

**ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS DE CONTORNO DE PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN CUASI-ESTÁTICA DE FISURAS****J. Beltrán\*, J. Domínguez\*, R. Gallego\*\***\*Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Avda. Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla\*\*E. T. S. Ingenieros de Caminos, C. y P., Universidad de Granada  
Campus de Cartuja, 18071 Granada

**Resumen.** En esta comunicación se presenta la formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno para la resolución de problemas bidimensionales de propagación cuasi-estática de grietas dentro del régimen elástico-lineal. Mediante la formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno pueden analizarse problemas de fractura discretizando únicamente el contorno del dominio bajo consideración y ambas caras de la grieta, lo cual reduce enormemente el trabajo de modelado y remallado. Los factores de intensidad de tensiones en el vértice de la grieta, en modo I, II o mixto, se calculan de manera directa a partir de los desplazamientos de apertura y cizalladura del elemento adyacente al vértice. A partir de los factores de intensidad de tensión se ha calculado la dirección de propagación mediante el criterio de la mínima energía de deformación. En esta dirección se incrementa la longitud de la grieta simplemente añadiendo un nuevo elemento, sin necesidad de un costoso remallado del dominio, tal y como ocurre en otros métodos. Se muestra finalmente una serie de problemas de crecimiento cuasi-estático de fisuras.

**Abstract.** In this paper the mixed formulation of the Boundary Element Method is presented. This formulation is used to solving quasi-static crack propagation problems within the Linear Elastic Fracture Mechanics framework. The meshing effort is greatly reduced in the Mixed Boundary Element Method since only the exterior boundary and both faces of the crack have to be meshed. The Stress Intensity Factors, in mode I, II or mixed, are obtained from the crack opening and shearing displacement computed in a special element adjacent to crack tip. From the Stress Intensity Factors the crack propagation path can be predicted. The minimum strain energy density criterion has been used in this communication to predict. In the predicted direction the crack is extended simply appending a new boundary element, so there is no need of a complex remeshing effort as it happens in some other methods, Finally several problems of quasi-static crack-growth are shown.

**1. INTRODUCCIÓN**

La existencia de grietas en elementos mecánicos y estructurales es inevitable, bien por defectos de fabricación o por daños localizados en servicio. Para evaluar la tolerancia al daño de un elemento es necesario disponer de dos parámetros básicos: tamaño máximo permisible de una fisura bajo las condiciones de carga en servicio y estimación de la vida útil del elemento antes de que se alcance dicho tamaño.

Para calcular estos parámetros puede utilizarse la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal en la que el campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de una fisura se caracteriza por los Factores de Intensidad de Tensiones (FITs). A su vez el proceso de crecimiento de la fisura puede simularse me-

dante un procedimiento incremental de avance de la grieta. Para ambos objetivos el Método de los Elementos de Contorno (MEC) es una herramienta potente y eficaz de cálculo, dada la simplicidad de modelado que implica y la precisión de los resultados obtenidos en problemas con fuertes gradientes de tensiones (ver [1]).

Los problemas de grietas implican una dificultad adicional en el MEC debida a la coincidencia matemática de ambas caras de la misma, lo cual da lugar a un sistema de ecuaciones singular. Para superar esta dificultad se han desarrollado diversas técnicas: función de Green con fisura [2], el método de la discontinuidades [3], subregiones [4] y más recientemente el MEC mixto [5,6].

Este último método se está imponiendo al ser más versátil que los demás y permitir el análisis de problemas con un número cualquiera de grietas, de forma cualquiera, utilizando discretizaciones simplísimas. Gracias a esto el análisis del crecimiento de una fisura puede realizarse reduciendo al mínimo el proceso de remallado. La formulación mixta del MEC se basa en establecer la ecuación integral de los desplazamientos (d-EIC) en una de las caras de la fisura y la ecuación integral de las tracciones (t-EIC) en la otra. Haciendo esto se obtienen dos ecuaciones diferentes para cada par de puntos de iguales coordenadas, lo cual da lugar a un sistema de ecuaciones no-degenerado. Portela *et al.* [5] han utilizado esta técnica para analizar diversos casos de crecimiento estable de grietas. Para el cálculo de los FITs utilizan una técnica basada en la integral  $J$  junto con un proceso de substracción de la singularidad en el vértice de la fisura.

En esta comunicación se presenta brevemente la formulación del MEC mixto para la resolución de problemas de grietas. El cálculo de los FITs se hace de manera directa utilizando elementos singulares adyacentes al vértice de la grieta, tal y como han mostrado Sáez *et al.* [6], lo cual evita recurrir a un complejo postproceso.

El proceso de crecimiento de la grieta se lleva a cabo mediante un análisis incremental. Para cada incremento se predice la dirección de propagación de la fisura mediante el criterio de la mínima densidad de energía de deformación y esta dirección se corrige mediante el algoritmo propuesto por Portela *et al.* [5] para minimizar el efecto del tamaño finito del incremento. Se presentan finalmente diversas aplicaciones.

## 2. ECUACIONES BÁSICAS

La formulación mixta del MEC se basa en la d-EIC y en la t-EIC. En el caso de fuerzas másicas nulas la primera viene dada por la expresión [1]

$$c_{lk}u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (1)$$

donde  $f$  indica el valor principal de Cauchy de la integral,  $l$  y  $k$  indican las coordenadas cartesianas,  $c_{lk} = \delta_{lk}$  si  $\mathbf{y}$  es un punto del interior del dominio  $\Omega$ ,  $c_{lk} = 0$  si  $\mathbf{y}$  es exterior y  $c_{lk} = \frac{1}{2}\delta_{lk}$  para un punto del contorno  $\Gamma$  donde éste sea suave (normal continua);  $p_k(\mathbf{x})$  y  $u_k(\mathbf{x})$  son las componentes de las tracciones y desplazamientos en el contorno;  $p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y  $u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  representan las tracciones y desplazamientos, respectivamente, de la solución fundamental, en un punto  $\mathbf{x}$  en dirección  $k$ , debidos a una carga unidad aplicada en  $\mathbf{y}$  en dirección  $l$ .

La ecuación integral de las tracciones puede obtenerse a partir de la ecuación anterior aplicando las relaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio en el contorno (ver [6]) de modo que se obtiene,

$$c_{lk}p_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} d_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} s_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2)$$

donde  $\int$  indica la parte finita de Hadamard de la integral, y  $c_{lk}$  tiene el mismo valor que en la ecuación (1); los núcleos  $d_{lk}^*$  y  $s_{lk}^*$  son combinaciones lineales de las derivadas de  $u_{lk}^*$  y  $p_{lk}^*$ , respectivamente y su expresión puede encontrarse en [6].

La ecuación anterior se obtiene de (1) mediante derivación y tras un cuidadoso proceso de límite (ver [7]), que muestra, entre otras cosas, lo siguiente:

- El campo de desplazamientos debe ser diferenciable en el punto  $\mathbf{y}$  ( $u_k \in C^1$  en  $\mathbf{y}$ ). Igualmente las tracciones han de ser continuas ( $p_k \in C^0$  en  $\mathbf{y}$ ). Estas propiedades tienen que tenerlas las funciones escogidas para aproximar ambas variables y por lo tanto condiciona el tipo de elementos y la posición de los puntos de colocación que pueden usarse para resolver la t-EIC.
- El uso de los conceptos de Valor Principal de Cauchy y Parte Finita de Hadamard no son absolutamente necesarios para obtener la t-EIC, también llamada ecuación hipersingular. Sin embargo de esta manera la ecuación resultante es más compacta.

## 3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Para la formulación mixta del MEC planteamos la t-EIC en una cara de la grieta y la d-EIC en la otra así como en el resto del contorno. La ecuación d-EIC puede discretizarse mediante elementos cuadráticos estándar. Por otra parte, en los puntos de colocación utilizados para la t-EIC la discretización debe cumplir la restricción  $u_k \in C^1$ . Para ello se adoptan elementos cuadráticos discontinuos en los cuales los nodos extremos están colocados una cierta cantidad hacia adentro en el elemento (ver Fig. 1). Existe otra alternativa sencilla cual es la de plantear la t-EIC en nodos internos del elemento, pero manteniendo los nodos de interpolación en las posiciones estándar, tal y como hacen Gallego y Dominguez para el caso elastodinámico [8]. Otras alternativas más complicadas se basan en definir aproximaciones derivables mediante polinomios de Hermite o splines de Overhauser (ver [5] y las referencias citadas en ésta).

En los elementos cuadráticos discontinuos la geometría de los elementos se representa igual que en los

elementos cuadráticos estándar mediante una interpolación parabólica en la variable natural  $\xi$  a partir de las coordenadas en los extremos del elemento y en un nodo interior. Es decir,  $x = \Phi_1^G x_1 + \Phi_2^G x_2 + \Phi_3^G x_3$  y una ecuación similar para la coordenada  $y$ , siendo  $\Phi_j^G$  las funciones de forma geométricas. Por otra parte, las variables del contorno  $u_k$  y  $p_k$  se interpolan en función de los valores de éstas en los nodos internos NC1, NC2 y NC3 (ver figura 1),

$$u_k = u_k^1 \Phi_1 + u_k^2 \Phi_2 + u_k^3 \Phi_3 \quad (3)$$

siendo  $\Phi_j$  funciones de forma cuadráticas en la variable natural  $\xi$  diferentes de las  $\Phi_j^G$

Los elementos adyacentes al vértice de la grieta son elementos cuadráticos discontinuos rectos cuyo nodo central está desplazado hasta una posición a una distancia de  $L/4$  del vértice de la fisura, siendo  $L$  la longitud del elemento (E1/4D). Así, igual que en el caso de los elementos cuadráticos estándar se puede demostrar que entre  $\xi$  y la distancia  $\bar{r}$  entre un punto cualquiera del elemento y el vértice de la fisura existe la relación  $\xi = 2\sqrt{\bar{r}/L} - 1$  de modo que si se sustituye esta relación en la ecuación (3) se obtiene,

$$u_k = d_1 + d_2 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} + d_3 \frac{\bar{r}}{L} \quad (4)$$

donde  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  dependen de la geometría del elemento y de los valores nodales de  $u_k$ . Esta representación contiene tres términos del desarrollo asintótico de los desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la grieta, de modo que recoge las características más relevantes del campo en esa región.

En resumen, en el contorno exterior se utilizan elementos cuadráticos estándar y en ellos se coloca la d-EIC, mientras que en la fisura se usan elementos cuadráticos discontinuos y se coloca la d-EIC en una cara y la t-EIC en la otra. De este modo se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya resolución, tras aplicar las condiciones de contorno proporciona las incógnitas en el contorno exterior y en ambas caras de la grieta

#### 4. ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE GRIETAS

##### Cálculo de los Factores de Intensidad de Tensión

Tal y como se ha comentado en la sección anterior, para representar adecuadamente el campo de desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la grieta se emplean elementos a un cuarto cuyos nodos extremos se han desplazado al interior del mismo (E1/4D). En este trabajo se ha adoptado para los

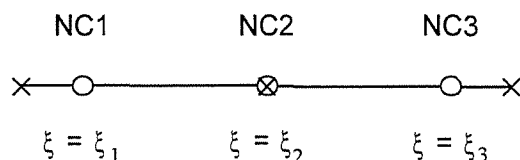


Figura 1: Elemento cuadrático discontinuo.

puntos NC1, NC2 y NC3 las posiciones  $\xi_1 = -3/4$ ,  $\xi_2 = 0$  y  $\xi_3 = 3/4$ , respectivamente. A partir de los desplazamientos en estos puntos es posible obtener diferentes fórmulas interpolativas para calcular los factores de intensidad de tensiones (FIT). Sáez *et al.* [6] han demostrado que la fórmula cuyos resultados son más precisos y estables ante un amplio rango de problemas y de variaciones de la geometría es la basada en los desplazamientos del nodo NC1. Esta fórmula viene dada por la expresión:

$$K_I = \frac{2\mu}{1-\nu} \Delta u_y^{NC1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \quad (5)$$

y una ecuación similar para  $K_{II}$ , siendo los ejes  $x-y$  un sistema local de coordenadas centrado en el vértice de la grieta, paralelo y perpendicular a la misma, respectivamente.

##### Criterios de Propagación de Grietas

Existen diferentes criterios para describir el crecimiento de grietas en modo mixto. El objetivo de un criterio de propagación es responder a tres preguntas sucesivas:

1. ¿Se propagará la grieta bajo las condiciones de carga dadas?
2. Si lo hace, ¿en que dirección se propagará?
3. Supuesto crecimiento estable ¿cuál será la tasa de crecimiento?

Sin embargo, casi la totalidad de los criterios sólo dan respuesta a las dos primeras cuestiones, teniendo que recurrirse a otras consideraciones para responder a la tercera pregunta.

Uno de los criterios más utilizados es el de la *mínima densidad de energía de deformación* (MDED) debido a G.C.Sih [10]. Este criterio se basa en las siguientes hipótesis:

1. La grieta se propagará en la dirección en la que  $w = \frac{dW}{dV}$  sea mínima, siendo  $W$  la energía de deformación y  $V$  el volumen. Es decir,  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$  y  $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} > 0$
2. La propagación se producirá cuando  $w$  alcance un valor crítico, que será una constante del material:  $w = w_{crit}$ .

Es fácil comprobar, utilizando los valores asintóticos de las tensiones y desplazamientos que  $w = \frac{1}{16\pi\mu} \frac{S}{r}$

siendo,

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (6)$$

con,

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 + \cos \theta)(\beta - \cos \theta) \\ a_{12} &= \text{sen} \theta(1 - \beta + 2 \cos \theta) \\ a_{22} &= (1 + \beta)(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)(3 \cos \theta - 1) \end{aligned}$$

donde  $\beta = 3 - 4\nu$  para deformación plana y  $\beta = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  para tensión plana.

La minimización de  $w$  en  $\theta$  equivale a la de  $S$ . Si se hace esta operación, la ecuación que determina el valor del ángulo es:

$$b_{11}K_I^2 + 2b_{12}K_I K_{II} + b_{22}K_{II}^2 = 0 \quad (7)$$

con,

$$\begin{aligned} b_{11} &= (1 - \beta) \text{sen} \theta + \text{sen}(2\theta) \\ b_{12} &= (1 - \beta) \cos \theta + 2 \cos(2\theta) \\ b_{22} &= (\beta - 1) \text{sen} \theta - 3 \text{sen}(2\theta) \end{aligned}$$

Con este criterio la dirección de propagación que se obtiene para  $K_I = 0$  es  $\theta_o = \arccos(\frac{\beta-1}{6})$ .

Por otra parte, la condición de propagación se reducirá a  $S(\theta = \theta_o) = S_{\text{crit}}$ , siendo el valor crítico el valor de esta función para el caso de rotura en modo I, i.e.  $S_{\text{crit}} = S(\theta_o = 0, K_I = K_{Ic}, K_{II} = 0)$ . Así resulta,

$$a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 = 2(\beta - 1)K_{Ic}^2 \quad (8)$$

siendo  $a_{ij}$  las funciones trigonométricas dadas más arriba.

### Proceso Iterativo de Avance de la Grieta

Supongamos que el vértice de la fisura ha alcanzado la posición  $A^k$  y está sometido a un campo de tensiones caracterizado por los FITs  $[K_I, K_{II}]^k$ . Aplicando algún criterio de propagación obtenemos el ángulo de crecimiento  $\theta^{k,o}$  que representa el ángulo tangente al camino continuo que sigue la grieta en su avance. Puesto que los incrementos de longitud de la fisura han de ser finitos, al alargar la grieta en la dirección  $\theta^{k,o}$  una cantidad  $\Delta a$  se cometerá un cierto error, tanto mayor cuanto mayor sea el avance finito de la grieta. Este error será preciso minimizarlo en la medida de lo posible, lo cual se trata más adelante.

Los elementos de contorno añadidos para formar las nuevas caras de la grieta son elementos a un cuarto discontinuos (E1/4D) tal y como se observa en la figura 2. A su vez es necesario modificar los E1/4D que eran adyacentes al vértice en  $A^k$  y convertirlos en elementos cuadráticos discontinuos normales,

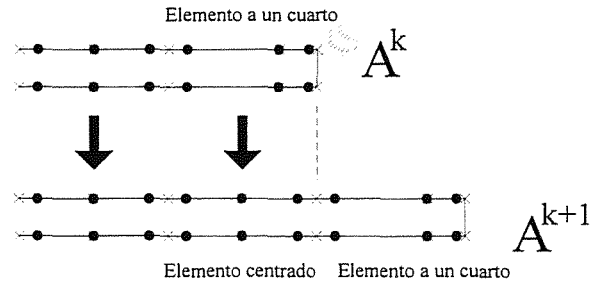


Figura 2: Generación de elementos para el avance de la grieta.

puesto que estos elementos ya no han de representar el comportamiento asintótico de los desplazamientos al trasladarse el vértice de  $A^k$  a  $A^{k+1}$ .

Por tanto, el sistema de ecuaciones del sistema no sólo se ve ampliado al añadir nuevos elementos discontinuos a un cuarto (12 nuevas ecuaciones, 12 nuevas columnas) sino que además hay que modificar las filas y columnas correspondientes al elemento a un cuarto del paso anterior. La matriz del sistema  $\mathbf{A}$  se resuelve aplicando la descomposición  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  lo cual permite una actualización y resolución rápida del sistema modificado.

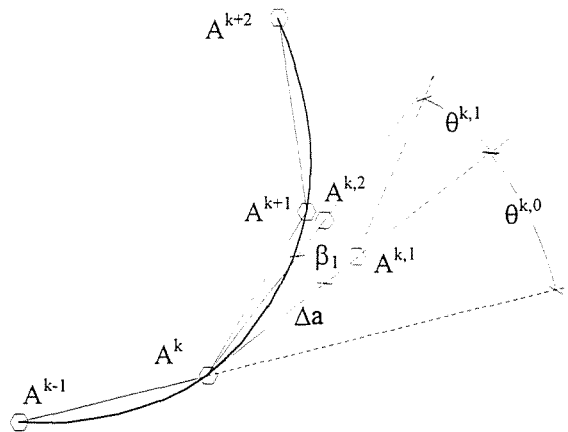


Figura 3: Proceso iterativo de predicción de la dirección de avance de la grieta.

Los criterios de propagación son independientes del tamaño del avance escogido para la grieta ( $\Delta a$ ) y por tanto, diferentes valores de  $\Delta a$  dan lugar a distintas trayectorias de la grieta. La dirección correcta de propagación asegura que independientemente del tamaño del avance de grieta escogido la trayectoria final sea única. El procedimiento iterativo aplicado para corregir la dirección predicha por el criterio se basa en el trabajo de Portela *et al.* [5] y sigue los siguientes pasos (ver figura 3):

1. Partiendo del vértice de la grieta en la posición  $A^k$  se obtiene el ángulo inicial de avance  $\theta^{k,o}$

mediante el criterio de propagación escogido.

2. A lo largo de esta dirección se extiende la grieta un incremento  $\Delta a$  hasta un nuevo punto  $A^{k,i}$  y se calculan los nuevos FITs ( $i = 1$  en la primera iteración).
3. Se calcula de nuevo con el criterio elegido el ángulo de propagación  $\theta^{k,i}$ .
4. Se define el ángulo de corrección  $\beta_i = \theta^{k,i}/2$  tal y como se observa en la figura 3.
5. Se corrige la dirección de propagación predicha  $\theta^{k,i+1} = \theta^{k,i} + \beta_i$ .
6. Mientras sea  $|\beta_i| < |\beta_{i-1}|$  se repite el proceso descrito desde el paso segundo, tras incrementar  $i$ .
7. El vértice final de la fisura tras la convergencia del algoritmo anterior se denomina  $A^{k+1}$ .

El algoritmo propuesto es simple y estable. Mediante este proceso de corrección se pretende que la dirección de propagación predicha se aproxime a la dirección secante a la curva en vez de a la dirección tangente. Sin embargo este algoritmo propuesto por Portela *et al.* no es completamente satisfactorio pues, según los resultados preliminares obtenidos, da lugar a que el camino predicho para una grieta ¡es independiente del criterio de propagación escogido!. Es necesario profundizar en este aspecto del problema.

## 5. APLICACIONES

### Placa cuadrada fisurada en modo II

La primera aplicación es la de una placa cuadrada  $2h \times 2h$  con una grieta de longitud  $a = h/3$ . La grieta está bajo modo II con cargas de tracción en la parte superior de la placa y compresión en la inferior tal y como se observa en la figura 4. La discretización consta de 22 elementos cuadráticos en el contorno exterior (20 elementos estándar y 2 semidiscontinuos en los bordes donde la fisura asoma al exterior) y 3+3 elementos discontinuos para la grieta (3 en la cara superior y 3 en la inferior). Las figuras 5 y 6 muestran la trayectoria de la grieta y el valor que alcanzan los FITs a lo largo del proceso, respectivamente. En esta última los FITs se han adimensionalizado con el valor de  $K_{II}$  al inicio.

### Placa cruciforme fisurada en una esquina entrante

En la segunda aplicación se estudia una placa cruciforme con tracciones en sus cuatro extremos y que contiene una fisura de longitud  $a = h/4$  en una de las esquinas entrantes, tal y como se observa en la

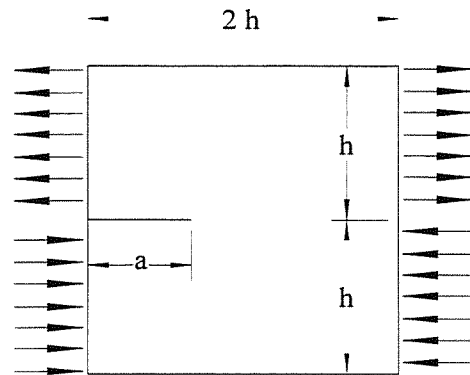


Figura 4: Geometría y cargas de una placa cuadrada en modo II.

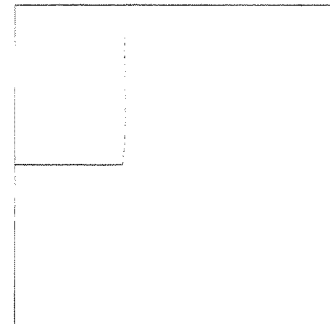


Figura 5: Trayectoria descrita por la grieta en su avance para la placa cuadrada.

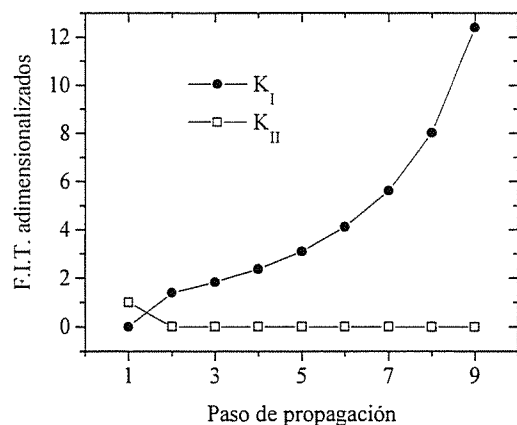


Figura 6: Valor de los FITs en modo I y II adimensionalizados.

figura 7. Se han llevado a cabo cuatro análisis, para diferentes combinaciones de las tracciones  $t_1$  y  $t_2$ :  $t_1 = t_2$ ,  $t_1 = t_2/2$ ,  $t_1 = 0$  y  $t_1 = -t_2$ . La placa se ha discretizado con 48 elementos cuadráticos en el contorno exterior y 4+4 en la fisura. La figura 8 muestra las trayectorias de la fisura bajo los cuatro supuestos de carga.

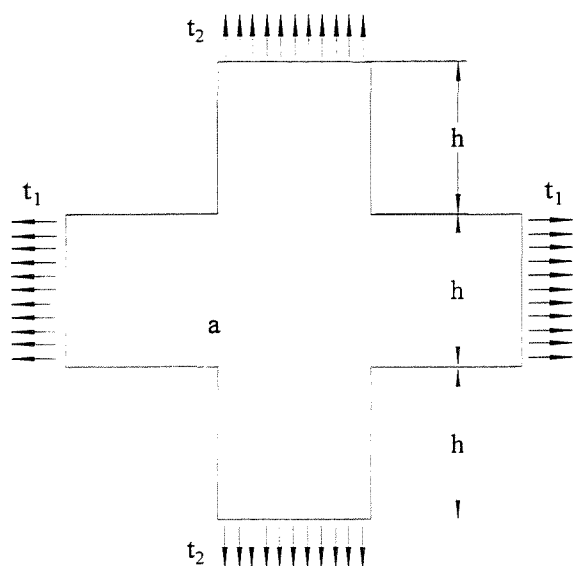


Figura 7: Geometría y cargas de una placa cruciforme.

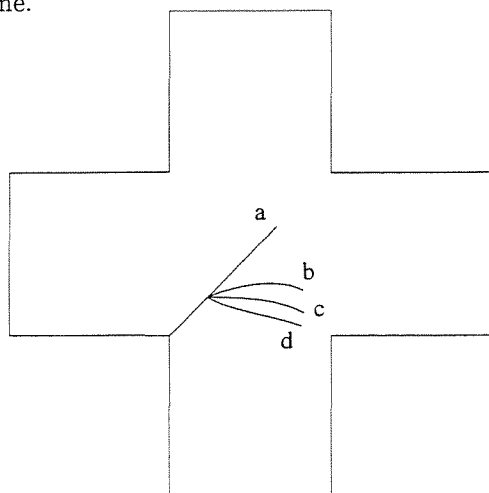


Figura 8: Trayectoria de la fisura para cuatro estados de carga: a)  $t_1 = t_2$ , b)  $t_1 = t_2/2$ , c)  $t_1 = 0$ , d)  $t_1 = -t_2$ .

## 6. CONCLUSIONES

Se ha expuesto en esta comunicación una metodología basada en el Método de los Elementos de Contorno para la resolución de problemas de propagación cuasi-estática de grietas. Se hace uso de la ecuación integral de los desplazamientos y de la ecuación integral de las tracciones, lo cual permite estudiar este tipo de problemas reduciendo al mínimo el esfuerzo de discretización, aspecto de grandísima importancia en este tipo de problemas.

Para predecir el camino de propagación se ha utilizado en esta comunicación el criterio de la mínima

densidad de energía de deformación, aunque cualquier otro criterio es igualmente implementable. Para corregir el efecto divergente debido a la finitud del avance de la fisura en cada paso se ha utilizado un algoritmo corrector propuesto en la literatura. Los primeros resultados indican que dicho algoritmo debe ser revisado pues produce idénticos resultados independientemente del criterio.

Por último se ha mostrado con dos aplicaciones de modo mixto la potencia del método propuesto.

## 7. REFERENCIAS

- [1] Brebbia, C.A. y Domínguez, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1989.
- [2] Snyder, M. D. y Cruse, T. A. Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates, *Int. J. Fracture*, 1975, **11**, 315-328.
- [3] Crouch, S. L., Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method, *Int. J. Numer. Engng.*, 1976, **10**, 301-342.
- [4] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. y Liggett, J.A., Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1981, **17**, 387-404.
- [5] Portela, A., Aliabadi, M.H., y Rooke, D.P., Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, in *Advances in BEM for Fracture Mechanics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1993.
- [6] Sáez, A., Gallego, R. y Domínguez, J., Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1995, **38**, 1681-1701.
- [7] Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. y Rizzo, F.J., A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *J. Appl. Mech.*, 1992, **59**, 604-614.
- [8] Gallego, R., Domínguez, J., Hypersingular BEM for Transient Elastodynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1996, **39**, 1681-1705.
- [9] Erdogan, F. y Sih, G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng.*, 1963, **85**, 519-527.
- [10] Sih, G.C., Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, *Engng. Fract. Mech.*, 1973, **5**, 365-377.