

ANÁLISIS DE FISURA COHESIVA POR INTEGRACIÓN DE SOLUCIONES ELÁSTICAS

J. Planas, C. Rosselló, I. Arbilla, G. V. Guinea y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales
 Universidad Politécnica de Madrid
 ETS Ingenieros de Caminos
 Ciudad Universitaria, 28040 MADRID

Resumen. Este artículo describe una técnica numérica especialmente adecuada para el análisis de fisuras cohesivas en procesos de rotura en modo I, como los que usualmente se producen en ensayos de laboratorio. Esta técnica, denominada de *fisuras superpuestas*, utiliza una superposición de soluciones para fisuras elásticas de distinta longitud para reducir el problema a una ecuación integral sobre la zona cohesiva, cuyo núcleo es particularmente adecuado para el tratamiento numérico. Además de la formulación analítica, se describe con detalle la discretización de la ecuación integral resultante introduciendo distintos tipos de funciones de forma y se estudian las prestaciones del método para el caso de una placa infinita con fisura pasante y zona cohesiva de Dugdale. Los resultados indican que el método es eficiente, especialmente cuando se usan funciones de forma singulares en la punta de la fisura inicial.

Abstract. This paper describes a numerical technique specially suited to analyze cohesive crack growth in mode I fracture processes, as usually found in laboratory testing. This technique, called the *smearred-tip method*, makes use of a superposition of solutions for elastic cracks of different lengths to reduce the problem to an integral equation over the cohesive zone, whose kernel is particularly simple to handle numerically. After the analytical formulation, the paper describes the discretization of the resulting integral equation using various shape functions and studies the performance of the method for the case of the center-cracked panel with Dugdale's cohesive zone. The results show that the method is efficient, most specially when singular shape functions are used adjacent to the initial crack tip.

1 INTRODUCCIÓN

El modelo de fisura cohesiva, tal como fue reformulado por Hillerborg y colaboradores [1], es una extensión de las aproximaciones iniciales de Dugdale y Barenblatt [2, 3] que ha sido extensamente utilizada para describir la fractura del hormigón y de otros materiales cuasifrágiles, como ciertos plásticos, cerámicos y compuestos.

El modelo, descrito con detalle en varios trabajos [4-8], consiste, en su versión más simple, en suponer que el material se comporta de forma elástica lineal e isótropa hasta que la tensión principal mayor alcanza la resistencia a tracción f_t , en cuyo momento se abre una fisura cohesiva perpendicular a la tensión principal mayor. A partir de este instante, la apertura de la fisura cohesiva aumenta pero sigue transmitiendo tensiones entre sus caras. Cuando la grieta cohesiva se abre en modo I de forma monótona, la tensión transmitida σ viene dada por una función unívoca de la apertura de la fisura w :

$$\sigma = f(w) \tag{1}$$

donde $f(w)$ es una función no creciente de w , denominada *función de ablandamiento*.

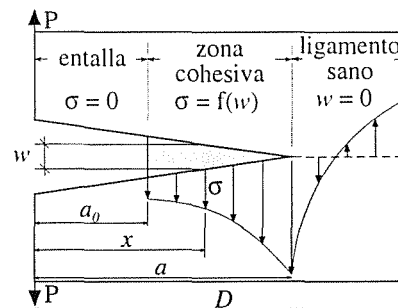


Figura 1: Representación de la fisura cohesiva.

En este artículo se describe una técnica de tratamiento numérico para el problema ilustrado en la Fig. 1, corriente en ensayos de laboratorio, en el que, a partir de una fisura o entalla preexistente, se propaga una fisura cohesiva en modo I.

Como se indica en la figura, las condiciones a cumplir a lo largo de la línea de la fisura son las siguientes: (1) sobre la entalla o fisura inicial las tensiones son nulas, (2) sobre la zona cohesiva la tensión está relacionada con la apertura por (1), y (3) sobre el ligamento sano la apertura es nula.

Este problema ha sido tratado por varios procedimientos, entre los que destacan por su rapidez los métodos de integrales de contorno, que aprovechan el hecho de que fuera de la zona cohesiva el material es elástico lineal, para buscar la solución como suma (integral, en la formulación analítica) de casos elásticos de solución conocida.

En este artículo se analiza un método integral denominado *método de las fisuras superpuestas* ya que expresa la solución por medio de una superposición de soluciones para fisuras elásticas de distinta longitud. La Sección 2 describe la formulación analítica del método. La Sección 3 estudia la discretización de de las ecuaciones integrales, y muestra que mediante funciones de forma adecuadas puede obtenerse un sistema de ecuaciones cuya matriz de rigidez secante es constante y triangular inferior, lo que reduce mucho el tiempo de cálculo. La Sección 4 estudia las prestaciones del método numérico para el caso de una placa infinita con fisura pasante y zona cohesiva de Dugdale, cuya solución analítica es conocida.

2 FORMULACIÓN INTEGRAL DEL MÉTODO DE LAS FISURAS SUPERPUESTAS

El método de las fisuras superpuestas consiste en escribir la solución de un problema de fisura cohesiva como suma, en este caso integral, de casos correspondientes a fisuras de diferente longitud s , variando entre 0 y D , de forma que para cada s el sólido está sometido a una carga infinitesimal $dP(s)$ (Fig. 2). De acuerdo con el esquema de superposición, la tensión y la abertura de los labios de la fisura resultantes son [9-13]

$$\sigma(x) = \int_0^D S(x, s) dP(s) \quad (2)$$

$$w(x) = \int_0^D W(x, s) dP(s) \quad (3)$$

donde $S(x, s)$ y $W(x, s)$ representan la tensión y el desplazamiento de los labios de la fisura en el punto x cuando la punta de la fisura llega hasta s y el cuerpo está sometido a una carga unidad ($P = 1$). Es evidente que para una fisura elástica de longitud s , la tensión será nula en aquellos puntos situados sobre la misma y también será nula la abertura de aquellos que estén en el ligamento sano. Así que se cumple:

$$\begin{aligned} S(x, s) &= 0 & \text{para } x < s & \text{ y} \\ W(x, s) &= 0 & \text{para } x \geq s \end{aligned} \quad (4)$$

La mecánica de la fractura elástica lineal indica que $S(x, s)$ es singular cuando $x - s \rightarrow 0^+$, donde es proporcional a $(x - s)^{-1/2}$, y además $W(x, s)$ es proporcional a $(s - x)^{1/2}$ cuando $s - x \rightarrow 0^+$.

Es conveniente interpretar las integrales anteriores en el sentido de la teoría de las distribuciones y escribir $dP(s)$

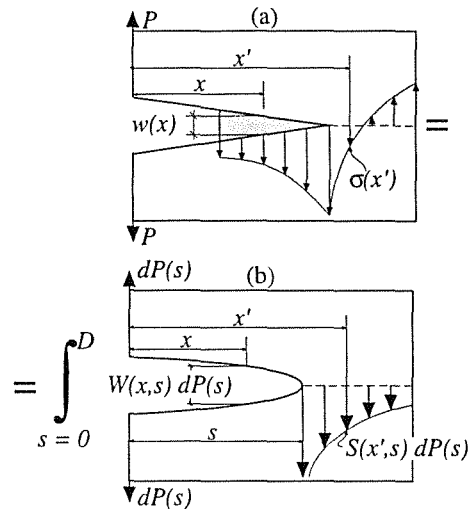


Figura 2: Descomposición por fisuras superpuestas.

como $p(s)ds$ donde $p(s)$ es una densidad de carga para fisuras cuya longitud es próxima a s . De acuerdo con esto y con las condiciones (4), las integrales se reducen a:

$$\sigma(x) = \int_0^x S(x, s) p(s) ds \quad (5)$$

$$w(x) = \int_x^D W(x, s) p(s) ds \quad (6)$$

Dada la distribución de densidad de carga $p(s)$, la carga total aplicada se obtiene por simple adición de los $dP(s)$, como se deduce de la Fig 2, de lo que resulta

$$P = \int dP(s) = \int_0^D p(s) ds \quad (7)$$

Imponiendo las condiciones indicadas en la Fig. 1, discutidas en la sección anterior, con las expresiones (5) y (6) para la tensión y abertura de fisura, obtenemos las ecuaciones integrales siguientes:

$$\int_0^x S(x, s) p(s) ds = 0 \quad x < a_0 \quad (8)$$

$$\int_0^x S(x, s) p(s) ds = f \left[\int_x^D W(x, s) p(s) ds \right] \quad a_0 < x < a \quad (9)$$

$$\int_x^D W(x, s) p(s) ds = 0 \quad a < x < D \quad (10)$$

El primero y el último grupo de ecuaciones se pueden resolver independientemente porque son de tipo Volterra con término independiente nulo, cuya solución es la trivial, es decir:

$$p(s) = 0 \quad \text{para } s < a_0 \quad \text{y} \quad a < s < D \quad (11)$$

lo cual significa que $p(s)$ es no nula unicamente dentro de la zona cohesiva. De acuerdo con esto, la ecuación (9) se

puede reescribir como

$$\int_{a_0}^x S(x, s) p(s) ds = f \left[\int_x^a W(x, s) p(s) ds \right] \quad (12)$$

para $a_0 < x < a$, donde lo único que ha variado son los límites de integración, de acuerdo con (11).

Suponiendo que los núcleos $S(x, s)$ y $W(x, s)$ son conocidos, el problema pasa a ser el de resolver la ecuación anterior para $p(s)$ en $a_0 < s < a$, dada la longitud de la fisura cohesiva a . Entonces las tensiones y las aberturas en un punto cualquiera se obtienen de (5) y (6), y la carga de (7). Estas ecuaciones se pueden reescribir, teniendo en cuenta (11), como

$$\sigma(x) = \int_{a_0}^{\min(x,a)} S(x, s) p(s) ds \quad (13)$$

$$w(x) = \int_{\max(x,a_0)}^a W(x, s) p(s) ds \quad (14)$$

$$P = \int_{a_0}^a p(s) ds \quad (15)$$

Se sobreentiende que las integrales se anulan cuando el límite inferior excede el límite superior (o sea, $\sigma(x) = 0$ para $x < a_0$, y $w(x) = 0$ para $x > a$).

Antes de empezar el análisis de los métodos numéricos para la solución de la ecuación integral (12), hay que destacar que $p(s)$ es singular en la punta de la entalla inicial siempre que la tensión a derecha de ese punto no sea nula. Planas y Elices [8, 9], demostraron que la singularidad es del tipo

$$p(s) = \frac{\pi}{2} \sigma(a_0^+) (s - a_0)^{-1/2} + R(s) \quad (16)$$

donde $\sigma(a_0^+)$ es la tensión cohesiva en la parte derecha de la punta de la entalla y $R(s)$ es una función regular en $s = a_0$. En la próxima sección se verá cómo esta propiedad puede ser usada en la formulación numérica para mejorar la precisión.

3 MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN

Para discretizar el problema se aproxima $p(s)$ por un conjunto de funciones base $\phi_i(s)$ ($i = 1, \dots, m$) que dependen únicamente de la posición (funciones de forma) multiplicadas por m coeficientes u_i tales que

$$p(s) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i(s) u_i \quad (17)$$

donde se supone que las funciones de forma cubren toda la línea de la fisura desde $s = 0$ hasta $s = D$. A priori, las funciones de forma no tienen una estructura especial. Pueden ser funciones de forma globales (polinomios, por ejemplo) o pueden estar definidas localmente, como es

corriente en elementos finitos. El problema se reduce en cada instante a determinar los m coeficientes u_i , lo cual requiere un sistema de m ecuaciones algebraicas.

Resulta cómodo utilizar, en lugar de las incógnitas “naturales” u_i , las incógnitas con ellas relacionadas ΔP_i tales que cumplan

$$P = \sum_{i=1}^m \Delta P_i \quad (18)$$

La relación de las ΔP_i con las u_i se obtiene sustituyendo (17) en (7) e identificando la expresión resultante para P con la (18). El resultado es

$$u_i = \frac{\Delta P_i}{A_i}, \text{ con } A_i = \int_0^D \phi_i(x) dx \quad (19)$$

Una vez definida las funciones de aproximación, es preciso determinar las incógnitas ΔP_i , para lo que podemos adoptar el tratamiento numérico más simple, el de colocación por puntos, en el que se obliga a que la ecuación integral se cumpla exactamente en m puntos, de coordenadas x_i ($i = 1, \dots, m$). Las expresiones de las tensiones y las aperturas se obtienen haciendo $x = x_i$ en (5) y (6). Sustituyendo también $p(s)$ por la expresión (17), con u_i dado por (19), al final obtenemos

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^m R'_{ij} \Delta P_j, \quad w_i = \sum_{j=1}^m D_{ij} \Delta P_j \quad (20)$$

donde R'_{ij} y D_{ij} vienen dados por

$$R'_{ij} = \frac{\int_0^{x_i} \phi_j(s) S(x_i, s) ds}{\int_0^D \phi_j(s) ds} \quad (21)$$

$$D_{ij} = \frac{\int_{x_i}^D \phi_j(s) W(x_i, s) ds}{\int_0^D \phi_j(s) ds} \quad (22)$$

Nótese que R'_{ij} y D_{ij} resultan ser los promedios ponderados por $\phi_j(s)$ de las funciones $S(x_i, s)$ y $W(x_i, s)$.

El siguiente paso en el análisis consiste en seleccionar las funciones de forma ϕ_j . Sólo se van a analizar aquí las posibilidades más simples, que corresponden a las funciones de forma rectangulares, representadas en la Fig. 3a. Por conveniencia, se asigna la etiqueta j a la función de forma rectangular cuyo borde derecho está situado en el punto de colocación x_j (Fig. 3a), así

$$\phi_j(x) = 1 \quad \text{para} \quad x_j - \Delta x_j < x < x_j \quad (23)$$

y 0 fuera de este dominio; Δx_j es el tamaño del elemento a la izquierda del nodo j , i.e., $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ para $j > 1$ y $\Delta x_1 = x_1$

Suponiendo puntos de colocación equiespaciados, $x_i = i\Delta x$, se deduce de (19) que $A_i = \Delta x$ y de acuerdo con

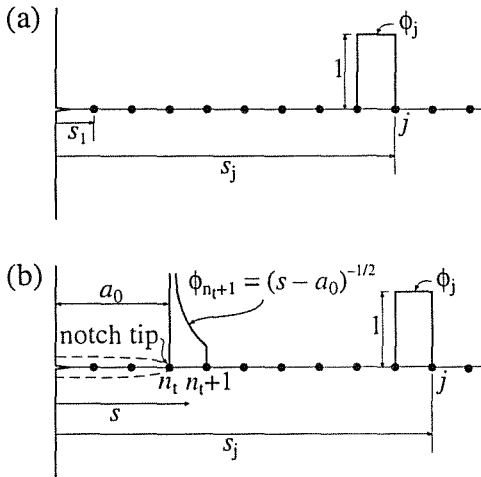


Figura 3: Discretización del método integral de las fisuras superpuestas: (a) funciones de forma rectangulares, y (b) elemento singular en la punta de la entalla inicial.

(21) y (22), las expresiones para los elementos de R' y D son

$$R'_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} S(i\Delta x, s) ds \quad \text{para } i \geq j \quad (24)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} W(i\Delta x, s) ds \quad \text{para } i < j \quad (25)$$

y todos los elementos fuera de los intervalos citados arriba para i y j son nulos, por lo que resulta que R' es una matriz triangular inferior, mientras que D es triangular superior.

Con estas expresiones, la ecuación integral (12) queda reducida al sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=n_t+1}^i R'_{ij} \Delta P_j = f \left[\sum_{j=i+1}^{n_c} D_{ij} \Delta P_j \right] \quad (26)$$

donde se supone que la zona cohesiva ha alcanzado el nodo n_c , los índices i y j toman valores en el intervalo $[n_t + 1, n_c]$, y se sobreentiende que $\Delta P_j = 0$ para j fuera de dicho intervalo.

Como veremos con un ejemplo en el apartado siguiente, la precisión puede mejorarse mucho si se usan funciones de forma que contengan la singularidad (16). La forma más simple consiste en modificar sólo la función de forma del intervalo adyacente a la punta de la entalla, tal como se representa en la Fig. 3b. Si la punta de la entalla está situada en el nodo n_t (es decir, $x_{n_t} = a_0$) la función de forma correspondiente al nodo siguiente ($j = n_t + 1$) se sustituye entonces por

$$\phi_{n_t+1}(s) = \frac{1}{\sqrt{s - a_0}} \quad \text{para } x_{n_t} < s < x_{n_t+1} \quad (27)$$

con $\phi_{n_t+1}(s) = 0$ fuera del intervalo indicado. De acuerdo con (19), resulta $A_{n_t+1} = 2\sqrt{\Delta x}$ y por tanto

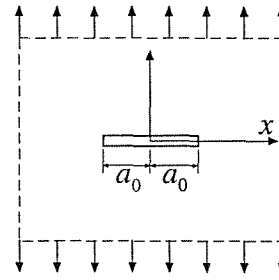


Figura 4: Placa con fisura central.

las columnas $n_t + 1$ de las matrices R' y D se modifican como sigue:

$$R'_{i(n_t+1)} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta x}} \int_{n_t\Delta x}^{(n_t+1)\Delta x} \frac{S(i\Delta x, s)}{\sqrt{s - a_0}} ds \quad \text{para } i \geq n_t + 1 \quad (28)$$

$$D_{i(n_t+1)} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta x}} \int_{n_t\Delta x}^{(n_t+1)\Delta x} \frac{W(i\Delta x, s)}{\sqrt{s - a_0}} ds \quad \text{para } i < n_t + 1 \quad (29)$$

4 ANÁLISIS DE PRESTACIONES

Para analizar las prestaciones del método y de los méritos relativos de las funciones de forma antes presentadas, se considera un panel infinito sometido a una tensión remota σ_∞ con una fisura inicial de longitud $2a_0$ (Fig. 4), con una zona cohesiva de Dugdale, para cuyo caso se conocen las soluciones analíticas.

Puesto que en el modelo de Dugdale la tensión cohesiva permanece constante e igual a f_t , la ecuación integral discretizada (26) se reduce ahora a

$$\sum_{j=n_t+1}^i R'_{ij} \Delta P_j = f_t \quad \text{para } i = n_t + 1, \dots, n_c \quad (30)$$

que es un sistema lineal triangular que se resuelve fácilmente por sustitución hacia adelante.

Para determinar las matrices R' y D , se parte de la solución conocida para fisuras elásticas de longitud arbitraria (ver, por ejemplo, [7], página 38), de las que inmediatamente se deduce, identificando σ_∞ con P , que los núcleos de las ecuaciones integrales son

$$S(x, s) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - s^2}} \quad \text{para } x > s > 0 \quad (31)$$

$$W(x, s) = \frac{4}{E'} \sqrt{s^2 - x^2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq s \quad (32)$$

Sustituyendo estas expresiones en (24) y (25) se obtienen, por integración analítica, las expresiones de R'_{ij} y D_{ij} para funciones de forma rectangulares. Sustituyendo en (28) y (29) se obtienen las integrales correspondientes para funciones de forma singulares. Como estas últimas integrales

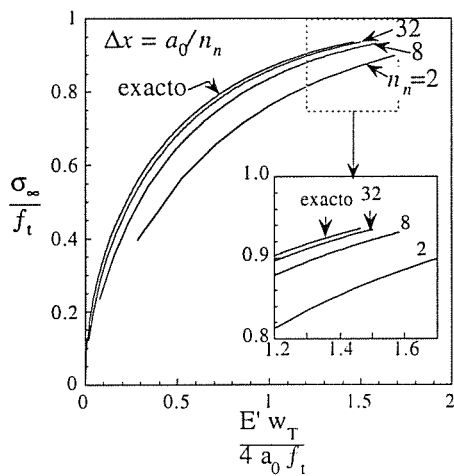


Figura 5: Resultados para funciones de forma rectangulares con distintos tamaños de malla: Curvas carga-CTOD. ($w_T = \text{CTOD}$.)

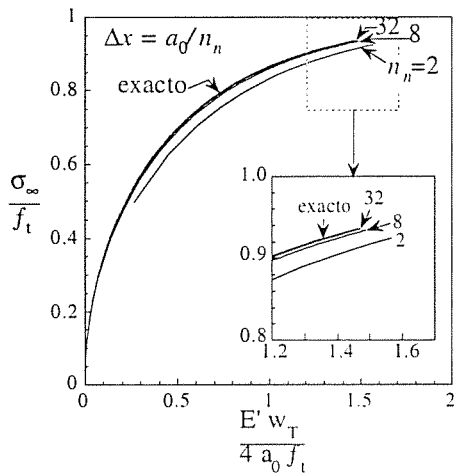


Figura 6: Resultados para funciones de forma singulares con distintos tamaños de malla: Curvas carga-CTOD.

son, en su mayoría, de tipo elíptico con singularidades en alguno de sus extremos, se han calculado numéricamente usando el método de Gauss-Jacobi o Gauss-Chebyshev con cinco puntos de integración (ver, por ejemplo, [14]).

La Fig. 5 muestra las curvas tensión-CTOD calculadas con distintos tamaños de red usando funciones de forma rectangulares, para distinta separación entre nodos Δx . Las curvas muestran que la precisión conseguida es relativamente buena incluso para mallas bastante groseras. Todavía mejores, como podía esperarse, son los resultados cuando se utilizan funciones de forma singulares, como puede apreciarse en la Fig. 6. Sin embargo las diferencias esenciales entre ambos tipos de elementos se hacen más claras cuando se analiza el error relativo representado en la Fig. 7. La característica más destacable, es que si no se usan elementos singulares el error relativo inicial no tiende nunca hacia cero, independientemente de la densidad nodal, como indica la línea de trazos en la Fig. 7a, que es el lugar geométrico de los resultados para la

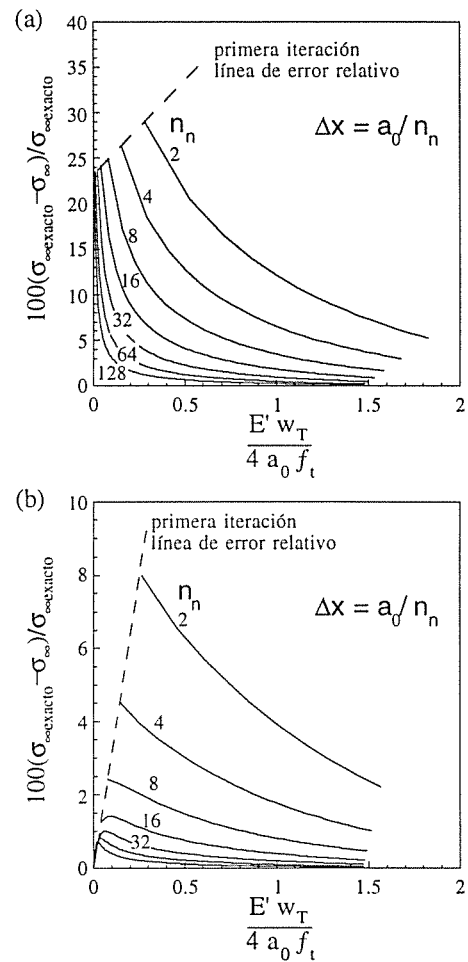


Figura 7: Error relativo en la predicción de carga para un CTOD dado: (a) si se usan funciones de forma rectangulares y (b) si se usan funciones de forma singulares. ($w_T = \text{CTOD}$.)

primera iteración. Esta línea tiene una intersección vertical próxima al 23.3%, lo que significa que el error relativo al principio de la carga no se puede disminuir por debajo de ese valor cualquiera que sea el tamaño de malla. La Fig. 7b muestra, por el contrario, que si se usan elementos singulares, el error inicial converge hacia cero al tender el espaciado hacia cero.

Para estados más avanzados de carga, el error disminuye para ambos tipos de funciones de forma, pero cuando se usan funciones de forma singulares el error es mucho menor. Esto se observa en la Fig. 8, en la que los errores relativos en la predicción de la tensión para $w_T = 2a_0 f_t / E'$ se han dibujado para ambos tipos de funciones de forma. Obviamente, el espaciado de nodos necesario para obtener un cierto grado de precisión es mucho menor cuando se usan funciones de forma singulares. Por ejemplo, si se requiere un 1% de precisión, el espaciado de nodos es cercano a $a_0/12$ si se usan funciones de forma singulares y en el otro caso se requiere $a_0/84$. Esto significa que el número de nodos está en la proporción de 1 a 7, lo que repercute muchísimo en el tiempo de cálculo,

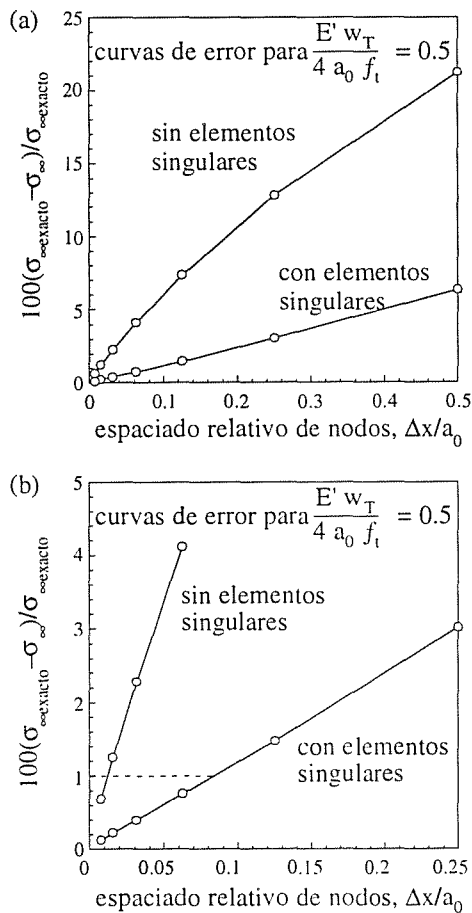


Figura 8: Comparación del error relativo en la predicción de carga para $w_T = 2a_0 f_t / E'$ (a) sobre todo el dominio de estudio y (b) para $\Delta x < 0.25a_0$. ($u_T = \text{CTOD}$.)

ya que la dependencia es aproximadamente cúbica con el número de nodos. Esto significa que para el ejemplo que se acaba de describir, (cuando se requiere un 1% de precisión) los cálculos necesitan un tiempo 340 veces mayor si no se usan elementos singulares ($\approx 7^3$). Debido a que la dependencia no es exactamente cúbica, la proporción es un poco menor; los cálculos que describen el crecimiento de la fisura cohesiva desde un tamaño inicial a_0 hasta un tamaño final $10a_0$ con un 1% de precisión fue 250 veces más largo cuando no se usaron elementos singulares, en lugar de 340 veces. Sin embargo el orden de magnitud es correcto.

5 CONCLUSIONES

El método integral de fisuras superpuestas es un método fácil de programar y eficiente. Si se usan funciones de forma singulares en el fondo de entalla se consigue una mejora sustancial en la precisión. Sin usar las funciones de forma singulares, el error relativo inicial (para el primer escalón de carga) no puede disminuirse por debajo del 23,3%, independientemente de la finura de la malla.

Agradecimientos. Los autores agradecen la ayuda económica proporcionada por la CICYT a través de los proyectos MAT97-1007-C02-2 y MAT97-1022.

6 REFERENCIAS

- [1] Hillerborg A., Modéer M. y Petersson P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research* 6, 773-782 (1976)
- [2] Dugdale D.S., "Yielding of steel sheets containing slits", *J. of Mechanics and Physics of Solids* 8, 100-108 (1964)
- [3] Barenblatt G.J., "The mathematical theory of equilibrium crack in brittle fracture", *Adv. in Applied Mechanics* 7, 55-125 (1962)
- [4] Elices M. y Planas J., "Material models. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures*", Elfgren, L. Ed., Chapman and Hall, London, 16-66 (1989)
- [5] Elices M., Planas J. y Guinea G.V., "Modeling cracking in rocks and cementitious materials", In *Fracture and Damage of Concrete and Rock*, Rossmannith, H.P. Ed., E&FN Spon, London, 3-33 (1993)
- [6] Elices M. y Planas J., "Fracture mechanics parameters of concrete: An overview", *Adv. Cem. Bas. Mat.* 4, 116-127 (1996)
- [7] Bažant Z. P. y Planas J., "Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials", CRC Press, Boca Raton, Florida (1998)
- [8] Planas J. y Elices M., "Nonlinear fracture of cohesive materials", *Int. J. of Fracture* 51, 139-157 (1991)
- [9] Planas J. y Elices M., "Un nuevo método de análisis del comportamiento de una fisura cohesiva en Modo I", *Anales de Mecánica de la Fractura* 3, 219-227 (1986)
- [10] Planas J. y Elices M., "Asymptotic analysis of a cohesive crack: 1. Theoretical background", *Int. Journal of Fracture* 55, 153-177 (1992)
- [11] Planas J. y Elices M., "Asymptotic analysis of a cohesive crack: 2. Influence of the softening curve", *Int. Journal of Fracture* 64, 221-237 (1993)
- [12] Bažant Z. P., "Smearred-tip superposition method for nonlinear and time-dependent fracture", *Mech. Res. Commun.* 17 (5), 343-351 (1990)
- [13] Bažant Z. P. y Beissel S., "Smearred-tip superposition method for cohesive fracture with rate effect and creep" *Int. J. Fracture* 65, 277-290 (1994)
- [14] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. y Flannery B. P., "Numerical Recipes in C", Cambridge University Press, New York (1992)