

CUANTÍA MÍNIMA EN FLEXIÓN: TEORÍA Y NORMATIVA

G. Ruiz, J. Planas y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales.
 Universidad Politécnica de Madrid.
 E. T. S. de Ingenieros de Caminos, C. y P.
 Ciudad Universitaria. 28040 Madrid, España.

Resumen. Las normas de construcción calculan la cuantía mínima de acuerdo con la teoría de agotamiento (plasticidad), que da resultados independientes del tamaño. Sin embargo, las vigas débilmente armadas muestran el efecto de escala: la carga máxima que puede soportar crece en menor proporción que el canto de la viga, a igualdad de cuantía y tipo de acero, sobre vigas proporcionales. La Mecánica de la Fractura aplicada al hormigón armado permite reproducir este efecto: en este artículo se analizan comparativamente las fórmulas de cuantía mínima basadas en Mecánica de la Fractura propuestas por distintos investigadores, incluyendo una expresión desarrollada por los autores a través de un modelo teórico basado en la fisura cohesiva, la cual incorpora la influencia de la adherencia acero-hormigón. Estas fórmulas se comparan con las disposiciones relativas a la cuantía mínima de las más importantes Normas de Construcción. De este análisis se desprende la conveniencia de revisar la Norma Española EH-91 en este punto, puesto que además de no ser sensible al tamaño del elemento estructural, prescribe cuantías más elevadas que las del resto de la normativa y que las propuestas por los distintos equipos de investigación.

Abstract. Minimum reinforcement in building codes is usually calculated in agreement with limit state theories (plasticity), whose results are not size dependent. Nevertheless, lightly reinforced beams show size effect: maximum load grows slower than beam depth in homotetic beams, reinforcement ratio and steel characteristics remaining constant. Concrete fracture mechanics catches this size effect: this paper compares the existing reinforcement ratio formulae, based on fracture mechanics, including one proposed by the authors through a model that takes into account steel-concrete adherence. Those expressions are also tested against building codes. This comparison shows the convenience of revising Spanish EH-91 in this subject, because its minimum reinforcement prescriptions do not depend on the beam size and seem to be too conservative.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los fenómenos más sensibles al efecto de escala característico de las estructuras de hormigón es la armadura mínima en flexión necesaria para conseguir una rotura dúctil. La importancia de este parámetro se comprende bien si consideramos que hay muchos criterios constructivos que conducen a secciones de hormigón que resistirían las cargas de diseño sin apenas refuerzo: en esos casos hay que asegurar que la estructura no rompa de modo frágil poniendo el acero preciso y, al mismo tiempo, evitar gastar más dinero del realmente necesario para cumplir ese objetivo.

Varios investigadores han estudiado este problema usando la mecánica de la fractura aplicada al hormigón armado, llegando a expresiones con las que se puede calcular la cuantía mínima en flexión. Bosco y Carpinteri [1] han propuesto la siguiente fórmula, basada en el desarrollo de la fractura elástica-lineal de una viga con armadura —aunque se ajusta con resultados experimentales—:

$$\rho_{\min} = \frac{K_{Ic}}{f_y \sqrt{D}} (0.1 + 0.0023 f_{cm}) \quad (f_{cm} \text{ en MPa}) \quad (1)$$

donde ρ_{\min} es la cuantía mínima (área de acero, A_s , entre el área de la sección de hormigón, A_c), K_{Ic} es la tenacidad de fractura del hormigón, f_y la tensión de cedencia del acero, D el canto de la viga y f_{cm} es la resistencia de compresión del hormigón.

Otra fórmula para armadura mínima en flexión es la propuesta por Baluch, Azad y Ashmawi [2]:

$$\rho_{\min} = \frac{\left(\frac{14.322 K_{Ic}}{f_y^{1.12}} \right)^{0.82}}{1.70 - 2.6 \frac{c}{D}} \quad (2)$$

en la que c es el recubrimiento de la armadura y el resto de variables tienen los significados explicados anteriormente (K_{Ic} se tiene que expresar en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ y f_y en

MPa; el coeficiente que multiplica a K_{IC} no es adimensional). Esta fórmula se basa en un ajuste experimental con ensayos en los que se han variado los parámetros de los que depende un modelo que ellos mismos han desarrollado.

También Gerstle y colaboradores [3] han propuesto una expresión, basada en un modelo teórico que tiene en cuenta el comportamiento cohesivo del hormigón:

$$\rho_{\min} = \frac{1}{n} \left\{ \sqrt{0.0081 + 0.0074 D/l_{ch}} - 0.0900 \right\}^{1/2} \quad (3)$$

donde n es la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón (E_s/E_c), y l_{ch} es la longitud característica del hormigón, que se define como [4]:

$$l_{ch} = \frac{E_c G_F}{f_t^2} \quad (4)$$

donde G_F es la energía específica de fractura del hormigón, y f_t su resistencia a tracción.

Por último, hay otra expresión de armadura mínima que se debe a Hawkins y Hjørsetet [5]:

$$\rho_{\min} = 0.175 \frac{f_r D}{f_y D - c} \quad (5)$$

donde f_r es el módulo de rotura (tensión nominal) de la sección de hormigón en masa, y es dependiente de las propiedades en fractura del hormigón.

Esta fórmulas de ρ_{\min} dependen de las características de los materiales: en particular de las propiedades en fractura del hormigón y de la tensión de cedencia del acero; sin embargo, ninguna de ellas es sensible a las propiedades de la interacción acero-hormigón. Por otra parte, a excepción de la ec. (2), estas expresiones de armadura mínima manifiestan el efecto de escala, aunque la tendencia de variación con el tamaño no es uniforme. Mientras la cuantía mínima de Bosco y Carpinteri (1) disminuye proporcionalmente al aumento de \sqrt{D} —efecto de escala propio de los materiales elástico-lineales—, la de Gerstle (3) aumenta en función de la raíz cuarta del canto. La de Hawkins y Hjørsetet (5) incluye su dependencia respecto del tamaño en el módulo de rotura f_r el cual disminuye con el canto de la viga, ya que es proporcional a la resistencia, y hay expresiones que permiten calcularla —en función del canto de la viga— con buena aproximación [6].

En la sección siguiente vamos a presentar una expresión para el cálculo de la cuantía mínima que pretende representar objetivamente la influencia real de todos los parámetros del acero y del hormigón, de su interacción mutua, y de la geometría y el tamaño de la viga. Es necesario definir previamente los conceptos de armadura mínima (§2.1.), hiperresistencia (§2.2.) y carga última de plastificación en una viga armada (§2.3.); a continuación proponemos una fórmula para el cálculo de ρ_{\min} (§2.4.) y comparamos, con un ejemplo concreto, sus cuantías con las de las fórmulas de otros autores y con las que prescribe la normativa de construcción vigente en algunos países de nuestro entorno. Finalmente extraeremos algunas conclusiones.

2. ARMADURA MÍNIMA

Nos proponemos obtener una expresión para calcular la armadura mínima que hay que poner en una viga para que en ningún caso rompa de modo frágil. Llamamos vigas débilmente armadas a las vigas que tienen un refuerzo próximo a ese mínimo.

Vamos a utilizar el modelo de la longitud efectiva de anclaje [7], que es capaz de reproducir, con bastante precisión, una serie de ensayos realizados sobre vigas con poca armadura [8]. Al estudiar el proceso de rotura de una viga débilmente armada con este modelo hallá-bamos que dependía del tamaño relativo a la longitud característica del hormigón, de la cuantía de acero, de la tensión de cedencia del acero y de la adherencia acero-hormigón. Estos cuatro parámetros, expresados de modo adimensional, son:

$$D^* = \frac{D}{l_{ch}} \quad \rho = \frac{A_s}{A_c} \quad f_y^* = \frac{f_y}{f_t} \quad \beta = \frac{\tau_c p l_{ch}}{f_t n A_s} \quad (6)$$

β representa a la adherencia, y depende de la tensión rasante última entre hormigón y acero, del perímetro de las barras, p , y de la relación entre los módulos de elasticidad del acero y el hormigón, n , (el resto de parámetros se introducen para que β sea adimensional, y han sido explicados anteriormente).

Este modelo constituye una buena herramienta para estudiar este tipo de estructura por medio de la realización de "ensayos teóricos", mucho más flexibles y económicos que los ensayos reales.

2.1. Concepto de armadura mínima

Ya que pretendemos estudiar la cuantía mínima necesaria para evitar una rotura frágil, es preciso determinar dónde ponemos en este trabajo el límite entre el comportamiento frágil y el comportamiento dúctil.

La Fig. 1 esquematiza gráficamente la transición que se produce en una viga armada desde un comportamiento frágil hasta un comportamiento dúctil. Si la viga no tiene armadura, el comportamiento es muy frágil, puesto que si se carga monótonamente romperá de modo súbito al llegar al máximo de resistencia. Al armarla se disminuye la fragilidad, pero solo conseguiremos evitar la rotura posterior a la carga máxima si el acero es capaz, por sí sólo, de soportar esa carga cuando el hormigón esté completamente roto: en estas condiciones, si intentásemos aumentar la carga exterior llevaríamos al acero a su límite de deformación plástica, y la viga se rompería. Cuando la viga se comporta de esa manera decimos que tiene la armadura mínima para conseguir un comportamiento dúctil. Por lo tanto la viga tiene cuantía mínima si su primer máximo (máximo de fisuración: P_{crack}) coincide con el plato de plastificación (nivel de la carga exterior cuando el acero está plastificado, trabajando a su tensión de cedencia: P_{yield}):

$$\text{comportamiento frágil : } P_{crack} > P_{yield} \quad (7)$$

$$\text{cuantía mínima, } \rho_{\min} : P_{crack} = P_{yield} \quad (8)$$

$$\text{comportamiento dúctil : } P_{crack} < P_{yield} \quad (9)$$

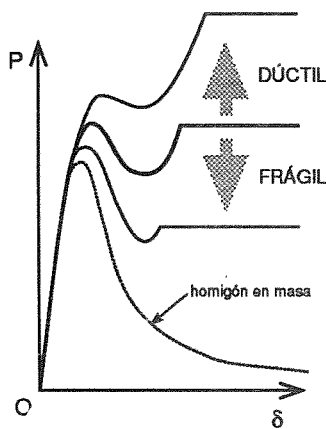


Fig. 1. Transición frágil-dúctil en una viga armada. El comportamiento límite marca la cuantía mínima.

2.2. El aumento de la carga máxima debido a la armadura (hiperresistencia)

Ya que la ec. (8) es la que nos va a facilitar obtener una expresión para la cuantía mínima, es necesario analizar cómo se pueden escribir de modo sencillo los dos términos de la igualdad.

El máximo de fisuración, P_{crack} , debe ser función, aparte de la geometría de la viga y del tipo de carga, de las propiedades del hormigón, del tamaño de la viga y de los parámetros que definan la actuación del acero: cuantía, posición, y adherencia al hormigón. Es decir, en general:

$$P_{crack} = f\left(\frac{D}{l_{ch}}, \rho, \frac{c}{l_{ch}}, \beta\right) \quad (10)$$

Si utilizamos el modelo de la longitud efectiva de anclaje para calcular P_{crack} podemos concretar más la forma de esa función:

$$P_{crack} = P_0 + \Delta P = P_0 + \rho \sqrt{\beta} g\left(\frac{D}{l_{ch}}, \frac{c}{l_{ch}}\right) \quad (11)$$

donde P_0 es la carga máxima que obtenemos en la viga sin armar, a la que se suma un incremento de carga, ΔP , que es proporcional a ρ y a $\sqrt{\beta}$ a través de una función del tamaño adimensional D/l_{ch} y del recubrimiento adimensional c/l_{ch} . Esta función depende también del tipo de ablandamiento del hormigón, y más concretamente, de la pendiente inicial de la función de ablandamiento, puesto que es el valor de la pendiente inicial la que determina el valor de la carga máxima de la viga en masa, P_0 [9]. Se puede, no obstante, independizar la ec. (11) del tipo de ablandamiento del hormigón haciendo los cálculos con una función de ablandamiento lineal que tenga precisamente esa misma pendiente (Fig. 2) teniendo en cuenta que al trabajar así también estamos modificando el valor de la energía de fractura y de la longitud característica del hormigón del modelo. En realidad estamos trabajando con una parte constante de la energía de fractura y de la longitud característica y son valores que pueden servir para caracterizar al hormigón en las primeras etapas de su rotura:

$$G_{F1} = \frac{1}{2} w_1 f_t \quad l_1 = \frac{E G_{F1}}{f_t^2} \quad (12)$$

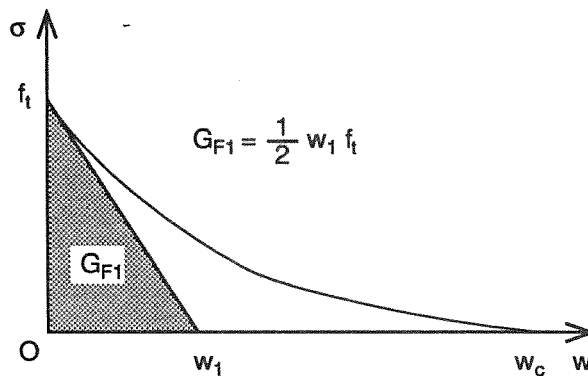


Fig. 2. Curva de ablandamiento lineal que, por tener la misma pendiente inicial que la curva real del hormigón, va a producir el mismo comportamiento de la viga en los primeros pasos de la fisuración (ambas curvas predicen la misma carga máxima).

Se puede ajustar una curva analítica a los resultados de carga máxima adimensionalizada (P_0^*) que da el modelo teórico para diferentes valores de D/l_1 . Planas Guinea y Elices proponen la siguiente ecuación [6]:

$$P_0^* = \alpha \left(1 + \frac{1}{c_2 + c_1 D/l_1}\right) \quad (13)$$

donde α es una constante que depende de la geometría y tipo de carga. Si nos centramos en el caso de una viga de sección rectangular de ancho B y canto D , sometida a flexión en tres puntos con una luz entre apoyos s , (Fig. 3) P_0^* se obtiene como:

$$P_0^* = \frac{3P_0 s}{2BD^2 f_t} \quad (14)$$

y en (13), con una luz de cuatro veces el canto, $\alpha = 1.046$, y las constantes c_1 y c_2 toman el valor de 0.85 y 2.3 respectivamente. La ecuación (13) ofrece muy buen ajuste para $D/l_1 > 0.1$, es decir, ofrece un intervalo de validez muy amplio, útil para la mayoría de los tamaños usuales en la práctica (para hormigón ordinario $l_1 \approx 10-20$ cm).

Respecto del incremento de carga debido a la armadura, ΔP , lo podemos determinar con el modelo de la longitud efectiva de anclaje, corriendo varios casos de vigas armadas variando el tamaño y el recubrimiento (mientras que se mantienen constantes la cuantía y la adherencia). La estructura de la función g en (11), referida a una curva de ablandamiento lineal y adimensionalizada — g_1 — y para la geometría y tipo de carga de la Fig. 3 con $s = 4D$, es de la forma:

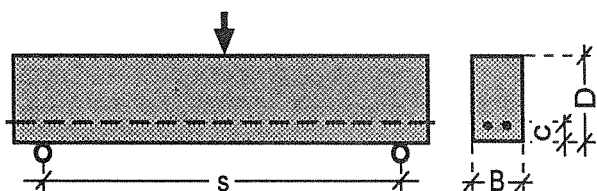


Fig. 3. Geometría y tipo de carga.

$$g_1^* = \frac{\Delta P^*}{\rho \sqrt{\beta}} = n_1 + n_2 \frac{c}{l_1} + n_3 \sqrt[4]{\frac{D}{l_1}} \geq 0 \quad (15)$$

donde los coeficientes n_1 , n_2 y n_3 valen -13.5 , -142 y 50 respectivamente. Lógicamente, hemos impuesto la condición de que el ΔP no puede ser nunca un valor negativo. La carga máxima de fisuración adimensional se obtiene sustituyendo las ecuaciones (13) y (15) en (11):

$$P_{crack}^* = P_o^* + \rho \sqrt{\beta} g_1^* \quad (16)$$

2.3. La carga última de plastificación

La carga exterior que produce la plastificación de la armadura, P_{yield} , se puede obtener fácilmente suponiendo que el hormigón está entonces totalmente fisurado. El resultado, escrito en forma adimensional, es:

$$P_{yield}^* = 6 \left(1 - \frac{c}{D}\right) \rho \frac{f_y}{f_t} \quad (17)$$

2.4. Ejemplo de una fórmula para armadura mínima

Ya hemos deducido expresiones sencillas de la carga máxima de fisuración, P_{crack} , y de la carga última de plastificación, P_{yield} , en función de las variables que controlan el proceso de fractura de la viga armada. Como veíamos en la ec. (8), únicamente restaría el igualar ambas ecuaciones para deducir la que nos daría la cuantía mínima de acero que consigue una rotura dúctil.

Igualando las ecuaciones (16) y (17), despejamos el valor de $\rho_{mín}$:

$$\rho_{mín} = \frac{\alpha \left(1 + \frac{1}{c_2 + c_1 D/l_1}\right)}{6 \left(1 - \frac{c}{D}\right) \frac{f_y}{f_t} - \sqrt{\beta} \left(n_1 + n_2 c/l_1 + n_3 \sqrt[4]{D/l_1}\right)} \quad (18)$$

Es necesario recordar que se debe comprobar que la ecuación (15) es positiva.

Para hacernos idea de la influencia de cada variable en la ec. (18), la podemos representar en tres dimensiones para valores fijos del recubrimiento y de la tensión de cedencia. En la Fig. 4 se ha dibujado una perspectiva de esta superficie de cuantía mínima para $c = 0.16 l_1$ y $f_y = 120 f_t$ (por ejemplo, si $l_1 = 150$ mm y $f_t = 4$ MPa, valores típicos en un hormigón normal, estamos hablando de un recubrimiento de 24 mm y de un acero de construcción de 480 MPa): los ejes horizontales son el tamaño — $D/l_1 = 0.5$ a 6 ; $D = 75$ a 900 mm— y la adherencia — $\beta = 0$ a 80 ; en nuestro ejemplo, si usamos barras $\varnothing 10$ con $n = 7$, la variación en la tensión crítica de adherencia es $\tau_c = 0$ a 18.6 MPa—.

(a) Influencia del tamaño

En la superficie de armadura mínima dibujada en la Fig. 4 se puede observar la influencia de la escala de la viga. Para adherencias bajas ($\beta = 0$ a 30) $\rho_{mín}$ disminuye a medida que aumenta el tamaño, de modo muy rápido primero pero con tendencia a suavizarse en los tamaños medios y grandes. Para adherencias medias ($\beta = 30$ a 50) el descenso de la armadura mínima es igualmente grande al principio, aunque a medida que sigue

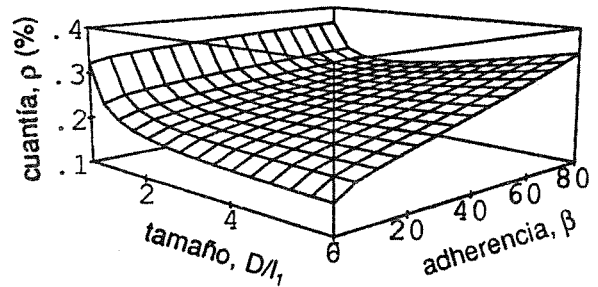


Fig. 4. Superficie de cuantía mínima para $c = 0.16 l_1$ y $f_y = 120 f_t$. Los ejes horizontales son el tamaño ($D/l_1 = 0.5$ a 6) y la adherencia ($\beta = 0$ a 80).

aumentando el tamaño $\rho_{mín}$ tiende a estabilizarse en un valor constante. Sin embargo, para adherencias altas ($\beta = 50$ a 80) en los tamaños grandes $\rho_{mín}$ vuelve a crecer: esta tendencia se debe al crecimiento de la carga máxima de fisuración que conlleva el aumento de rigidez del mecanismo de fisuración cuando la armadura es muy adherente.

(b) Influencia de la adherencia

Para todos los tamaños el aumento de adherencia supone un incremento de la cuantía mínima necesaria para conseguir una rotura dúctil (Fig. 4), precisamente debido a que ese aumento de la adherencia rigidiza el conjunto de la viga: el mecanismo de fisuración es más rígido cuando el acero tiene menos posibilidades de deformarse por su cuenta, es decir, cuando está más adherido al hormigón y debe acompañarle en su deformación.

Por otra parte, la rigidez del mecanismo de fisuración depende también del tamaño: por este motivo tenemos que con tamaños pequeños —viga dúctil— el aumento de $\rho_{mín}$ con la adherencia es suave, mientras que a medida que crece el tamaño —y por lo tanto crece la rigidez— el incremento de $\rho_{mín}$ tiende a ser más brusco.

(c) Influencia del recubrimiento y de la tensión de cedencia del acero

En la Fig. 5 se dibuja la superficie de cuantía mínima para dos valores distintos del recubrimiento ($c/l_1 = 0$ y 0.32 : con una longitud característica de $l_1 = 150$ mm, propia de un hormigón normal, estamos hablando de $c = 0$ y 48 mm), y para dos valores distintos de la tensión de cedencia del acero ($f_y = 100 f_t$ y $140 f_t$)

El recubrimiento nulo (Fig. 5a) eclipsa las propiedades cohesivas del hormigón, puesto que la fisura se propaga desde el principio con la oposición de la armadura, mientras que si crece el recubrimiento (Figs. 4 y 5b) se observa cómo el hormigón retoma su protagonismo en el proceso de fractura, manifestado en su característico efecto de escala.

Por otra parte, observando las Figs. 5c y d, resulta lógico comprobar que si f_y es mayor es necesaria menos cuantía mínima a igualdad del resto de los parámetros. Sin embargo, esta reducción no es proporcional (puesto que las superficies no tienen la misma forma): la cuantía mínima depende verdaderamente de la tensión de ce-

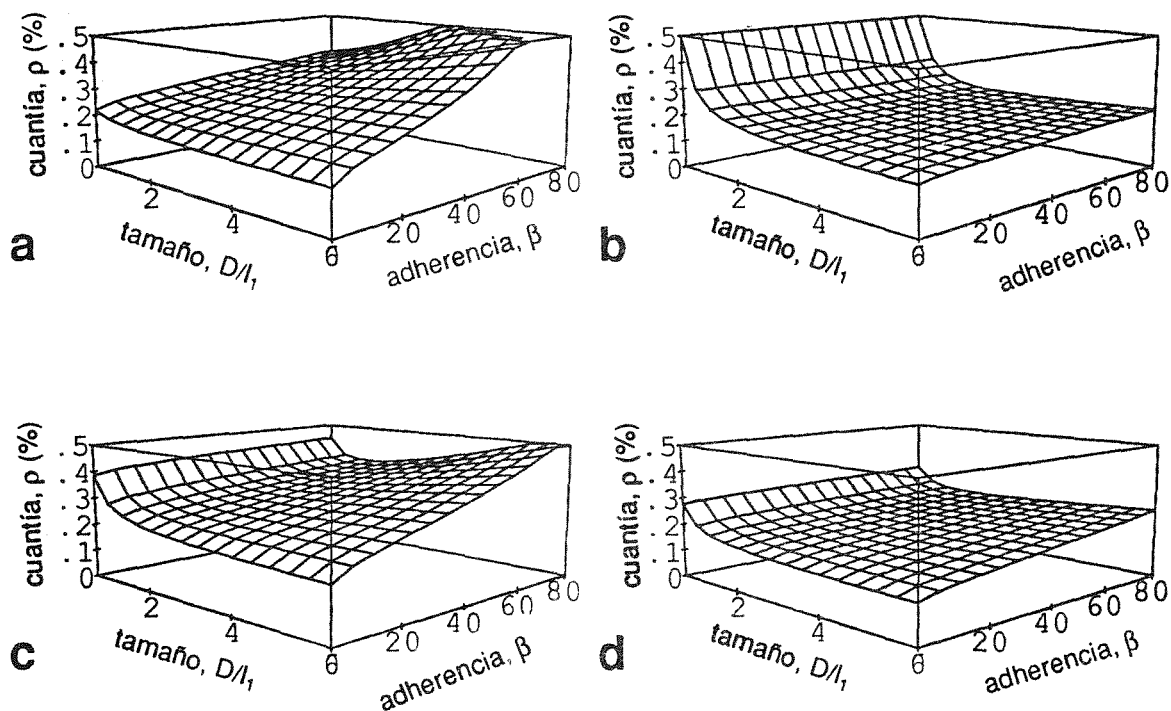


Fig. 5. Superficies de cuantía mínima para: (a) $c/l_1 = 0$, $f_y = 120 f_t$; (b) $c = 0.32 l_1$, $f_y = 120 f_t$; (c) $c = 0.16 l_1$, $f_y = 100 f_t$; y (d) $c = 0.16 l_1$, $f_y = 140 f_t$; los ejes horizontales son el tamaño (D/l_1 0.5 a 6) y la adherencia ($\beta = 0$ a 80).

dencia. No estamos hallando una cuantía mínima que se pueda reducir a la mitad si el acero tiene el doble de tensión de cedencia. Esto se debe a que la carga máxima de plastificación, P_{yield} , depende del producto ρf_y , mientras que en la carga máxima de fisuración, P_{crack} , interviene únicamente ρ puesto que el acero está todavía en régimen elástico.

(d) Comparación con las Normas de Construcción

Las Normas de Construcción no tienen en cuenta el efecto de escala de las vigas de hormigón y se puede decir que, en general, sus criterios dependen de variables que tienen poco o nada que ver con el proceso de fractura.

Podemos comparar, con un ejemplo, la cuantía mínima que prescribe cada Norma frente a los resultados de las expresiones existentes (Fig. 6). Hemos elegido los datos de un hormigón estándar armado con un acero de construcción normal. El recubrimiento es de 24 mm (con $l_1 = 150$ mm, $c = 0.16 l_1$) y la adherencia la dejamos variar entre valores usuales ($\beta = 20, 40$ y 60 : esta variación puede ser debida tanto a la variación del tipo de corruga como al uso de diámetros de barra diferentes).

La Norma española (EH-91) es la más conservadora: se sitúa en todo momento por encima de las predicciones del modelo teórico (para $\beta = 40$ y $D = 300$ a 450 mm la diferencia llega a ser del 40%). La Norma americana, aun siendo insensible a la variación del tamaño y de la adherencia, prescribe una cuantía mínima semejante a la dada por (18) en este caso concreto. El Código Modelo y el Eurocódigo estarían, si tomamos por buenas las predicciones del modelo, sensiblemente del lado de la inseguridad.

(e) Comparación con otras fórmulas de armadura mínima

En la Fig. 6 hemos dibujado también las curvas que corresponden a la armadura mínima en función del canto de la viga dada por distintos investigadores (§1) en el caso de este ejemplo. Además de las tendencias que apuntábamos en la introducción, podemos ver cómo las ecuaciones de Carpinteri, Baluch y Gerstle calculan cuantías inferiores a todas las Normas de Construcción en este caso concreto. Además, únicamente la ecuación (18) es sensible a la adherencia acero-hormigón.

4. CONCLUSIONES

De este estudio sobre la armadura mínima según distintos investigadores, y en comparación con la Normativa existente, podemos concluir:

- La armadura mínima en flexión manifiesta el efecto de escala típico de las estructuras de hormigón.
- La armadura mínima es asimismo función de la adherencia acero-hormigón, de la tensión de cedencia del acero y del recubrimiento de las barras de armado.
- Hemos deducido una expresión sencilla para el cálculo de ρ_{min} en función de estas variables basándonos en el modelo de la longitud efectiva de anclaje.
- Al comparar los criterios de diseño de Normativa relativos a la armadura mínima, con los resultados que da nuestra expresión, se puede afirmar que es necesaria una revisión de dichos criterios, ya que no son sensibles ni al tamaño de la viga ni a la adherencia acero-hormigón. En particular, la EH-91 prescribe cuantías más elevadas que el resto de la Normativa y que las propuestas por los distintos equipos de investigación.

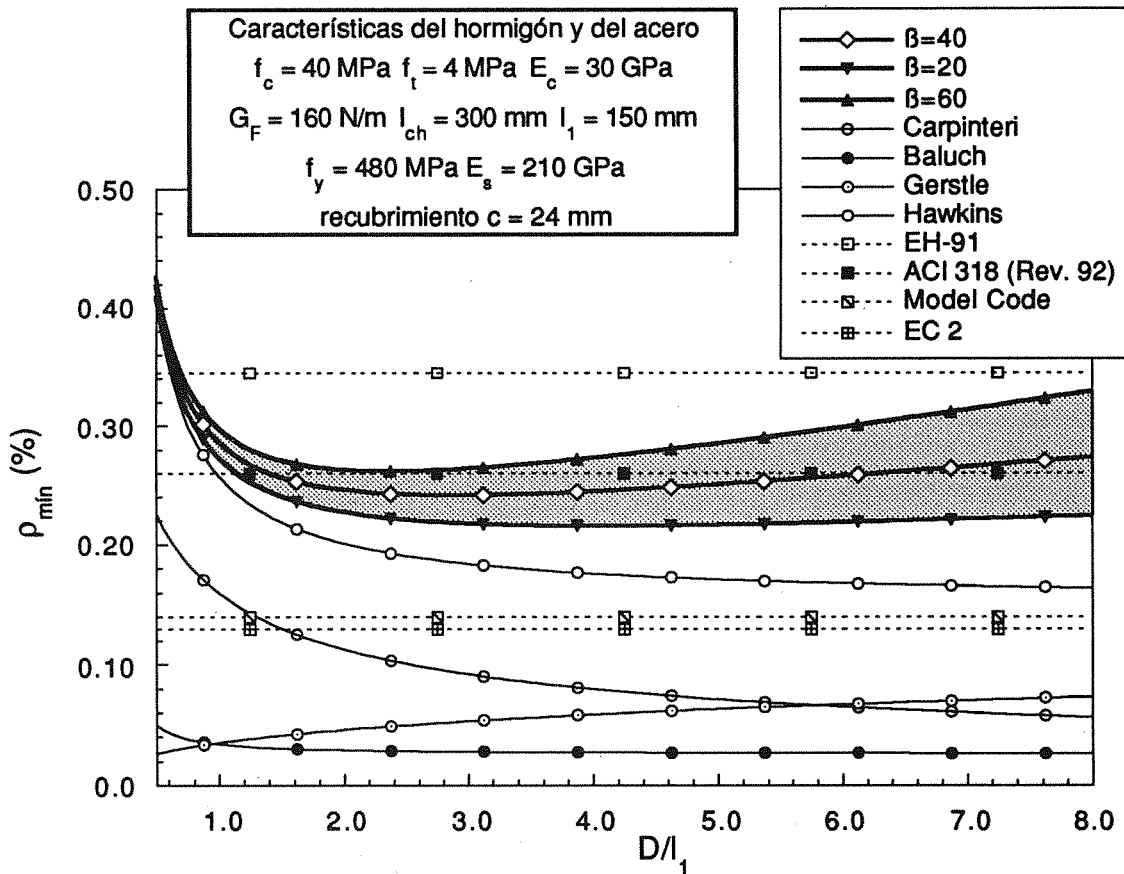


Fig. 6. Comparación entre las predicciones de cuantía mínima en función del tamaño que hacen diferentes Normas de Construcción y la fórmulas basadas en mecánica de la fractura aplicada al hormigón.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la DGICYT la ayuda económica recibida a través del proyecto PB93-0031, y a la CICYT a través del proyecto MAT94-0120-003.

6. REFERENCIAS

[1] Bosco, C., Carpinteri, A., and Debernardi, P. G., "Minimum reinforcement in high-strength concrete", *Journal of Structural Engineering*, **116**, N. 2, (Ed. ASCE), 427-437 (1990).

[2] Baluch, M. H., Azad, A. K., and Ashmawi, W., "Fracture mechanics application to reinforced concrete members in flexure", in *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, (Ed. Carpinteri, A.), Elsevier Applied Science, London, 413-436 (1992).

[3] Gerstle, W. H., Partha, P. D., Prasad, N. N. V., Rahulkumar, P. and Ming, X., "Crack growth in flexural members—A fracture mechanics approach", *ACI Structural Journal*, **89**, Title n. 89-S58, N. 6, 617-625 (1992).

[4] Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, **6**, 773-782 (1976).

[5] Hawkins, N., and Hjørsetet, K., "Minimum reinforcement requirement for concrete flexural members", in *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, (Ed. Carpinteri, A.), Elsevier Science Publishers, London, 379-412 (1992).

[6] Planas, J., Guinea, G. V., and Elices, M., "Rupture modulus and fracture properties of concrete", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, (Ed. Wittmann, F. H.), Aedificatio Publishers, Freiburg, 95-110 (1995).

[7] Ruiz, G., y Planas, J., "Propagación de una fisura cohesiva en vigas de hormigón débilmente armadas: modelo de la longitud efectiva de anclaje", *Anales de Mecánica de la Fractura*, **11**, 506-513 (1994).

[8] Planas, J., Ruiz, G., and Elices, M., "Fracture of lightly reinforced concrete beams: theory and experiments", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, (Ed. Wittmann, F. H.), Aedificatio Publishers, Freiburg, 1179-1188 (1995).

[9] Planas, J., and Elices, M., (1992), "Shrinkage eigenstresses and structural size effect", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, (Ed. Bazant, Z. P.), Elsevier Science Publishers, London, 939-950.