

## ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA DISEÑO DE COMPONENTES CERÁMICOS

M.A. García Prieto\*\*, M.D. Rubio Eire\*, A. Bernardo Sánchez\*\*, M.J. Lamela Rey\*\*,  
M. Doblaré Castellano\* y A. Fernández Canteli\*\*

\* Departamento de Ingeniería Mecánica  
CPSZ. Universidad de Zaragoza. María de Luna, 3. 50015 Zaragoza.

\*\* Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación  
E.T.S.I.I. e I.I. Universidad de Oviedo. Campus de Viesques. 33204 Gijón.

**Resumen.** Los materiales cerámicos presentan ciertas propiedades características, tales como su gran resistencia a elevadas temperaturas, baja densidad y resistencia elevada a la corrosión, que los hace apropiados para numerosas aplicaciones industriales. Sin embargo, el uso potencial de estos materiales podría estar limitado por su fragilidad y la gran dispersión de sus valores de resistencia mecánica, debido a la presencia de defectos procedentes de su fabricación o de su manipulación, que deben ser tenidos en cuenta en el dimensionamiento. En este trabajo se comparan dos metodologías de diseño de materiales cerámicos: la tradicional, denominada aquí indirecta, basada en la consideración de tensiones críticas como magnitudes de referencia y la directa, que desarrolla un modelo probabilístico basado en la distribución estadística de tamaños de defectos, que ha sido ya empleado en el diseño de acristalamientos.

**Abstract.** Ceramic materials exhibit some characteristic properties such as a remarkable strength at high temperatures, low density and high stability in front of corrosion, which make them specially suitable for many industrial applications. Nevertheless, the potential use of these materials could be limited by their brittleness and by the great scatter in their mechanical strength results, due to the presence of flaws arising from manufacturing or handling processes, which has to be taken into account for design purposes. In this paper two different methodologies are compared in the design of ceramic materials: the traditional one, called here indirect, which takes critical stresses as reference magnitudes, and the direct one, which develops a probabilistic approach, based on the statistical distribution of flaws which has already been applied to the design of glass plates.

### 1. INTRODUCCIÓN.

La fractura de cualquier elemento estructural puede ser de dos tipos: frágil o dúctil. En ambos casos, la presencia de defectos contribuye de un modo directo a la rotura, pero en forma diferente, según su naturaleza [1].

En la rotura dúctil los defectos significativos son los microscópicos, es decir, aquéllos que controlan la resistencia a fluencia plástica del material, tales como los defectos intersticiales, los contornos de grano, los precipitados y las redes de dislocación. Los defectos macroscópicos afectan al material dúctil al reducir la sección neta, pero no tienen prácticamente efecto en la resistencia a fluencia plástica. Por el contrario, en los materiales en los que la fractura frágil es predominante, los defectos determinantes son los macroscópicos, puesto que la rotura viene promovida por los campos de tensiones con intensificaciones locales en el elemento. Como ejemplo de defectos macroscópicos se pueden citar los defectos de soldadura, poros, fisuras por corrosión o fatiga, y cualquier otro defecto que pueda actuar como una entalla.

Entre los métodos empleados para el cálculo de materiales frágiles, concretamente de cerámicos, distinguimos los basados en criterios empíricos, probabilistas y deterministas.

Dado que los primeros exigen la realización de numerosos ensayos, será preferible cualquiera de los otros dos, si se pretenden evitar programas experimentales de alto coste.

Los criterios deterministas suponen que el fallo ocurre cuando se alcanza un cierto nivel de tensiones. La gran dispersión existente en los resultados de resistencia extraídos de los ensayos de materiales cerámicos, implica, en este caso, la consideración de elevados coeficientes de seguridad, que conllevan una notable infrutilización del material.

De lo expuesto se deduce que la aplicación de criterios probabilísticos es lo adecuado para el cálculo de materiales cerámicos, puesto que permite un aprovechamiento más racional del material, junto con un mayor nivel de fiabilidad en el diseño; así, por ejemplo, este modelo podría considerar aceptable un dimensionamiento en el que se presentaran tensiones locales superiores a las de rotura, siempre que su contribución en la probabilidad de rotura global no resultara significativa, mientras que un criterio determinista lo rechazaría.

El planteamiento probabilista se basa en la consideración de la interacción entre el estado tensional de cada punto y los defectos del material, manifestados a través del carácter aleatorio de su

distribución, tamaño y geometría, mediante la ayuda de la Mecánica de la Fractura.

De esta forma, la rotura no ha de producirse necesariamente en zonas donde la tensión sea máxima, o al menos alta, sino donde la combinación estado tensional – tamaño de grieta resulte crítica.

2. MODELO INDIRECTO.

El modelo de cálculo para materiales cerámicos aquí postulado se basa en las teorías de Batdorf y Crose [2] que parten de la hipótesis comúnmente aceptada de que la rotura se produce según la ley del eslabón más débil. El modelo permite analizar el comportamiento de cerámicas bajo un estado de tensiones multiaxial, completamente general. En la figura 1 se representa esquemáticamente esta metodología.

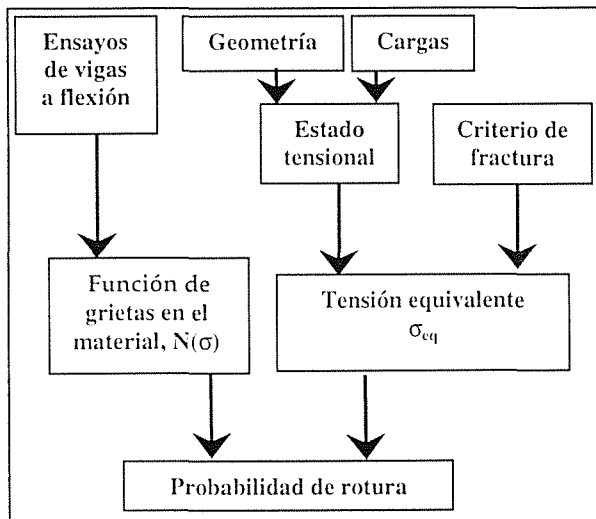


Fig. 1. Esquema del modelo indirecto.

El modelo ha sido implementado en varios programas de cálculo de elementos finitos en el Departamento de Ingeniería Mecánica del Centro Politécnico Superior de Zaragoza, como programas de postproceso para el cálculo de este tipo de materiales.

En un primer paso se obtiene el estado tensional, asociado a cada punto del componente estudiado, por medio del Método de los Elementos Finitos para pasar a continuación a establecer el criterio de rotura, que responde a una expresión del tipo (1), en función de unos parámetros u, v y α, que será necesario elegir adecuadamente con el fin de ajustar lo mejor posible el comportamiento del material estudiado en rotura.

$$\left( \frac{K_I}{K_{IC}} \right)^u + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^v = 1 \tag{1}$$

Como se puede comprobar la expresión (1) incorpora unos términos que provienen de la sollicitación, es decir, los factores de intensidad de tensiones,  $K_I$  y  $K_{II}$ , y otros términos que corresponden a las características resistentes del material, es decir, las tenacidades a fractura  $K_{IC}$  y  $K_{IIC}$ . En ambos casos, el tipo de grieta

concreto y la orientación de la misma juegan un papel determinante. Con el fin de evitar la dificultad de la determinación del tamaño de los defectos del material, el método propone trabajar con tensiones equivalentes en cada punto de la pieza.

Con carácter general se conoce que, con independencia del tipo de grieta, los factores de intensidad de tensión y las tensiones teóricas locales, deducidas sin consideración del efecto de grietas se pueden relacionar a través de las expresiones:

$$\begin{aligned} K_I &= f_1 \sigma_n \sqrt{\pi \cdot a} \\ K_{II} &= f_2 \tau \sqrt{\pi \cdot a} \\ K_{IC} &= f_1 \sigma_{eq} \sqrt{\pi \cdot a} \end{aligned} \tag{2}$$

Donde  $\sigma_n$  y  $\tau$  son las tensiones normal y cortante respectivamente, en un punto, referidas a una orientación determinada,  $f_1$  y  $f_2$  son factores que dependen de la geometría de la grieta, 'a' es la longitud característica de la grieta (igual a la longitud total, si es una grieta superficial y a la mitad de la longitud total, si es volumétrica) y  $\sigma_{eq}$  es aquella tensión equivalente del estado tensional real, tal que provoca el fallo por rotura en modo I. Sustituyendo (2) en la expresión (1) y admitiendo, como es habitual que  $K_{IC} = \alpha \cdot K_{IIC}$ , es posible llegar a un criterio de rotura en el que no aparece explícitamente la longitud del defecto:

$$\left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{eq}} \right)^u + \left( \alpha \frac{f_2 \tau}{f_1 \sigma_{eq}} \right)^v = 1 \tag{3}$$

Esta metodología permite considerar los defectos tipo que se representan en las figuras 2 y 3, es decir, defectos superficiales, relacionados con el acabado exterior, y defectos internos que dependen fundamentalmente del proceso de fabricación del material. Para cada uno de estos defectos se conocen los factores geométricos de los factores de intensidad de tensión,  $f_1$  y  $f_2$  [3], por lo que con ellos y eligiendo adecuadamente el criterio de fractura que más se ajuste al material (o sea, el valor de u, v y α) [4], será posible llegar, en cada caso, a una expresión de la tensión equivalente en función del estado tensional de cada punto.

Se admite que en los materiales cerámicos existe gran número de fisuras distribuidas al azar en un volumen, de manera que, dominios con el mismo volumen presentan la misma probabilidad de contener el mismo número de defectos con las mismas características (homogeneidad) y que el número de defectos contenidos en dos dominios, que no se solapan, son independientes (independencia), se puede adoptar una distribución de Poisson para describir la probabilidad de que en un volumen ΔV no haya ningún defecto con tensión crítica inferior a  $\sigma_{cr}$ :

$$\Delta P_s = \exp \{-\Delta V \cdot N_V(\sigma_{cr})\} \tag{4}$$

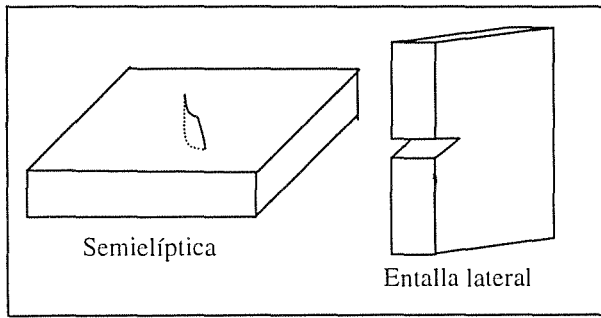


Fig. 2. Defectos superficiales.

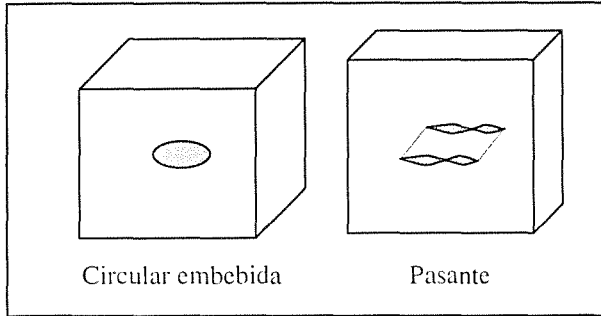


Fig. 3. Defectos internos o volumétricos.

En la expresión (4),  $N_V(\sigma_c)$ , es una función de densidad de grietas propuesta por Batdorf, que representa el número medio de defectos por unidad de volumen, caracterizados por romper bajo una tensión crítica menor o igual que  $\sigma_{cr}$ , y que viene dada por la expresión siguiente:

$$N_V(\sigma_{cr}) = K_{BV} \cdot \sigma_{cr}^{m_v} \quad (5)$$

donde  $K_{BV}$  es el llamado coeficiente de densidad de grietas de Batdorf para el material, que depende del criterio de fractura y del tipo de defecto considerado [5], y  $m_v$  es el módulo de Weibull.

En cuanto a la experimentación a realizar para caracterizar el material, este modelo propone la realización de ensayos de flexión a cuatro puntos que sustituyen a los tradicionales de tracción uniaxial, por ser éstos más difíciles y caros de realizar. La figura 4 representa el esquema de estos ensayos.

Cada ensayo proporciona la tensión máxima para la cual ocurrió el fallo y el origen del mismo, esto es, si fue debido a un defecto interno o a uno superficial. Para el caso de defectos de volumen, se supone que la tensión máxima de rotura sigue una ley de Weibull biparamétrica:

$$P_{fv} = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_{\theta V}} \right)^{m_v} \right\} \quad (6)$$

en la que los valores de  $m_v$  y  $\sigma_{\theta V}$  pueden ser estimados a partir de los resultados de los ensayos. La adaptación de estos resultados al caso de ensayo uniaxial, permite calcular el valor del coeficiente de densidad de fisuras de Batdorf,  $K_{BV}$ . Con ello queda

definida la función de densidad de grietas asociada al volumen,  $N_V(\sigma_{cr})$ , de acuerdo con (5).

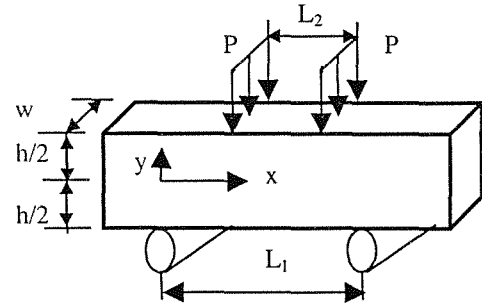


Fig. 4. Ensayos de vigas por flexión a cuatro puntos

En el supuesto de que el origen de la rotura fuese la superficie del material, el tratamiento sería análogo, estimándose para este caso los parámetros  $m_S$  y  $\sigma_{\theta S}$ , de los que resulta la expresión de  $K_{BS}$ , coeficiente de fisuras superficiales de Batdorf.

Puesto que la ocurrencia de condiciones críticas que provocan la rotura viene además condicionada por la orientación del defecto, será necesario modificar la función de densidad de grietas del material mediante un factor de orientación. Este representa el número de defectos por unidad de volumen que se caracterizan por una tensión menor o igual que  $\sigma_{cr}$ , y por una normal al plano de la fisura orientada de tal manera que en ella la tensión equivalente supere el valor de tensión crítica (esta normal estará en el rango  $\alpha \pm \alpha + \Delta\alpha$  y  $\beta \pm \beta + \Delta\beta$ ).

Para el caso de defectos de volumen, viene representado por el cociente entre el ángulo sólido de las orientaciones en las que se verifica la condición anterior, y el ángulo sólido total,  $4\pi$ , que corresponde a todas las orientaciones posibles, ya que se supone que la ley de orientaciones es uniforme. Para este caso, el ángulo sólido definido por las orientaciones mencionadas es igual a  $\cos\alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta\beta$  [6]. De acuerdo con lo anterior, la probabilidad de fallo asociada a un volumen  $\Delta V$  será:

$$\Delta P_f = 1 - \exp \left\{ - \Delta V \cdot N_V(\sigma_{cr}) \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta\beta}{4\pi} \right\} \quad (7)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos que definen la orientación del plano de la fisura respecto a la referencia principal, tal y como muestra la figura 5.

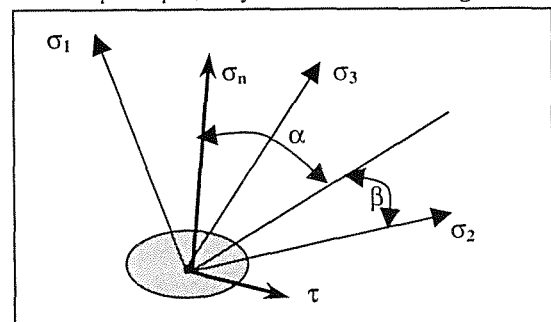


Fig. 5. Orientación de la fisura respecto a las direcciones principales.

La expresión (7) define la probabilidad de fractura de un volumen ΔV, teniendo que extenderse su cálculo a todo el volumen de la pieza. Así, la expresión general de la probabilidad de fractura para un volumen determinado será:

$$P_{IV} = 1 - \exp \left\{ - \int_V \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_V(\sigma_{eq}) \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dV \right\} \quad (8)$$

Todo lo expuesto para el volumen es válido para cálculo de defectos superficiales, según un procedimiento paralelo. En consecuencia, la probabilidad de fallo de una superficie, vendrá dada por la expresión:

$$P_{IS} = 1 - \exp \left\{ \int_S \left[ \int_0^{2\pi} N_S(\sigma_{eq}) d\alpha \right] dS \right\} \quad (9)$$

En el caso de que interese calcular la probabilidad conjunta de una pieza, tanto de su volumen como de su superficie, se procederá multiplicando ambas probabilidades de supervivencia.

3. MODELO DIRECTO.

Se trata de una metodología para el cálculo de placas de acristalamiento [7, 8, 9]. El esquema de la figura 6 resume los bloques fundamentales que constituyen el modelo.

Los elementos de vidrio en edificación son placas rectangulares y de espesor constante, y han de calcularse para que soporten la carga de viento, que se supone uniformemente repartida en toda la superficie.

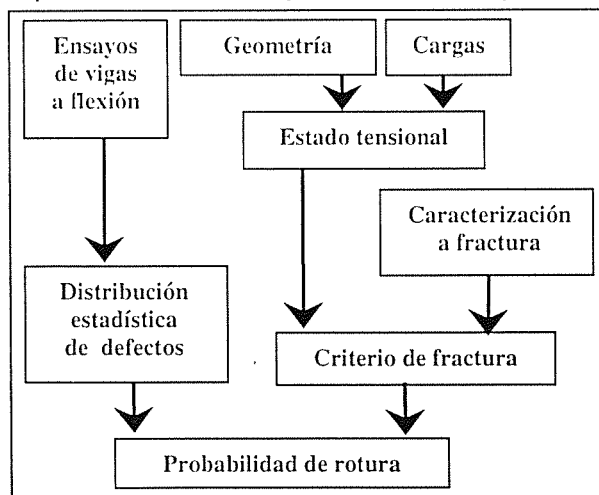


Fig. 6. Esquema del modelo probabilístico para el dimensionamiento de placas de vidrio.

A pesar de la sencillez geométrica de las placas de acristalamiento, el cálculo del estado tensional es complejo, debido al comportamiento marcadamente no-lineal de las placas de vidrio, especialmente para cargas cercanas a la de rotura. El modelo matemático está basado en la ecuación de von Kármán, aplicable a placas con grandes deformaciones. Para su resolución

se empleó el método de Galerkin y el de diferencias finitas, en razón de su sencillez geométrica. Evidentemente, el uso de programas comerciales de elementos finitos es también posible.

Para el cálculo de elementos de vidrio se ha adoptado como criterio de fractura la expresión (2) con los valores de u=v=2, que corresponde al criterio de la energía coplanar de deformación. Adicionalmente, se consideró  $K_{Ic} = 1,25 \cdot K_{Ic}$ , es decir, α con valor 1,25 [1, 10].

En lo referente al programa experimental, se realizaron, por un lado, ensayos de indentación para determinar la tenacidad a fractura del material, a partir de la medida de las huellas y de las fisuras originadas por un penetrador Vickers en el material. Por otro lado, se ensayaron vigas de vidrio por flexión a tres puntos, como muestra la figura 7, para deducir la función de distribución de los defectos en el material empleado.

Puesto que la f.d.d. está asociada a un determinado tamaño de la muestra (área de referencia, A<sub>0</sub>), ésta se consideró como situada a ±10 mm del centro, dado que allí se producían la práctica totalidad de las roturas.

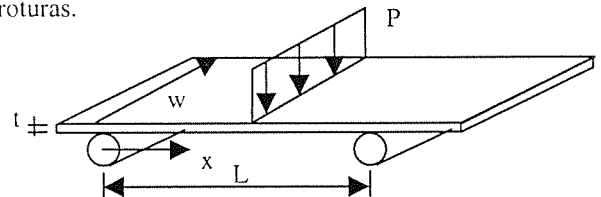


Fig. 7. Ensayo de vigas por flexión a tres puntos.

La tensión de rotura se calculó, tras la observación de la localización de la fractura, de acuerdo con las leyes clásicas de resistencia de materiales:

$$\sigma_{rot} = \frac{M}{W_{res}} = \frac{P_{rot} \cdot x}{w \cdot t^2 / 6} = \frac{3 \cdot P_{rot} \cdot x}{w \cdot t^2} \quad (10)$$

Para el tratamiento de los resultados de los ensayos se supuso que las roturas tenían lugar siempre bajo modo I, por lo que la función de distribución de defectos es en realidad de tamaños máximos de defecto proyectado:

$$K_{Ic} = f_1 \sigma_{rot} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{rot}} \quad (11)$$

$$a_{rot} = \frac{(K_{Ic} \cdot w \cdot t^2)^2}{9 \cdot \pi \cdot P_{rot}^2 \cdot L^2 \cdot f_1^2} \quad (12)$$

Empleando el programa EXTREMES [11], basado en la teoría estadística de valores extremos, se pudo estimar la f.d.d. de defectos superficiales máximos en el vidrio a partir de los resultados de los ensayos de flexión realizados, comprobándose que el tamaño máximo de los defectos superficiales, a, en el material seguía una ley de Gumbel, dada por la expresión (16). Con el fin de tener en cuenta la influencia de la

orientación se cortaron las probetas, a partir del tráver, formando distintos ángulos respecto a la dirección de laminación, tal como muestra la figura 8.

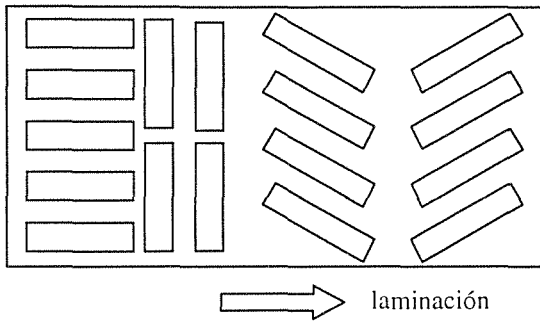


Fig. 8. Extracción de las vigas a partir del tráver.

$$G_{\theta_i}(a) = \exp\left\{-\exp\left(\frac{\lambda_i - a}{\delta_i}\right)\right\} \quad (13)$$

En la que  $0 < a < \infty$ ,  $\delta_i > 0$  es el parámetro de escala y  $\lambda_i$  es el parámetro de localización, asociados al área de referencia  $A_0$  y a para cada orientación  $\theta_i$ .

Los parámetros fueron determinados con el programa EXTREMES a partir de los resultados experimentales. La f.d.d. de defectos máximos en el área elemental  $\Delta x \cdot \Delta y$ , asociada al estado tensional,  $F_{\theta_i}(a)$ , se deduce a partir de la f.d.d. de defectos máximos,  $G_{\theta_i}(a)$ , correspondiente al área de referencia  $A_0$ , de acuerdo con la ley del eslabón más débil:

$$F_{\theta_i}(a) = [G_{\theta_i}(a)]^{\Delta x \cdot \Delta y / A_0} \quad (14)$$

En el caso del vidrio se ha supuesto, de acuerdo con la experiencia, que sólo las fisuras superficiales son responsables de la rotura. Estas tienden en su propio desarrollo a adoptar una forma semicircular, por lo que su modelización correspondió a defectos semicirculares.

De acuerdo con lo anterior, el tamaño de defecto necesario para que ocurra la rotura en un punto de la placa, con coordenadas  $(x, y)$ , bajo un estado tensional producido por una carga de viento ( $\sigma_n, \tau$ ) y para una determinada orientación,  $\theta_i$ , vendrá dado por la siguiente expresión:

$$a_{\theta_i}^* = \frac{K_{lc}^2}{\pi \left[ f_1^2 \cdot \sigma_n^2 + \frac{f_2^2 \cdot \tau^2}{0,64} \right]} \quad (15)$$

Para el cálculo de la probabilidad de que rotura de una placa dividida en 'm' celdas de igual superficie se puede emplear la siguiente expresión:

$$P_f(\text{placa}) = 1 - \prod_{i=1}^m P_S(\text{celda } i) \quad (16)$$

$$P_S(\text{celda } i) = \int_0^{\pi} \int_0^{a^*} p(a, \theta) \cdot da \cdot d\theta \quad (17)$$

en la que,  $p(a, \theta)$  representa la función de densidad bidimensional cuyas variables son el tamaño de la fisura,  $a$ , y la orientación de la misma,  $\theta$ . Para conocer esta función de densidad,  $p(a, \theta)$ , sería necesario estimar la marginal de las orientaciones,  $p(\theta)$ , además de la función de densidad de tamaños condicionada a las orientaciones, que es la que se obtiene de los ensayos,  $p_{\theta}(a)$ .

En principio no parece posible obtener esta función de distribución marginal, por lo que el problema se aborda suponiendo que las orientaciones siguen una distribución uniforme, lo que hace que el modelo no sea válido para aquellos casos, en los que no se verifique esta hipótesis.

#### 4. COMPARACIÓN ENTRE AMBOS MODELOS.

Con el fin de analizar las respectivas ventajas se trata en este punto de comparar los dos modelos, y en su caso, estableciendo en cada caso las mejoras necesarias.

El cálculo de componentes cerámicos, en general, se complica notablemente, debido a la complejidad de la geometría y de la definición de las cargas. Por ello, el método apropiado para realizar el cálculo tensional es el de los elementos finitos, aplicable a ambas metodologías, directa e indirecta, puesto que permite analizar cualquier geometría y tipo de cargas y definir los elementos lo suficientemente pequeños como para que se pueda considerar en ellos razonablemente un estado tensional constante.

Tal como se presentó en el punto anterior, el modelo directo en su aplicación original dirigida al cálculo de placas de vidrio no consideraba más que un solo tipo de defecto, que asimilaba a microfisuras semielípticas superficiales, por ser el que se acepta generalmente como único responsable de la fragilidad del vidrio. Si se pretende ampliar la validez del método al estudio de materiales cerámicos, deberán considerarse también los defectos de volumen, tal como propone el modelo indirecto, (figuras 2 y 3).

El modelo directo, al estar desarrollado para un único material se limita a considerar solamente el criterio de fractura de la energía coplanar de deformación para el caso particular de  $\alpha = 1.25$ , que es el que mejor se ajusta al vidrio según se comprobó experimentalmente [8]. Por contra, la metodología indirecta parece abierta a un número mayor de criterios a seguir, de la forma (1), en los que  $u$  y  $v$  son parámetros dependientes del material. La posibilidad de elección de criterio permitirá modelizar mejor el comportamiento de diferentes materiales, y por tanto, afinar más en los resultados, con el consiguiente ahorro de material.

Ambos modelos tienen en cuenta la distribución probabilista de grietas en cada punto del material. El

método directo lo hace de una forma explícita, a través del cálculo de la función de distribución de los defectos máximos para las diferentes orientaciones. Conceptualmente el método directo contempla la consideración de funciones de distribución diferentes para distintas orientaciones, pero en la práctica se tropieza con un problema teórico todavía no resuelto: la estimación de los pesos que deben asignarse a cada una de esas f.d.d. correspondientes a las distintas orientaciones (precisamente, las f.d.d. marginales para cada orientación).

El modelo indirecto considera una función de densidad de grietas,  $N(\sigma)$ , homogénea en todas las direcciones. Para la estimación de esta función se igualan probabilidades de fallo correspondientes a los ensayos realizados y las que postula el modelo de Weibull para el caso de ensayos uniaxiales.

Ambos modelos caracterizan el material, pero lo hacen a través de conceptos diferentes: el modelo directo mide su resistencia a través de la longitud crítica de sus defectos, empleando el valor de la tenacidad a fractura propia del material; mientras que el modelo indirecto utiliza para esta caracterización el valor de la tensión crítica, que obtiene por medio del concepto de factores de intensidad de tensiones equivalentes, obviando así la medida de la tenacidad a fractura de la cerámica.

En cuanto al programa experimental, resulta evidente la mayor fiabilidad de los resultados obtenido de los ensayos por flexión a cuatro puntos frente a los de tres puntos, debido a que el área, o volumen, de referencia para los cuales está deducida la función de distribución del tamaño de los defectos es considerablemente mayor en el caso de flexión a cuatro puntos, al serlo también la zona de la viga sobre la que actúa el momento máximo.

## 5. CONCLUSIONES.

El tratamiento que los dos modelos hacen del diseño y cálculo de componentes frágiles es equivalente, si bien el directo se basa en el conocimiento de la distribución de los tamaños de defecto, que es lo que confiere a estos materiales la fragilidad, mientras el modelo indirecto concentra toda la información en tensiones críticas, por lo que resulta menos intuitivo.

Puesto que el modelo directo fue desarrollado para vidrio, material en el que la rotura sólo tiene origen superficial, sería necesario ampliar su validez al estudio de defectos en el volumen, lo que no parece representar dificultad alguna, ya que todo el tratamiento es paralelo, como se comprueba para el caso del modelo indirecto.

Para comprobar la equivalencia práctica de los dos modelos se juzga interesante la realización futura de un programa experimental común, cuyos resultados sean tratados desde los dos puntos de vista.

## AGRADECIMIENTOS.

Los autores desean expresar su agradecimiento, tanto a la DGICYT por la financiación recibida a través del proyecto PB94-1350, como al Centro de Investigación y Desarrollo de Cristalería Española, S.A. y a la Universidad Técnica de Clausthal (Alemania) por la ayuda prestada en el desarrollo de los modelos aquí presentados.

## BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Ewalds, H.L., Wanhill, R.J.H., "Fracture Mechanics", Chapman and Hall, 1984.
- [2] Batdorf, S.B., Crose, J.G., "A statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Nonuniform Polyaxial Stresses", J. Appl. Mech., vol.41, no. 2, Junio 1974, pag. 459-464
- [3] Sih, G.C., "Handbook of stress intensity factors", Lehigh University, 1973
- [4] Nemeth, N.N., Manderscheid, J.M., Gyekenyesi, J.P., "Ceramics Analysis and Reliability Evaluation of Estructures (CARES), Users and Programmers Manual"; NASA Technical Paper 2916, 1990.
- [5] Weibull, W., "A Statistical Theory of the Strength of Materials", Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research Nr. 151 1939.
- [6] Furguele, F.M., Luchi, M.L., "A Unified Approach to Physically Based Weakest-Link Theories for Multiaxial Fracture of Ceramics", Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 118, pag. 509-514, Octubre 1996.
- [7] Viña Olay, I. "Análisis no-lineal de rotura de placas planas de vidrio con consideración de criterios probabilísticos", Universidad de Oviedo. Tesis Doctoral, 1987.
- [8] Bernardo Sánchez, A., "Cálculo probabilístico en rotura de acristalamientos mediante utilización de parámetros de fractura", Universidad de Oviedo. Tesis Doctoral, 1994.
- [9] Fernández Canteli, A., Viña Olay, I., Bernardo Sánchez, A., "Dimensionamiento de placas de acristalamiento para edificios mediante un modelo probabilístico de rotura", Materiales de construcción, vol. 46, nº242-243, 1996.
- [10] Broek, D., "The practical use of Fracture Mechanics", Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [11] Castillo, E., Alvarez, E., Cobo, A., Herrero, T., "An expert system for the analysis of extreme value problems", Universidad de Cantabria, 1993.