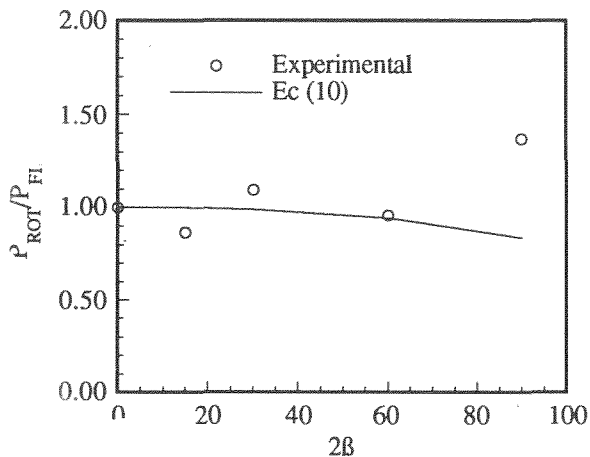


Fig. 6. Carga de rotura frente al ángulo de entalla.

La figura 6 pone de manifiesto que la condición de rotura (10) se verifica hasta un ángulo de entalla de 60°, pero no así para un ángulo de 90°. Además para ángulos menores de 60° la carga de rotura coincide sensiblemente con la de una probeta fisurada.

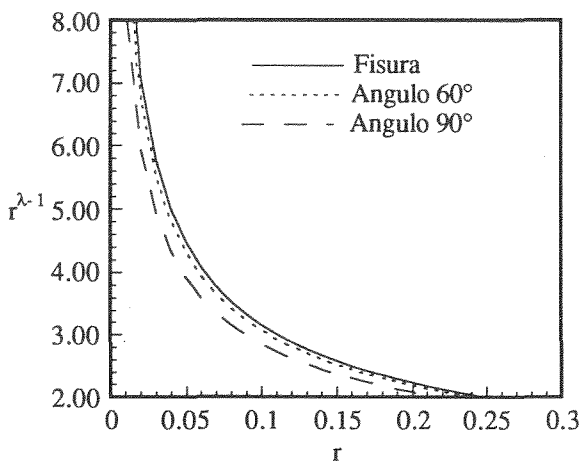


Fig. 7. Variación de la singularidad con la distancia r.

En las figuras (7) y (8) se ha representado la variación de la singularidad de tensiones con la distancia y con el ángulo para una fisura, una entalla de 60° y otra de 90°. Las curvas correspondientes a la entalla de 60° marcan el límite a partir del cual las dos singularidades (entalla y fisura) son prácticamente iguales en cuanto a la condición de rotura. Las curvas correspondientes a la entalla de 90° se sitúan claramente fuera de este límite.

En cuanto al orden de la singularidad, el exponente λ , el límite de validez se sitúa en 0.49, es decir una diferencia del 1% respecto al exponente de las fisuras, igual a 0.5. Conviene señalar que para modo II el ángulo de la entalla correspondiente al valor de λ 0.49 es de 3°, muy inferior a 60°. Por tanto un criterio de fractura basado en equiparar las singularidades de tensiones en una entalla en V y en una fisura, si el valor de λ es mayor que 0.49, sólo sería aplicable a probetas entalladas bajo sollicitación en modo II para ángulos de entalla menores de 3°.

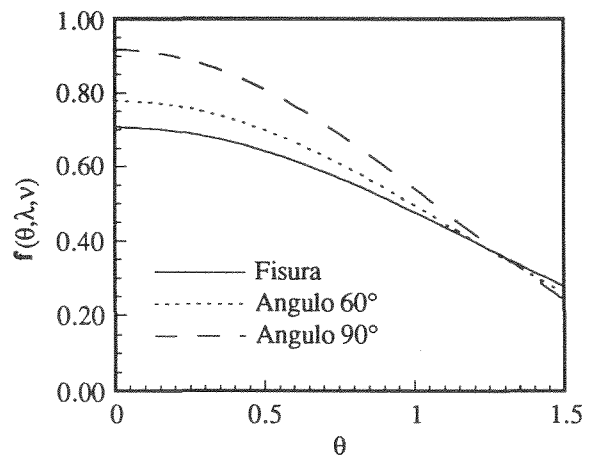


Fig. 8. Variación de la singularidad con el ángulo θ .

6. CONCLUSIONES

En modo I de sollicitación la singularidad de tensiones originadas por las entallas en arista viva con ángulo menor que 60° es muy similar al de una fisura de igual profundidad. Esto explica que de acuerdo con los resultados experimentales de este trabajo, la condición de rotura apenas varíe respecto al caso de una fisura.

La base de la similitud entre fisuras y entallas en forma de V está en el orden de la singularidad. En modo I los valores del exponente λ son muy similares para ángulos menores de 60 grados. En modo II la variación del exponente con el ángulo de entalla es mucho más acusada incluso para ángulos pequeños, por lo que un criterio de rotura basado en la identificación de las singularidades sólo puede proponerse para ángulos de entalla menores de 3°.

7. REFERENCIAS

- [1] Williams M.L., "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *Journal of Applied Mechanics*. 19, 526-528 (1952).
- [2] Sih G.C. y Ho J.W., "Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density", *Theoretical*

and Applied Fracture Mechanics. **16**, 179-214 (1991).

- [3] Carpenter W.C., "Calculation of fracture mechanics parameter for a general corner", International Journal of Fracture. **24**, 45-58 (1984).
- [4] Norma ASTM E 399-83 "Standard Test Method for Plane-Strain Toughness of Metallic Materials" (1983)
- [5] Hibbitt H.D., Karlsson B.I. y Sorensen E.P. "ABAQUS User's Manual" Versión 5.2 (1992)
- [6] Tada H., Paris P. y Irwin G., "The stress analysis handbook", Del Research Corp., Hillertown, PA, USA, (1973).