

ESTADOS BIDIMENSIONALES EN MECANICA DE LA FRACTURA: CONSIDERACIONES DIMENSIONALESJ. Setién y J. M^a Varona

Departamento de Ciencia e Ingeniería del Terreno y de los Materiales
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Cantabria
Avenida de Los Castros s/n, 39005. Santander.

Resumen. Las condiciones de rotura en estados bidimensionales (tensión plana o deformación plana) revisten especial interés dentro del marco de la Mecánica de la Fractura y su estudio, desde la perspectiva teórica que permite el Análisis Dimensional, conduce a interesantes resultados, destacándose, como previo y fundamental, la posibilidad de utilización de la base dimensional parcialmente discriminada $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$ para analizar cualquier problema enmarcado en dicho ámbito. Como ejemplo de la aplicabilidad de este método, en la referida base dimensional, se analiza el problema de la determinación del factor de intensidad de tensiones de una probeta DCB (double cantilever beam) y se compara el resultado obtenido con las soluciones deducidas por otros procedimientos experimentales, analíticos y numéricos, comprobándose en todos los casos su correspondencia formal con la deducida mediante Análisis Dimensional.

Abstract. Fracture conditions in bidimensional states (plane stress or plane strain) are of special interest inside the framework of Fracture Mechanics. Their study from the theoretical point of view allowed by Dimensional Analysis provides very important results, such as the possibility of using the base $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$.

The applicability of the presented methodology is exemplified by the problem concerning the determination of the stress intensity factor for DCB samples. The result is compared with the solution obtained by the other methods (analytical, numerical or experimental). In all cases, the corresponding final agreement validates the Dimensional Analysis methodology.

1. INTRODUCCION

El Análisis Dimensional, desde los trabajos originales de Fourier [1] hasta su completo desarrollo como disciplina perfectamente estructurada por parte de Bridgman [2] y Palacios [3], pasando por la fundamental aportación de Buckingham [4] con su célebre Teorema Π , se ha destacado como una eficaz herramienta para el estudio de problemas enmarcados dentro de ciertas teorías físicas (Hidráulica, Termodinámica, Mecánica de Fluidos, Elasticidad y Resistencia de Materiales, etc.) cuya solución analítica se hace prácticamente inabordable por las insuperables dificultades matemáticas que encierra.

En el campo de la Mecánica de Fractura su aplicación ha sido ciertamente muy escasa, habiéndose realizado algunos intentos por parte de Wagner [5] sobre el problema de la rotura de los materiales y Navarro y De los Ríos [6] en el marco de la fatiga. También Rice et al. [7] utilizaron anteriormente el Análisis Dimensional como herramienta auxiliar en la determinación de la integral J directamente a partir del registro carga-desplazamiento de una única probeta.

Muy recientemente los autores [8] realizan un estudio de la Mecánica de la Fractura desde la perspectiva teórica que permite el Análisis Dimensional, resolviendo una gran variedad de problemas asociados a la misma, tanto en el ámbito de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) como de la Mecánica de la Fractura Elastoplástica (MFEP). En este marco puede considerarse el presente trabajo, que trata de destacar la trascendente importancia que, desde el punto de vista dimensional, representan los estados bidimensionales en el estudio de la Mecánica de la Fractura.

2. MECANICA DE LA FRACTURA Y ANALISIS DIMENSIONAL

Dentro del marco teórico que proporciona el Análisis Dimensional, la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal puede formularse completamente utilizando el siguiente conjunto de ecuaciones fundamentales [9]:

$$F = m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1)$$

$$F = \frac{m_g \cdot m_g'}{d^2} \quad (2)$$

$$m_g = \sqrt{G_u} \cdot m_i \quad (3)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4)$$

$$\tau = \mu \cdot \gamma \quad (5)$$

$$dW_s = R \cdot dA \quad (6)$$

donde (1), (2) y (3) constituyen un sistema completo de ecuaciones para la mecánica newtoniana, (4) y (5) representan la forma más simplificada de expresar la Ley de Hooke y la última, (6), recoge una condición de rotura del material, donde R representa su resistencia a la fisuración.

La matriz de exponentes con que las magnitudes primarias y las constantes características y universales ineludibles intervienen en las ecuaciones fundamentales es de la forma:

	[s]	[m _i]	[t]	[F]	[m _g]	[G _u]	[E]	[μ]	[R]
(1)	-1	-1	2	1	0	0	0	0	0
(2)	2	0	0	1	-2	0	0	0	0
(3)	0	-1	0	0	1	-1/2	0	0	0
(4)	-2	0	0	1	0	0	-1	0	0
(5)	-2	0	0	1	0	0	0	-1	0
(6)	-1	0	0	1	0	0	0	0	-1

Su rango es $h = 6$ y, en consecuencia, una base dimensional estará integrada por $p = n - h = 9 - 6 = 3$ variables. El menor formado con las columnas [F], [m_g], [G_u], [E], [μ] y [R] es no nulo y la base estará entonces integrada por las restantes magnitudes independientes: $\{[s], [m_i], [t]\} = \{L, M, T\}$.

Huntley sugirió el uso de la base discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$ con el fin de obtener soluciones más completas a partir de la metodología del Análisis Dimensional [10]. Sin embargo, el estado tensional en las proximidades del fondo de fisura en un sólido elástico lineal se expresa usualmente como función de las coordenadas polares planas usuales (r, θ) , definiéndose geoméricamente la coordenada r mediante la relación:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7)$$

En consecuencia, las direcciones X e Y son equivalentes y no pueden ser discriminadas [8], con lo que en Mecánica de la Fractura sólo es posible el uso de la base parcialmente discriminada $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$.

3. ESTADOS BIDIMENSIONALES DE TENSION Y DEFORMACION PLANAS

Los estados de tensión y deformación planas son básicos en el planteamiento local de la Mecánica de la Fractura a partir del estado tensional en las proximidades de una fisura pasante de longitud $2a$, situada en una placa infinita solicitada en modo I por una tensión σ remota, dado por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{otros términos} \quad (8)$$

donde $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ es el factor de intensidad de tensiones y los otros términos son despreciables frente al primero en el fondo de la fisura (región autónoma).

En condiciones de tensión plana, dadas cuando el espesor de la placa es relativamente pequeño, las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones pueden ponerse en forma matricial como:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9a)$$

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (9b)$$

resultando el primero independiente de las características elásticas del material por (8) y estando el segundo relacionado con el anterior a través de las conocidas ecuaciones de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (10a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (10b)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{E}I_\sigma \quad (10c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \quad (10d)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (10e)$$

cuya homogeneidad dimensional, aceptada la adimensionalidad del coeficiente de Poisson ν , exige:

$$[E] \equiv [\sigma_x] \equiv [\sigma_y] \quad (11)$$

$$[\mu] \equiv [\tau_{xy}] \equiv [\tau_{yx}] \quad (12)$$

Para deformación plana, las consideraciones serán análogas, salvo que ahora la tensión normal σ_z no es nula, siendo en este caso las componentes de los tensores correspondientes:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (13a)$$

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13b)$$

con $\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$, y resultando tanto uno como otro dependientes de los parámetros elásticos del material, si bien únicamente lo es la componente σ_z del tensor de tensiones y sólo del parámetro elástico ν .

La homogeneidad dimensional de las ecuaciones que expresan en esta situación de deformación plana la Ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (14a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (14b)$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (14c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \quad (14d)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (14e)$$

exige ahora la identificación de fórmulas dimensionales siguiente:

$$[E] \equiv [\sigma_x] \equiv [\sigma_y] \equiv [\sigma_z] \quad (15)$$

junto con la ya conocida (12).

Puesto que las fórmulas dimensionales en la base discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T\}$ de las componentes no nulas de los tensores de tensión y deformación se expresan como:

$$[\sigma_x] = \frac{L_x M T^{-2}}{L_y L_z} = L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} M^1 T^{-2} \quad (16a)$$

$$[\sigma_y] = \frac{L_y M T^{-2}}{L_x L_z} = L_x^{-1} L_y^1 L_z^{-1} M^1 T^{-2} \quad (16b)$$

$$[\sigma_z] = \frac{L_z M T^{-2}}{L_x L_y} = L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^1 M^1 T^{-2} \quad (16c)$$

$$[\tau_{xy}] = \frac{L_y M T^{-2}}{L_y L_z} = L_x^0 L_y^0 L_z^{-1} M^1 T^{-2} \quad (16d)$$

$$[\varepsilon_x] \equiv [\varepsilon_y] \equiv [\varepsilon_z] = L_x^0 L_y^0 L_z^0 M^0 T^0 \quad (16e)$$

y no siendo posible establecer la fórmula dimensional de

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (17)$$

por resultar

$$\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = \frac{L_x}{L_y} = L_x^1 L_y^{-1} \neq \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = \frac{L_y}{L_x} = L_x^{-1} L_y^1$$

se presentan problemas de falta de homogeneidad dimensional, en la aceptación física de los sistemas de ecuaciones (10) y (14), y la utilización del Análisis Dimensional discriminando las variables referenciales espaciales no será posible en un caso general.

Sin embargo, sí es posible la utilización de la base dimensional parcialmente discriminada $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$, que cumple evidentemente las condiciones (11) y (12) en caso de tensión plana y, prescindiendo de la componente σ_z , también cumple las exigencias de homogeneidad en deformación plana. En efecto, y para este caso, la simple sustitución de σ_z en (14a) y (14b) por su valor en función de σ_x y σ_y elimina la dificultad derivada del último sumando de estas ecuaciones y las relaciones de homogeneidad dimensional (15) se reducen a la (11).

A la vista de los resultados obtenidos cabe afirmar que las variables σ_x y σ_y son siempre dimensionalmente homogéneas entre sí, pero no ocurre lo mismo con la componente $\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$, que aparece en el caso de deformación plana, y por tanto esta ecuación no es dimensionalmente homogénea en la base discriminada considerada. Según esto, la variable σ_z no se puede obtener como resultado utilizando el método discriminado, pero sí, en todos los casos, las deformaciones.

En consecuencia, los sistemas que en ambos casos (tensión y deformación planas) expresan la Ley de Hooke generalizada son dimensionalmente homogéneos en todas sus ecuaciones y por consiguiente, tanto en casos de tensión plana como de deformación plana, es lícito el uso del método discriminado con la base usual $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$.

4. APLICACION A LA DETERMINACION DE K_I PARA PROBETAS DCB

Las probetas DCB tienen importantes aplicaciones en el campo experimental de la Mecánica de la Fractura debido a las indudables ventajas que ofrecen: no plantean problemas especiales de fabricación, ni requieren dispositivos complejos de aplicación de las cargas; una misma probeta proporciona un amplio intervalo de tamaños de fisura, y si durante el ensayo de la probeta la fisura crece, las longitudes correspondientes pueden medirse por métodos directos a lo largo del experimento, incluso en el caso de que se desarrolle en ambientes agresivos, por lo que se utiliza con profusión en la caracterización de procesos de fisuración asociados a fenómenos de corrosión bajo tensión (CBT) y corrosión-fatiga (CF). Usualmente este tipo de probetas presenta en ambas caras sendas entallas laterales longitudinales para dirigir la fisura.

En la Figura 1 se representa el esquema simplificado de una probeta de este tipo junto con sus dimensiones características.

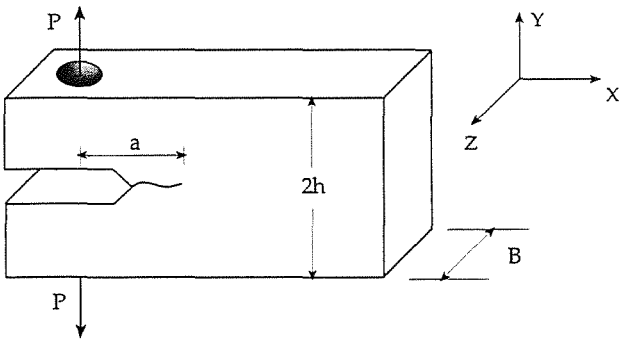


Figura 1. Esquema de una probeta tipo DCB con sus parámetros geométricos característicos.

Esta probeta se considera independiente de la dimensión geométrica según la dirección X [11], lo cual significa que la longitud de la probeta en dicha dirección es lo suficientemente grande como para asegurar que su cara posterior está adecuadamente alejada del fondo de la fisura con el fin de evitar que existan efectos de borde, siendo así despreciable la acción de distorsión de esta cara en el campo de tensiones del fondo de la fisura.

Las variables dato relevantes del problema se distribuyen entonces según las siguientes categorías:

- a) Geometría de la probeta: espesor (B), semicanto (h)
- b) Geometría de la fisura: longitud (a)
- c) Propiedades del material:
 - Parámetros elásticos: módulo de elasticidad longitudinal (E), coeficiente de Poisson (v)
- d) Sollicitación: carga (P)

habiéndose considerado los parámetros elásticos porque estos problemas usualmente se abordan en base a métodos energéticos y medidas de la flexibilidad. En efecto, el factor de intensidad de tensiones puede

obtenerse mediante la derivada de la energía elástica respecto al área de fisura, suponiendo constante el sistema de cargas aplicadas, y en este proceso de cálculo intervienen indefectiblemente los parámetros elásticos del material.

La función más general, en variables ordinarias, que resuelve el problema se expresa en forma implícita por:

$$F(B, h, a, E, v, P; K_I) = 0 \tag{18}$$

4.1 Utilización del método clásico

La utilización de la base dimensional usual de la Mecánica Clásica {L, M, T} conduce a la siguiente matriz de exponentes dimensionales para las variables que intervienen en la expresión (18):

Base	B	h	a	E	v	P	K_I
L	1	1	1	-1	0	1	-1/2
M	0	0	0	1	0	1	1
T	0	0	0	-2	0	-2	-2

cuyo rango es $h = 2$. Como variables independientes para formar parte de todos los monomios que integren un sistema completo se seleccionan h y E, puesto que K_I guarda relación de proporcionalidad directa con la tensión σ y, por tanto, con la carga P.

Un sistema completo de monomios adimensionales estará constituido por $r = n - h = 7 - 2 = 5$ monomios, definiéndose los siguientes factores de forma geométricos:

$$\bar{\omega}_B = \frac{B}{h} \quad ; \quad \bar{\omega}_a = \frac{a}{h}$$

junto con los monomios adimensionales:

$$\pi_v \equiv v$$

$$\pi_P = h^{\epsilon_h} E^{\epsilon_E} P \quad ; \quad [\pi_P] = L^0 M^0 T^0$$

$$\pi_{K_I} = h^{\epsilon_h} E^{\epsilon_E} K_I \quad ; \quad [\pi_{K_I}] = L^0 M^0 T^0$$

La igualación de exponentes dimensionales para el primero de estos monomios, asociado a la carga, da lugar al sistema:

$$L) \quad \epsilon_h - \epsilon_E + 1 = 0$$

$$M) \quad \epsilon_E + 1 = 0$$

$$T) \quad -2\epsilon_E - 2 = 0$$

cuya solución es de la forma $\epsilon_E = -1$ y $\epsilon_h = -2$, con lo cual se obtiene de forma inmediata el monomio:

$$\pi_P = \frac{P}{E h^2}$$

Igualmente, para el monomio asociado al factor de intensidad de tensiones se obtiene:

$$L) \quad \epsilon_h - \epsilon_E - \frac{1}{2} = 0$$

$$M) \quad \epsilon_E + 1 = 0$$

$$T) \quad -2\epsilon_E - 2 = 0$$

con lo cual $\epsilon_E = -1$ y $\epsilon_h = -1/2$. Por tanto:

$$\pi_{K_I} = \frac{K_I}{E \sqrt{h}}$$

y, en definitiva, la ecuación más general del problema en variables adimensionales es:

$$\Psi\left(\frac{B}{h}, \frac{a}{h}, v, \frac{P}{E h^2}, \frac{K_I}{E \sqrt{h}}\right) = 0 \quad (19)$$

o bien, haciendo uso de la teoría de las funciones homogéneas generalizadas, puede expresarse en forma explícita como:

$$K_I = E \sqrt{h} f\left(\frac{B}{h}, \frac{a}{h}, v, \frac{P}{E h^2}\right) \quad (20)$$

que es la solución que ofrece, en primera instancia, la metodología clásica del Análisis Dimensional.

4.2 Utilización del método discriminado

En la base usual $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$, la matriz de los exponentes dimensionales de las variables relevantes del problema es de la forma:

Base	(B)	(h)	a	(E)	v	P	K_I
$L_x \equiv L_y$	0	1	1	0	0	1	1/2
L_z	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	0	1	0	1	1
T	0	0	0	-2	0	-2	-2

El rango de la matriz es $h = 3$, y un sistema completo de monomios adimensionales estará integrado entonces por $r = n - h = 7 - 3 = 4$ monomios. Elegidas B, h y E, cuyo menor tiene rango 3, como variables que van a formar parte de todos los monomios adimensionales,

dicho sistema completo estará formado por el factor de forma geométrico:

$$\bar{\omega}_a = \frac{a}{h}$$

junto con los monomios adimensionales:

$$\pi_v \equiv v$$

$$\pi_P = B^{\epsilon_B} h^{\epsilon_h} E^{\epsilon_E} P; [\pi_P] = L_{x \equiv y}^0 L_z^0 M^0 T^0$$

$$\pi_{K_I} = B^{\epsilon_B} h^{\epsilon_h} E^{\epsilon_E} K_I; [\pi_{K_I}] = L_{x \equiv y}^0 L_z^0 M^0 T^0$$

La igualación de exponentes dimensionales para el monomio asociado a la carga conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$L_x \equiv L_y) \quad \epsilon_h + 1 = 0$$

$$L_z) \quad \epsilon_B - \epsilon_E = 0$$

$$M) \quad \epsilon_E + 1 = 0$$

$$T) \quad -2\epsilon_E - 2 = 0$$

La solución inmediata que se obtiene es $\epsilon_h = -1$, $\epsilon_B = -1$ y $\epsilon_E = -1$ y el monomio correspondiente es entonces:

$$\pi_P = \frac{P}{E h B}$$

De igual forma, para el monomio adimensional asociado al factor de intensidad de tensiones, se obtiene el sistema:

$$L_x \equiv L_y) \quad \epsilon_h + \frac{1}{2} = 0$$

$$L_z) \quad \epsilon_B - \epsilon_E - 1 = 0$$

$$M) \quad \epsilon_E + 1 = 0$$

$$T) \quad -2\epsilon_E - 2 = 0$$

cuya solución es $\epsilon_h = -1/2$, $\epsilon_B = 0$ y $\epsilon_E = -1$. En consecuencia, el monomio adimensional correspondiente será el mismo obtenido a partir del método clásico:

$$\pi_P = \frac{K_I}{E \sqrt{h}}$$

Por tanto, la ecuación más general del problema en variables adimensionales es:

$$\Psi\left(\frac{a}{h}, v, \frac{P}{E h B}, \frac{K_I}{E \sqrt{h}}\right) = 0 \quad (21)$$

que permite expresar en forma explícita:

$$K_I = E\sqrt{h} f\left(\frac{a}{h}, \nu, \frac{P}{E h B}\right) \quad (22)$$

4.3 Consideraciones finales

Como se ha comentado anteriormente, el factor de intensidad de tensiones guarda una relación de proporcionalidad directa con la tensión y ésta última a su vez tiene la misma propiedad con respecto a la carga, de forma que en la solución (22) es posible establecer su dependencia con el monomio adimensional asociado a la carga P , resultando:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{h}} f'\left(\frac{a}{h}, \nu\right) \quad (23)$$

De esta solución es preciso destacar su independencia del módulo de elasticidad longitudinal, E , si bien se mantiene la dependencia con el otro parámetro elástico, ν , y que la nueva función indeterminada depende exclusivamente de dicho parámetro y de la geometría de la probeta.

Una posible solución encontrada en la bibliografía, obtenida a partir de un modelo basado en la Resistencia de Materiales [12], y particularizada para el caso en que la longitud del ligamento resistente sea muy grande respecto a las dimensiones transversales de la probeta (ligamento infinito), se expresa por:

$$K_I = 2\sqrt{3} \frac{P}{B\sqrt{h}} \left(\frac{a}{h} + \sqrt{\frac{1+\nu}{5}} \right) \quad (24)$$

para el caso de tensión plana, y toma la forma:

$$K_I = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{P}{B\sqrt{h}} \left(\frac{a}{h} + \sqrt{\frac{1+\nu}{5}} \right) \quad (25)$$

para estados de deformación plana.

La identificación de estas soluciones con la (23) permite apreciar su correspondencia formal y deducir la función indeterminada:

$$f'\left(\frac{a}{h}, \nu\right) \equiv 2\sqrt{3} e_1 \left(\frac{a}{h} + \sqrt{\frac{1+\nu}{5}} \right) \quad (26)$$

siendo e_1 una constante que depende del coeficiente de Poisson:

$$e_1 = 1 \quad (\text{tensión plana}) \quad (27a)$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (\text{deformación plana}) \quad (27b)$$

No obstante, conviene señalar que existe cierta variabilidad en las soluciones encontradas en la bibliografía dependiendo de los procedimientos alternativos que se hayan empleado para abordar el problema: elementos finitos [13], transformada de Fourier [14], métodos experimentales [15] o modelos alternativos también basados en Resistencia de Materiales [16].

En cualquier caso, la concordancia entre las soluciones obtenidas, de origen experimental, analítico y numérico, es notable sobre todo cuando el efecto del ligamento resistente de la probeta es despreciable y cuando su longitud es comparable a la de la fisura, si bien se observan ciertas diferencias entre las soluciones en el caso de que el ligamento sea sensiblemente más corto que la fisura (ligamento finito).

Por otra parte, es importante señalar que si en lugar de cargas se imponen desplazamientos para calcular el factor de intensidad de tensiones, el problema se puede abordar desde el punto de vista de la Resistencia de Materiales haciendo uso de los teoremas de Mohr. En este caso el resultado final que se obtiene es también dependiente del módulo de elasticidad longitudinal [12]. En efecto, si se considera como desplazamiento en la línea de carga la variable δ , la ecuación (22) sería ahora:

$$K_I = E\sqrt{h} f\left(\frac{a}{h}, \nu, \frac{\delta}{h}\right) \quad (28)$$

y por la proporcionalidad del resultado con δ resultaría finalmente:

$$K_I = \frac{E\delta}{\sqrt{h}} f'\left(\frac{a}{h}, \nu\right) \quad (29)$$

La identificación de esta solución con la analítica, particularizada para $e_1 \equiv 1$, que usualmente se encuentra en la bibliografía [12]:

$$K_I = \frac{E\delta}{\sqrt{3}\sqrt{h}} \frac{\frac{1}{2} + \frac{a}{h}}{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h}} \quad (30)$$

permite igualmente apreciar su coincidencia formal, deduciéndose la función indeterminada

$$f'\left(\frac{a}{h}, \nu\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2} + \frac{a}{h}}{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{a}{h}} \quad (31)$$

5. CONCLUSIONES

Finalmente y como conclusiones se destacan entre otras, las siguientes:

- La utilización del análisis dimensional constituye un método alternativo seguro, sencillo y rápido para determinar la solución de cualquier problema físico, máxime cuando no se dispone de soluciones analíticas, y particularmente de aquéllos pertenecientes al ámbito de la Mecánica de la Fractura.
- La solución obtenida contiene siempre como factor una función indeterminada de variables adimensionales, cuyo número es significativamente menor que el correspondiente a las variables ordinarias consideradas inicialmente.
- Los problemas pertenecientes a estados bidimensionales pueden y deben resolverse en el marco del método discriminado del Análisis Dimensional mediante la utilización de la base dimensional usual parcialmente discriminada $\{L_x \equiv L_y, L_z, M, T\}$, permitiendo de esta forma obtener soluciones más precisas por depender de un menor número de variables adimensionales.
- Las soluciones analíticas, cuando existen e independientemente del proceso seguido para su deducción, responden en todos los casos a la estructura formal de la obtenida mediante Análisis Dimensional, pudiendo ser considerada esta última como la solución más general del problema planteado.
- Esta consideración de solución general, unida a su dependencia de parámetros adimensionales, hacen del Análisis Dimensional una muy útil herramienta dentro del área experimental y muy especialmente en diseños basados en modelos a escala reducida aplicando la Teoría de la Semejanza.
- Por último, como fundamental y por estar supeditado a las teorías físicas, el simple aprendizaje de la metodología propia del Análisis Dimensional es insuficiente para conseguir la verdadera eficacia del método. El conocimiento profundo de la teoría donde se integra el problema, su dependencia o no de determinadas variables son complementos de ayuda al análisis, que permiten precisar las soluciones y que para el profano resultan insustituibles.

6. REFERENCIAS

- [1] J. B. J. Fourier: "*Théorie Analytique de la Chaleur*", Gauthier-Villars, París, 1888.
- [2] P. W. Bridgman: "*Dimensional Analysis*", Yale University Press, New Haven, 1922.
- [3] J. Palacios: "*Análisis Dimensional*", Segunda Edición, Espasa-Calpe, Madrid, 1964.
- [4] E. Buckingham: "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations", *Physical Review*, Vol. IV, Nº 4, 1914.
- [5] H. D. Wagner: "On the Use of Dimensional Analysis in Material Failure", *International Journal of Fracture*, Vol. 25, Nº 3, Julio 1984, pp. R83-R86.
- [6] A. Navarro and E. R. De los Rios: "On Dimensional Analysis of Fatigue Crack Growth Rate and Geometrical Similitude of Cracks", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 9, Nº 5, 1986, pp. 373-378.
- [7] J. R. Rice, P. C. Paris and J. G. Merkle: "Some Further Results of J-Integral Analysis and Estimates", *Progress in Fracture Growth and Fracture Toughness Testing*, ASTM STP 536, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1973, pp. 231-245.
- [8] J. Setién: "Aplicación del Análisis Dimensional al estudio de la Mecánica de la Fractura", *Tesis Doctoral*, Universidad de Cantabria, Noviembre, 1996.
- [9] J. Setién and J. M^a. Varona: "On the Use of Dimensional Analysis in Fracture Mechanics", *Mechanisms and Mechanics of Damage and Failure (Vol. 1)*, Proceedings of the 11th Biennial European Conference on Fracture, Poitiers-Futuroscope, Francia, Septiembre 1996, pp. 125-131.
- [10] H. E. Huntley: "*Dimensional Analysis*", Londres, 1952.
- [11] A. J. Sedriks: "*Stress Corrosion Cracking Test Methods*", National Association of Corrosion Engineers, Houston, Texas, 1990.
- [12] A. Valiente y J. M^a. Varona: "Factores de Intensidad de Tensiones en Probetas DCB", *Anales de Mecánica de la Fractura*, IX Encuentro del Grupo Español de Fractura y I Encuentro Hispano-Francés de Fractura, Aiguablava, Gerona, Abril 1992, pp. 295-300.
- [13] J. E. Srawley and B. Gross: "Stress Intensity Factors for Crackline Loaded Edge Crack Specimens", *Materials Research and Standards*, 7, 1967, pp. 155-162.
- [14] W. B. Fichter: "The Stress Intensity Factor for the Double Cantilever Beam", *International Journal of Fracture*, 22, 1983, pp. 133-143.
- [15] S. Mostovoy, P. B. Crosley and E. J. Ripling: "Use of Crack Line Loaded Specimens for Measuring Plane Strain Fracture Toughness", *Journal of Basic Engineering*, 1967, pp. 661-673.
- [16] M. F. Kanninen: "A Dynamic Analysis of Unstable Crack Propagation and Arrest in the DCB Test Specimen", *International Journal of Fracture*, 10, 1974, pp. 415-430.