

COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS FUNCIONES DE FLEXIBILIDAD EN SECCIONES RECTANGULARES Y SECCIONES EN T

F. Ustáriz, A. Valiente y M. Elices.

Departamento de Ciencia de Materiales
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria s/n, 28040 - Madrid

Resumen. El método de las funciones de flexibilidad es un procedimiento ideado para calcular el factor de intensidad de tensiones en elementos fisurados de estructuras hiperestáticas lineales. En trabajos previos publicados en estos anales se han desarrollado los fundamentos del método y se han aplicado al cálculo de los factores de intensidad de tensiones en modo I y en modo II para vigas con sección rectangular y sección en T, determinando las funciones de flexibilidad correspondientes por el método de los elementos finitos. En este trabajo se presenta un estudio experimental llevado a cabo con ambas secciones para comparar aquellos resultados con resultados empíricos. El estudio consiste en el diseño y ejecución de un tipo de ensayo cuyo fundamento teórico es el método propuesto y cuya finalidad es la obtención experimental de las funciones de flexibilidad.

Abstract. The compliance function theory is a method for the mechanical and fracture analysis of cracked members of statically indeterminate linear structures. Previously, this method was used for determining the mode I and II stress intensity factors of cracked beams with rectangular and T-shaped cross-section. The compliance functions of these cross-sections were obtained by applying the finite element method. This paper compares these numerical values of the compliance functions with experimental values measured by performing a series of test specifically designed for this purpose.

1.- INTRODUCCIÓN

El modelo de las funciones de flexibilidad proporciona un método de análisis de estructuras resistentes lineales (vigas, pórticos, marcos, etc.) con secciones fisuradas. Mediante este método es posible determinar esfuerzos, movimientos y factores de intensidad de tensiones aunque la estructura sea hiperestática, y todo ello en un marco acorde con los métodos de análisis de Resistencia de Materiales. Los fundamentos del modelo, cuyos precedentes son soluciones de casos particulares [1], están recogidos en las referencias [2] y [3]. La determinación de las funciones de flexibilidad de la sección rectangular y de una sección en T por procedimientos numéricos aparece en las referencias [2] y [4], respectivamente. Este trabajo está dedicado a un estudio experimental que se ha llevado a cabo con la doble finalidad de comprobar los valores numéricos de las funciones de flexibilidad anteriores, y de confirmar, a través de esta comprobación, la validez de las hipótesis simplificativas asumidas en la teoría de las

funciones de flexibilidad. La experimentación se ha diseñado sobre la base del modelo y se ha llevado a cabo con un material de fácil fisuración, siempre bajo condiciones de comportamiento elástico y lineal.

2.- FUNDAMENTO DEL MÉTODO EXPERIMENTAL.

El modelo de las funciones de flexibilidad permite calcular los movimientos que se producen en una estructura lineal con elementos fisurados [2 y 3], y en particular en una viga fisurada. Se admite como hipótesis del modelo que los efectos de la fisura están concentrados en la sección fisurada y que consisten en discontinuidades del giro y los desplazamientos. En ausencia de esfuerzos axiales, la discontinuidad de cada tipo de movimiento está asociada solamente a uno de los dos esfuerzos que actúan en la sección (el giro al momento flector y el desplazamiento al esfuerzo cortante) y es proporcional al valor del esfuerzo, siendo los factores de proporcionalidad funciones del tamaño

de la fisura propias de la forma de la sección. Estas conclusiones permiten formular los teoremas de Mohr para vigas fisuradas según las ecuaciones (1) y (2). La figura 1 ilustra gráficamente el significado de ambas ecuaciones, en las cuales θ_{ab} y v_{ab} representan el giro y la flecha de la sección b respecto a la sección a debidos a los esfuerzos que actúan, cuando lo hacen en ausencia de fisura.

$$\theta_b = \theta_a + \theta_{ab} + C_m M \quad (1)$$

$$v_b = v_a + \theta_a (x_a - x_b) + v_{ab} + C_m M (x_f - x_b) + C_q Q \quad (2)$$

La aplicación de las ecuaciones (1) y (2) a casos particulares isostáticos es la base del método experimental diseñado para comprobar la validez de las funciones de flexibilidad determinadas numéricamente. Las contribuciones Θ y V de la sección fisurada al giro y a la flecha en una sección cualquiera se deducen fácilmente de las ecuaciones (1) y (2) teniendo en cuenta las variaciones que experimenta cada sumando del segundo miembro de dichas ecuaciones al comparar sus valores para los mismos esfuerzos cuando la sección f está fisurada y cuando no lo está. Mientras que $C_m M$ y $C_q Q$ desaparecen en ausencia de fisura, ni θ_{ab} ni v_{ab} varían. Por tanto:

$$\Theta_b = \Theta_a + C_m M \quad (3)$$

$$V_b = V_a + \Theta_a (x_a - x_b) + C_m M (x_f - x_b) + C_q Q \quad (4)$$

Para una viga y un sistema de cargas simétricos respecto al plano de la sección fisurada, tanto la deformación total como la contribución de la fisura han de mantener la simetría. Por tanto, al aplicar la ecuación (3) a dos secciones situadas simétricamente respecto a la sección fisurada f , se tiene:

$$-\Theta_a = \Theta_a + C_m M \Rightarrow \Theta_a = -0,5 C_m M \quad (5)$$

Introduciendo este resultado en (4) junto con la condición debida a la simetría de que el esfuerzo cortante Q en la sección fisurada es nulo, después de resolver en C_m se obtiene:

$$C_m = \frac{2(V_a - V_b)}{M(x_b - x_f + x_a - x_f)} = \frac{2(V_a - V_b)}{M(b - a)} \quad (6)$$

donde las distancias de las secciones a y b a la sección f , $x_f - x_a$ y $x_b - x_f$ respectivamente, se han denominado

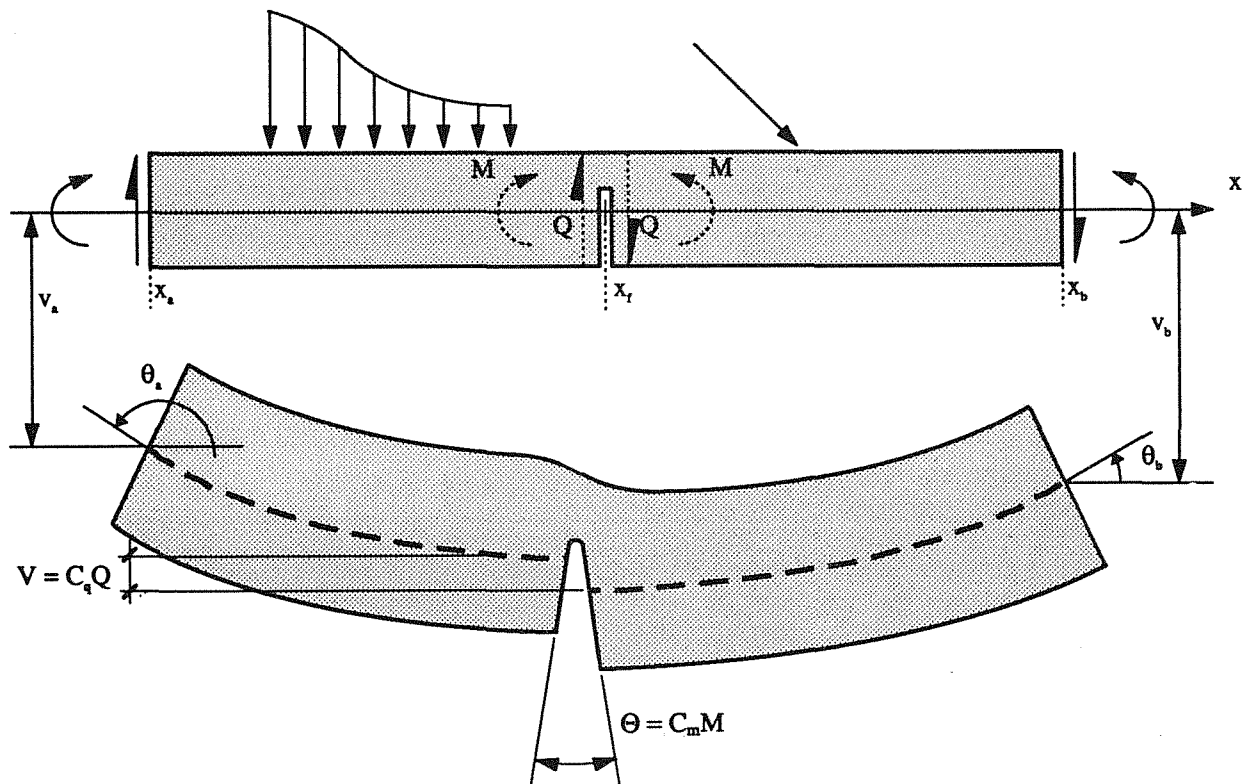


Fig. 1. Efecto de la fisura en una viga según el modelo de las funciones de flexibilidad.

a y b (nótese que a y b están a distinto lado de f).

La igualdad (6) permite determinar experimentalmente la función C_m para un tipo de sección dado. Basta someter a carga una viga isostática con ese tipo sección respetando las condiciones de simetría en que se basa la igualdad y medir las cargas aplicadas y las flechas de dos secciones a y b. Si el experimento y las medidas se efectúan dos veces, siendo la única diferencia entre los dos ensayos la existencia de fisura en la sección de la viga situada en el plano de simetría, la diferencia de las dos flechas medidas en una misma sección sería la contribución V de la fisura a la primera de ellas. De este modo se habrían obtenido los valores experimentales de las flechas V_a y V_b debidas a la fisura, a partir de las cargas aplicadas podría hacerse lo mismo con el momento M, y aplicando la igualdad (6) se determinaría experimentalmente el valor de C_m . Este ha sido el procedimiento empleado en la investigación.

Se obtiene una igualdad análoga a (6) para la función C_q bajo las mismas condiciones de simetría geométrica, pero con antisimetría de cargas. Los giros en secciones simétricas serían iguales, las flechas opuestas y el momento flector M en la sección fisurada sería nulo. Debido a ello, desaparece un término en la ecuación (4):

$$V_b = V_a + \Theta_a(x_a - x_b) + C_q Q \quad (7)$$

y al particularizarla para la sección a y su simétrica, cuyas abscisas respectivas son x_a y $2x_f - x_a$, se transforma en:

$$-V_a = V_a + \Theta_a(x_a - 2x_f + x_a) + C_q Q \quad (8)$$

Eliminando el ángulo Θ_a entre ambas ecuaciones y resolviendo en C_q se obtiene finalmente:

$$C_q = 2 \frac{V_b(x_f - x_a) + V_a(x_b - x_f)}{Q(x_f - x_a + x_f - x_b)} = 2 \frac{V_b a + V_a b}{Q(a - b)} \quad (9)$$

3.- EXPERIMENTACIÓN REALIZADA.

Las secciones transversales elegidas para la comprobación experimental de los valores numéricos de las funciones de flexibilidad son la sección rectangular y una sección en T, cuyas dimensiones aparecen en la figura 2 y cuyas funciones de flexibilidad son conocidas por haber sido determinadas numéricamente con anterioridad.

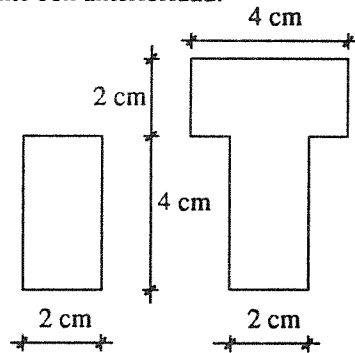


Fig. 2. Secciones transversales estudiadas.

El material escogido para la experimentación es un polímero termoplástico, polimetilmetacrilato (PMMA) de 3,2 GPa de módulo de elasticidad, 0,4 de coeficiente de Poisson y 1,0 MPa√m de tenacidad de fractura. Las razones por las que se ha elegido este material son dos. La primera es que su comportamiento es elástico-lineal en un amplio intervalo de deformaciones y su módulo de elasticidad es mucho menor que el de los materiales típicamente utilizados en ensayos mecánicos como el acero o el aluminio. Esto permite realizar ensayos con cargas moderadas y probetas de gran tamaño, en los cuales los desplazamientos que se producen son grandes y se pueden medir con poco error. La segunda razón es la comodidad con que pueden realizarse

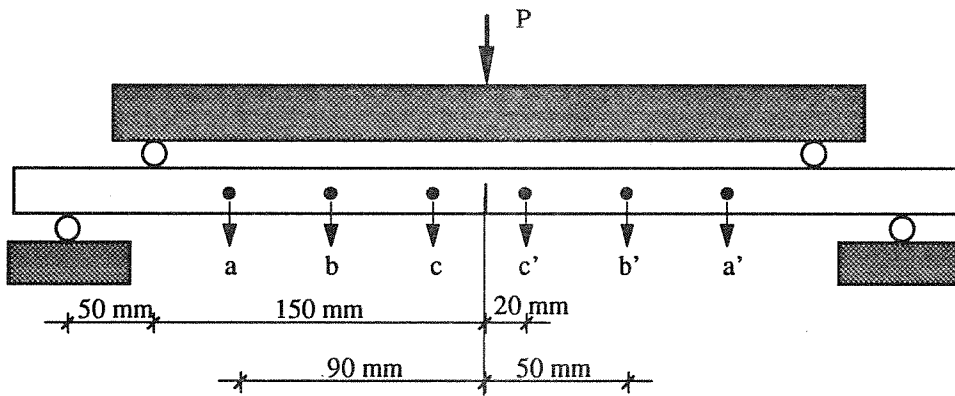


Fig. 3. Esquema del ensayo.

fisuras con crecimiento controlado en este material, ya que es transparente y ofrece poca resistencia a la fisuración.

El procedimiento de fisuración empleado es el que se describe en la referencia [5]. La primera etapa del proceso consiste en la realización de un corte estrecho y poco profundo en la sección a fisurar, sobre la cara de la probeta donde se desea que la fisura arranque. Para generarla se flexa la probeta manteniendo traccionada la cara donde está la entalla, y simultáneamente se comprime el filo de una cuchilla contra la arista de ésta. El avance de la cuchilla produce un doble efecto, de cuña y de penetración, que da lugar a la formación de una fisura cuya velocidad de crecimiento, incurvación del frente y plano de propagación pueden controlarse, dentro de ciertos márgenes, a través de la velocidad de avance de la cuchilla y del esfuerzo de flexión aplicado a la probeta.

La configuración elegida para el ensayo es el de la figura 3, que produce sollicitación en modo I y una distribución uniforme de momentos flectores en un amplio tramo de la viga, lo que elimina los errores de determinación del momento flector en la sección fisurada debidos a la incertidumbre en su ubicación exacta. Las cargas han sido aplicadas en una máquina de ensayos universal y las medidas han sido realizadas mediante un sistema de adquisición de datos acoplado a la máquina. Las secciones cuyas flechas se han medido son las secciones *a*, *b* y *c* de la figura 3, distantes 20, 50 y 90 mm de la sección fisurada respectivamente. Las tres medidas se han efectuado mediante captadores inductivos LVDT de ± 2 mm de recorrido. La carga se aplicaba en control de desplazamiento, sin llegar a provocar nunca la propagación de la fisura. Las cuatro fuerzas que actuaban sobre la probeta eran transmitidas mediante rodillos simplemente apoyados con libertad de rodadura. Los dos de la parte superior transmitían la carga desde el actuador de la máquina a la probeta a través de una viga rígida unida al actuador por medio de una rótula de compresión con libertad de giro en todas las direcciones. El ajuste de la rótula se llevaba a cabo antes de comenzar el ensayo y de este modo quedaba asegurada la transmisión de fuerza a lo largo de todo el rodillo. Cada ensayo se efectuó dos veces la primera para medir las flechas de las secciones *a*, *b* y *c* (figura 3) y la segunda para medir las de las secciones respecto al plano de la fisura. De esta manera se pudo comprobar y corregir la existencia de errores de centrado. Una vez concluidos los ensayos correspondientes a un determinado valor de la profundidad de fisura, se empleaba la misma probeta para los correspondientes a un nuevo valor, a base de hacer crecer la fisura anterior por el procedimiento descrito.

Como ya se ha indicado, el control que permite el método de fisuración en cuanto a la incurvación del frente y a la profundidad de la fisura, es limitado. Las dimensiones exactas de ésta sólo se conocen una vez concluidos los ensayos y rotas las probetas, al medirlas con ayuda de un proyector de perfiles. Los frentes de los distintos tamaños de fisura ensayados quedan perfectamente marcados en la superficie de rotura (figura 4). Esta es otra de las ventajas que ofrece el PMMA en los ensayos de esta clase.

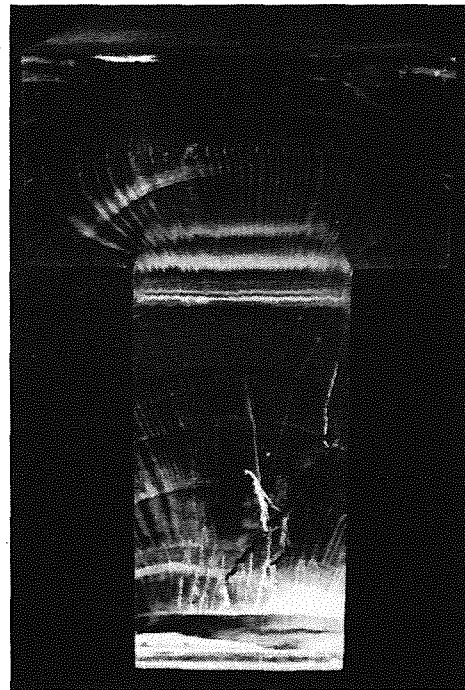


Fig. 4. Detalle de la probeta con sección en T.

La figura 4 muestra una sección transversal donde pueden observarse los distintos tamaños de fisura para los cuales se ha ensayado la probeta. Es una sección en T sobre la cual se aprecian claramente la entalla y los frentes de fisura para distintas profundidades, desde 0,1 hasta 0,8 veces el canto.

El tipo de registros obtenidos en los ensayos puede verse en la figura 5, que corresponde a la probeta de sección en T sin fisurar y con fisuras de profundidades 0,3 y 0,6 veces el canto. Los tres registros representados por cada tamaño de fisura son los valores de la carga aplicada frente a los de las flechas medidas en las secciones *a*, *b* y *c*, una vez promediadas con los de las secciones simétricas. Todos los registros son líneas rectas como era de esperar del comportamiento elástico y lineal del material. El efecto del tamaño de la fisura se manifiesta en el incremento que experimentan las pendientes de los registros a medida que aumenta el tamaño de la fisura. Para cada una de las dos secciones estudiadas se han ensayado vigas con nueve tamaños de

fisura distintos, incluyendo la viga no fisurada. Los tamaños restantes barren un intervalo de profundidades de fisura entre 0,1 y 0,8 veces el canto de la sección, con un incremento de profundidad de 0,1 veces dicho canto entre un tamaño y el siguiente.

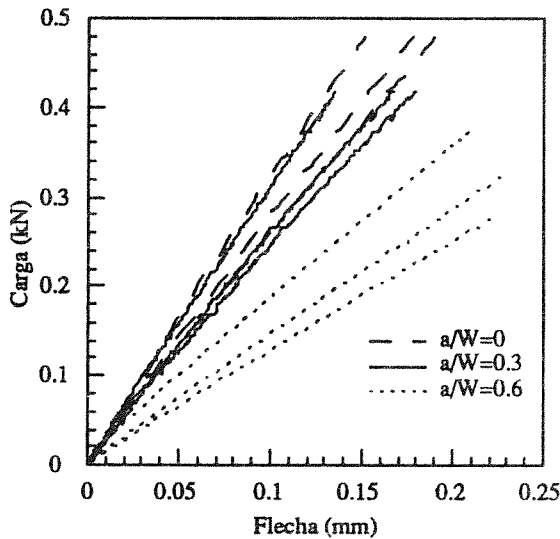


Fig. 5. Relación Carga-Flecha obtenida en los ensayos

4.- RESULTADOS OBTENIDOS.

Los ensayos realizados aportan los datos experimentales necesarios para aplicar la ecuación (6) y obtener los valores de C_m correspondientes a los tipos de sección y tamaños de fisura estudiados. Los registros carga-flecha obtenidos son líneas rectas, lo que permite trabajar con las pendientes al utilizar la ecuación (6). En efecto, la contribución de la fisura a la flecha en una sección es la diferencia entre los registros de las flechas en esa sección para la viga fisurada y sin fisurar. Dicha diferencia es también proporcional a la carga, con un factor de proporcionalidad $r-R$ si las pendientes respectivas de los registros que se restan son r y R . Por su parte (figura 3), el momento flector en la sección fisurada es el producto de la semicarga $P/2$ multiplicada por la distancia h , con lo cual la ecuación (6), particularizada para los ensayos realizados se reduce a:

$$C_m = 4 \frac{(r_a - R_a) - (r_b - R_b)}{h(b - a)} \tag{10}$$

Puesto que las medidas de flechas se han realizado en tres secciones distintas para cada profundidad de fisura, hay tres posibilidades distintas de emparejarlas para aplicar la igualdad (10) y obtener el valor de C_m correspondiente. Debido a ello, la ecuación se ha aplicado para los tres emparejamientos posibles, adoptándose la media de los tres valores obtenidos como valor de C_m , y considerando las diferencias entre ellos como dispersión experimental.

Los valores de C_m así obtenidos se han representado en función de la profundidad de fisura para las dos secciones estudiadas (figuras 6 y 7). Los márgenes de error que aparecen en los gráficos son debidos a la dispersión del valor de C_m por los motivos mencionados en el párrafo anterior y a la incertidumbre en el valor de la profundidad de fisura por la incurvación que presenta su frente. Dicho valor se ha acotado entre los dos límites definidos por los dos frentes rectos envolventes del frente curvo real.

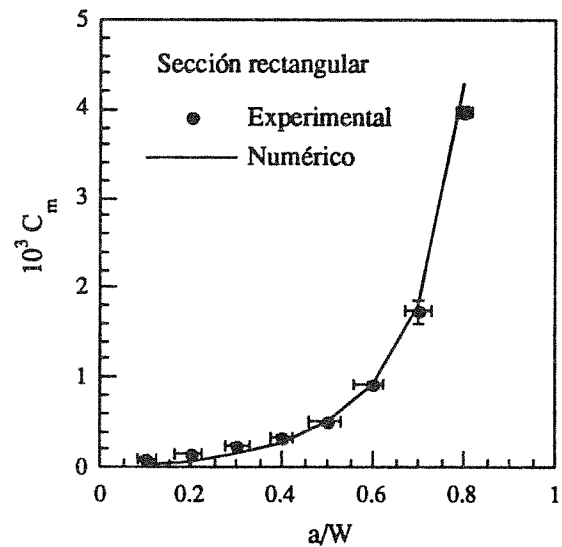


Fig. 6. Resultados experimentales: sección rectangular.

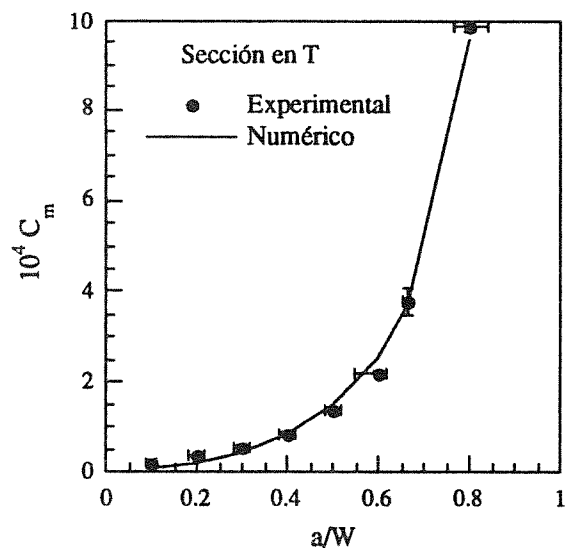


Fig. 7. Resultados experimentales: sección en T.

Además de los valores experimentales de C_m se han representado los valores calculados en trabajos anteriores [3,4] aplicando el método de los elementos finitos. Las diferencias son pequeñas y aleatorias tendiendo a mantenerse constantes en valor absoluto.

Esto hace que los errores relativos sean importantes cuando el valor de la función de flexibilidad es bajo, es decir para fisuras de poca profundidad. Por lo tanto, el procedimiento experimental diseñado tiene limitaciones para determinar las funciones de flexibilidad, pero es un instrumento eficaz para comprobar la validez de los valores obtenidos numéricamente y por añadidura, la de las hipótesis del propio método de las funciones de flexibilidad.

5.- CONCLUSIONES

La experimentación realizada ha confirmado los valores de las funciones de flexibilidad calculados anteriormente mediante elementos finitos para la sección rectangular y una sección en forma de T. El diseño de la experimentación está basado en el modelo de las funciones de flexibilidad, desarrollado para determinar movimientos y factores de intensidad de tensiones en vigas fisuradas hiperestáticas. Consecuentemente, la concordancia entre valores experimentales y teóricos no sólo confirma la validez de estos últimos, sino las hipótesis del propio modelo. Como método experimental para la determinación de funciones de flexibilidad, el procedimiento diseñado tiene serias limitaciones para fisuras de pequeño tamaño, porque los efectos que produce el error experimental en esos casos no son despreciables.

6.- REFERENCIAS.

- [1] El-Haddad, M. H., Ramadam, O. M. y Bazaraa, A. R., "Analysis of frames containing cracks and resting on elastic foundations", *Int J. Frac.*, 45, pp 81-102 (1990).
- [2] Valiente, A., Elices, M. y Ustáriz, F., "Determinación de esfuerzos y movimientos en estructuras lineales con secciones fisuradas", *Anales de Mecánica de la Fractura* 7, pp 272-277 (1990)
- [3] Ustáriz, F., Valiente, A. y Elices, M., "Stress intensity factors in statically indeterminate cracked beams", *X European Conference on Fracture*.(Berlín, September 1994)
- [4] Ustáriz, F., Valiente, A. y Elices, M., "Factores de intensidad de tensiones en vigas fisuradas con sección en T", *Anales de Mecánica de la Fractura* 11, pp 89-95 (1994)
- [5] Lau, C. K. "Fractura del polimetilmetacrilato", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1992

AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo ha sido posible gracias a las ayudas PB 92 - 0651 y MAT 94 - 0120 C03 de la DGICYT y la CICYT.