

**FIABILIDAD EN EL PROCESO DE NUCLEACIÓN DE GRIETAS EN FATIGA ALEATORIA MEDIANTE MODELOS B**

J. A. Bea, M. Doblaré, R. Sanz, L. Gracia  
 Área de Mecánica de Medios continuos y Teoría de Estructuras  
 Departamento de Ingeniería Mecánica  
 Universidad de Zaragoza  
 Centro Politécnico Superior, 50015 Zaragoza

**Resumen.** El presente artículo continúa trabajos previos realizados por el mismo grupo dentro de la línea de la fatiga aleatoria en los que se abordaba la predicción de la función densidad de probabilidad de vida a fatiga durante la fase de propagación mediante el uso conjunto de elementos finitos probabilistas y modelos de daño acumulado. En el presente artículo se presenta la construcción de un modelo de acumulación de daño basado en los trabajos de Bogdanoff y Kozin, conocidos por modelos B. Dichos modelos, típicos en el tratamiento de procesos de daño acumulado, han venido siendo aplicados en el caso de fatiga, solamente sobre datos experimentales. En el presente trabajo se realiza la formulación de un modelo B, y se prevé su obtención a partir de los resultados de distintos análisis mediante elementos finitos probabilistas.

Con objeto de preparar el enlace con el PFEM, se ha partido de la ley de Coffin y Manson, para el tratamiento de la componente de la deformación plástica cíclica, y de la relación de Basquin para la deformación elástica, realizando un estudio de los estadísticos de las variables aleatorias implicadas en las citadas expresiones, estadísticos que se sabe que se pueden obtener por elementos finitos probabilistas.

Por último, se contrasta la bondad del modelo de acumulación de daño construido con simulaciones de Monte Carlo.

El método propuesto se complementa con el previo de propagación para obtener la función de densidad de probabilidad de la vida a fatiga completa en un elemento mecánico simple.

**Abstract.** The present paper continues previous works accomplished by the same group within the subject of random fatigue, in which the fatigue life during the crack propagation stage was predicted through the combined use of probabilistic finite elements and cumulative damage models. Both in those previous papers and in the present, fatigue has been considered as a cumulative damage process and the corresponding model constructed from the damage theory developed in previous works of Bogdanoff and Kozin. These B-models based on the theory of Markov chains have been earlier applied to different types of damage processes and specially to fatigue but they were constructed from experimental data obtained in different testing campaigns. On the contrary, in the present approach, the stochastic properties of the different parameters appearing in the fatigue model (nucleation or propagation) are computed from different simulation analyses performed by means of the so-called probabilistic finite element method (PFEM). In the case of fatigue nucleation, presented in this paper, and as a first step, we have computed the stochastic properties (random moments) of the plastic and elastic strains from the expressions of the Coffin and Manson and Basquin laws respectively. In a second step and for more general geometries and loads these moments should be computed by means of the PFEM. From these, the B-model is built and some results obtained for several benchmark problems. These have been checked with the ones obtained from an alternative stochastic model based on Monte Carlo simulations proving a good performance in these cases.

**1. INTRODUCCION**

La fatiga de materiales dúctiles es reconocida en la actualidad como una de las principales causas de fallo estructural. Sin embargo, la vida a fatiga es sensible a un gran número de parámetros que rara vez pueden

determinarse de forma suficientemente precisa (o no son conocidos con exactitud) como para ser considerados como deterministas: las variaciones estocásticas de la geometría, de la longitud y dirección de la grieta, del material, del ángulo de propagación y de la historia de cargas son tan solo algunas de las variables que influyen

de manera decisiva en el fenómeno de fatiga. Son estas incertidumbres la causa principal de la variabilidad de las respuestas con respecto a los valores medios y, por tanto, las responsables de la mayor parte de los fallos imprevistos y, en ocasiones, catastróficos. Todo ello ha impulsado, sobre todo desde hace unos años, la inclusión del carácter probabilista de estos factores en el modelo

Los modelos de análisis aplicados a la predicción de vida para la fase de nucleación están basados esencialmente en la teoría de las deformaciones locales, mientras que los aplicados a la fase de propagación lo están en los conceptos de la Mecánica de la Fractura [3]. Tanto en uno como en otro caso, la gran mayoría de los análisis enfocan el tema desde un punto de vista determinista. Dos son los principales impedimentos para realizar el estudio de fiabilidad en nucleación: la carencia de datos referentes a la distribución de las variables aleatorias consideradas y la gran carga computacional asociada a un análisis probabilístico completo.

Algunos modelos de análisis probabilista de predicción de vida en la fase de nucleación proponen una estimación del daño, suponiendo una disminución de la resistencia del material y expresando ésta como una distribución de Weibull. En este trabajo se supone el daño que sigue un proceso de Markov, utilizando los modelos propuestos por Bogdanoff y Kozin [2], pero construyéndolos en base a datos que pueden obtenerse mediante análisis por elementos finitos probabilistas (PFEM), en la línea seguida en artículos previos para la predicción de vida a fatiga durante la fase de propagación.

La exposición del artículo es la siguiente: en el epígrafe 2 se indican los fundamentos del modelo de daño acumulado que se ha utilizado en este trabajo. En el siguiente epígrafe se describe el modelo de fiabilidad construido, indicando de qué ley física de acumulación de daño se parte, y cuales son las variables aleatorias consideradas. A continuación se presentan resultados obtenidos con el modelo, para finalizar con el capítulo de conclusiones.

## 2. MODELO B DE ACUMULACIÓN DE DAÑO

El modelo aquí presentado está basado en los modelos estadísticos de daño acumulado propuestos inicialmente Bogdanoff y Kozin [2], para la caracterización estadística de series de ensayos correspondientes a distintos problemas de daño acumulado entre ellos el problema de fatiga. Estos modelos (en adelante, modelos B) están basados en cadenas de Markov y se caracterizan por una serie de hipótesis básicas a las que pueden añadirse otras para definir un determinado tipo

de modelo B. Las hipótesis básicas de estos modelos son las siguientes:

1. Los "ciclos de daño" considerados (en adelante CD) son de severidad constante, lo que significa que durante la vida del componente suceden una serie de procesos de "ataque", de tal forma que cualquier acción que suceda durante uno de ellos ocurre igualmente en todos.
2. Los niveles de daño son discretos  $1, 2, \dots, j, \dots, b$ , lo que implica que la vida del componente finaliza cuando se alcanza el nivel  $b$ , que significa físicamente, por tanto, el fallo de la pieza o el fin de la fase de daño considerado (por ejemplo el fin de la nucleación y comienzo de la propagación).
3. La acumulación de daño en un CD depende sólo del propio CD y del nivel de daño en el inicio del CD.
4. Se considerarán tan solo modelos B de los denominados de salto unidad, lo que implica que de un CD solamente puede pasarse a lo sumo al nivel inmediatamente superior, siendo los diferentes niveles a lo largo del proceso estados de transición, mientras que el nivel final  $b$  de fallo es un estado de absorción, ya que desde él no se produce transición alguna a cualquier otro estado.

Estas hipótesis conducen a un modelo de daño acumulado de tipo proceso de Markov estacionario, discreto en el tiempo y de estados finitos [1]. Con ello, utilizando los resultados de las cadenas de Markov, se puede escribir inmediatamente

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^t = \mathbf{p}_{t-1} \mathbf{P} \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

con

$$\mathbf{p}_t = \{p_t(1), \dots, p_t(b)\} \quad (2)$$

el vector de probabilidad de alcanzar cada uno de los estados  $1, 2, \dots, b$  en un tiempo  $t$ ,  $\mathbf{p}_0$  la distribución inicial de los niveles de daño para  $t=0$  y  $\mathbf{P}$  la denominada matriz de probabilidad de transición que, por la primera hipótesis es constante para todos los ciclos al tener éstos la misma severidad<sup>†</sup> y, puesto que sólo puede irse de un nivel de daño al inmediato superior, debe ser de la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

<sup>†</sup> obviamente la consideración de matrices de probabilidad de transición  $\mathbf{P}$  dependientes del ciclo permitiría el tratamiento de ciclos de "severidad" variable.

siendo  $p_j$  la probabilidad de permanecer en el nivel  $j$  durante un CD, y  $q_j$  la probabilidad de que en un CD el daño avance del nivel  $j$  al  $j+1$ , cumpliéndose, por tanto que  $1 > p_j > 0$ ,  $p_j + q_j = 1$ .

Denotaremos por  $W_b$  la variable aleatoria "tiempo necesario para alcanzar el estado  $b$ ", siendo  $F_{W_b}(t;b)$  su función de distribución, que cumple

$$F_{W_b}(x;b) = P\{W_b \leq x\} = p_x(b), \quad x = 0,1,2,\dots \quad (4)$$

La esperanza y los primeros momentos centrales de  $W_b$  se pueden obtener en función de  $p_j$ ,  $r_j$  tal como se plantea, por ejemplo en [2]. Asimismo, a partir de los valores de las medias y varianzas de la variable  $W_b$  para una serie de niveles de daño es posible calcular los valores de  $p_j$ ,  $q_j$  para cada uno de dichos estados. En definitiva, para la construcción de la matriz de transición que define el modelo B será necesario evaluar los estadísticos (media y varianza) de la vida a fatiga para una serie de niveles de daño. Su obtención se plantea utilizando el método de la perturbación [Liu et al, 1986] que establece una aproximación de los estadísticos de una variable aleatoria función de otras mediante el cálculo de los estadísticos del desarrollo en serie de Taylor de aquella alrededor de las medias de éstas, si bien este trabajo se está llevando a cabo en la actualidad. Para obtener los estadísticos de las variables aleatorias que se calcularán mediante el procedimiento descrito, en este artículo se recurre a una simulación de Monte Carlo, la cual proporciona los datos que, como se ha indicado, se sabe que se pueden obtener mediante un análisis por elementos finitos probabilistas (método de la perturbación).

En el caso que nos ocupa, la variable vida que aparece en la ecuación de Manson y Coffin es función de parámetros del material y de la amplitud de deformación a la que se encuentra sometido el punto material del sólido, siendo necesario, por tanto, obtener el desarrollo en serie de aquella en función de éstas y obtener los estadísticos de estas variables aleatorias. Los correspondientes a los parámetros del material se suponen conocidos, mientras que los de la amplitud de deformación se deberían evaluar mediante análisis por elementos finitos probabilistas<sup>†</sup>.

### 3. FIABILIDAD EN LA FASE DE NUCLEACIÓN DE GRIETA EN FATIGA ALEATORIA

Las ideas expuestas en el epígrafe anterior, junto con el modelo combinado de Manson-Coffin y Basquin, van a ser la base del estudio de fiabilidad en nucleación de

grietas en fatiga aleatoria que se ha desarrollado en este trabajo.

Los desarrollos expuestos en este trabajo se refieren a situaciones uniaxiales de tensión, pudiéndose generalizar el modelo a una situación triaxial.

La deformación total de un punto de un sólido es suma de dos componentes, una elástica y otra plástica, de forma que el modelo combinado antes citado puede expresarse en la forma:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (5)$$

siendo

$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2}$	la amplitud de deformación elástica,
$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2}$	amplitud de deformación plástica,
$N_f$	número de ciclos soportados,
$\sigma'_f$	coeficiente de resistencia a la fatiga,
$b$	exponente de resistencia a la fatiga,
$E$	módulo de elasticidad del metal,
$\varepsilon'_f$	coeficiente de ductilidad a la fatiga, y
$c$	exponente de ductilidad a la fatiga.

El siguiente paso es dotar de una estructura probabilista al modelo de daño acumulado considerado. Ello se plantea en el siguiente epígrafe.

#### 3.1 Variables aleatorias involucradas en el proceso de nucleación de grietas.

Se analizan en este epígrafe las variables aleatorias presentes en el proceso de nucleación de grietas. Para ello se parte del modelo de Manson-Coffin y Basquin, y se considera que todas las variables que intervienen son aleatorias, teniendo en cuenta también su dependencia con otras variables.

- Variables características del material: son el coeficiente de resistencia a la fatiga  $\sigma'_f$ , el exponente de resistencia a la fatiga  $b$ , el módulo de Young del material  $E$ , el coeficiente y exponente de ductilidad a la fatiga,  $\varepsilon'_f$  y  $c$  respectivamente.

Todas ellas dependen obviamente del material, así como del medio ambiente, temperatura, el tiempo, etc. Estas variables aleatorias se suponen conocidas en cuanto a su distribución y estadísticos. En este trabajo se ha supuesto para todas ellas una distribución normal.

<sup>†</sup> Si bien en este trabajo se han obtenido dichos estadísticos de la v. a. amplitud de deformación mediante simulación de Monte Carlo.

- Amplitud de deformación:  $\frac{\Delta \varepsilon}{2}$  Esta variable aleatoria no se conoce a priori su distribución. Es dependiente de la carga (o cargas) que actúan sobre la pieza. Más adelante se indicará cómo se calculan los estadísticos que se necesitan para la construcción del modelo de fiabilidad propuesto.
- Carga exterior aplicada  $P$ : En lo sucesivo se considerará que la carga mínima en cada ciclo es cero por simplicidad, ya que conceptualmente no implica una pérdida de generalidad. Por supuesto, de esta variable aleatoria carga se conoce perfectamente su distribución y por supuesto sus estadísticos, ya que define el problema en estudio.

A continuación, para poder construir un modelo B de daño acumulado es preciso realizar una serie de desarrollos en serie de Taylor. A ello se dedica el siguiente apartado.

### 3.2 Estimación de la esperanza y varianza para la vida a fatiga.

Al no conocer la expresión explícita de la vida de nucleación  $N_f$  en función de las variables aleatorias descritas en el anterior epígrafe, se procede a aproximar  $N_f$  en fatiga aleatoria por su desarrollo en serie de Taylor alrededor de la media de cada variable aleatoria, truncando en orden dos.

$$N_f \approx N_f^0 + \sum_{i=1}^6 \left. \frac{\partial N_f}{\partial X_i} \right|_{\mu_i} (X_i - \mu_{X_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left. \frac{\partial^2 N_f}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\mu_i, \mu_j} (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \quad (6)$$

donde

- Los subíndices  $i$  y  $j$  varían desde 1 hasta 6, e indican las 6 variables aleatorias básicas consideradas:  $P$ ,  $\sigma_f$ ,  $b$ ,  $E$ ,  $\varepsilon_f$  y  $c$  (la amplitud de deformación se estudia más adelante).
- $\mu_{X_j}$  denota la media de la variable aleatoria  $X_j$ .

La estimación de la esperanza de la variable aleatoria amplitud de deformación, se ha realizado en base a la curva de comportamiento cíclico del metal

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = K \frac{P}{E} + \left( K \frac{P}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

siendo:

- $K$  Coeficiente que relaciona la tensión en el punto considerado con la carga  $P$  actuante.
- $K'$  Coeficiente de endurecimiento cíclico.
- $n'$  exponente de endurecimiento cíclico.

Estos dos últimos coeficientes son de hecho variables aleatorias. A partir de la expresión (7), y realizando un desarrollo en serie de Taylor, es posible determinar la esperanza de la v. a. amplitud de deformación. Dicha esperanza es necesaria para calcular los estadísticos de la vida de nucleación en fatiga aleatoria (media y varianza), y de esta forma construir el modelo B de daño acumulado. En efecto, la esperanza de la vida de nucleación, en fatiga aleatoria, es posible obtenerla en base a la expresión (6), considerando que las variables aleatorias (a excepción de la amplitud de deformación) están normalmente distribuidas, y son independientes, con ello resulta:

$$E[N_f] \approx N_f^0 \quad (8)$$

que puede obtenerse recurriendo a la expresión combinada de Manson-Coffin y Basquin, evaluada en las esperanzas de las variables aleatorias

$$\mu \left[ \frac{\Delta \varepsilon}{2} \right] = \frac{\mu_{\sigma_f}}{\mu_E} (2N_f^0)^{\mu_b} + \mu_{\varepsilon_f} (2N_f^0)^{\mu_c} \quad (9)$$

Aplicando ahora el operador varianza a la vida de nucleación en fatiga aleatoria resulta

$$\begin{aligned} \text{Var}[N_f] = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 \left( \left. \frac{\partial^2 N_f}{\partial X_i^2} \right|_{\mu_{X_i}} \right)^2 \{ E[(X_i - \mu_{X_i})^4] - \text{Var}^2[X_i] \} + \\ & \sum_{i=1}^6 \sum_{j>i}^6 \left( \left. \frac{\partial^2 N_f}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\mu_{X_i}, \mu_{X_j}} \right)^2 \text{Var}[X_i] \text{Var}[X_j] + \\ & + \sum_{i=1}^6 \left( \left. \frac{\partial N_f}{\partial X_i} \right|_{\mu_{X_i}} \right)^2 \text{Var}[X_i] \end{aligned} \quad (10)$$

Con estos estadísticos, es posible la construcción del modelo B, tal y como se describe en [2].

## 4. RESULTADOS

En este epígrafe se describen varios ejemplos obtenidos con el modelo de fiabilidad propuesto. El objetivo que se persigue es construir un modelo B a partir de los datos obtenidos en un análisis previo por elementos

finitos probabilistas. No obstante, en la actualidad se está trabajando en la implementación del modelo en un paquete propio de elementos finitos probabilistas. Con objeto de suplir la carencia actual de resultados del análisis PFEM citado, se han realizado simulaciones de Monte Carlo para obtener los estadísticos de las variables aleatorias amplitud de deformación que se obtendría a través de PFEM.

No hay que perder de vista el hecho de que se están obteniendo estadísticos de variables aleatorias a través de desarrollos en serie de Taylor alrededor de la medias, por lo que, cuando las varianzas de las variables aleatorias aumentan, la precisión de la aproximación (truncada) disminuye.

#### 4.1 Ejemplo 1.

En la tabla 1 se muestran las medias y varianzas <sup>†</sup> de las variables aleatorias que definen el problema, supuestas gaussianas. Asimismo, para la construcción del modelo B se necesita la esperanza de la amplitud de deformación, obtenida a través de una simulación de Monte Carlo, como ya se ha indicado. Dicha esperanza es igual a 0,0087285. Para comprobar la bondad de la solución obtenida con el modelo de fiabilidad propuesto se comparan con una simulación de Monte Carlo completa del problema.

Tabla 1. Variables de definición del problema.

	MEDIA	VARIANZA
<b>Carga</b>	440	0
<b>Modulo de Young</b>	210000,0014	1,001930019
<b>Coef. de resistencia fatiga</b>	917,000068	0,00090543
<b>Exp. de resistencia fatiga</b>	-0,09500006	1,10155E-09
<b>Coef. de ductilidad a fatiga</b>	0,26000619	1,1031E-05
<b>Exp. de ductilidad a fatiga</b>	-0,407004742	1,10807E-05
<b>Coef. de endurecimiento</b>	1200	-
<b>Exp. de Endurecimiento</b>	0,2	-

Tabla 2. Resultados del modelo propuesto, comparados con una simulación de Monte Carlo.

Vida de nucleación	MEDIA	VARIANZA
<b>Simulación de Monte Carlo</b>	1225,8416	5074,48636
<b>Modelo propuesto</b>	1223,540691	5025,024290

En la Fig. 1 se muestra la función de distribución obtenida con el modelo de fiabilidad propuesto, frente a la simulación de Monte Carlo. El acuerdo es excelente. Además puede observarse como la predicción es conservadora, para cualquier valor de probabilidad de fallo.

En las Fig. 2 y 3 se muestran detalles ampliados de la función de distribución citada.

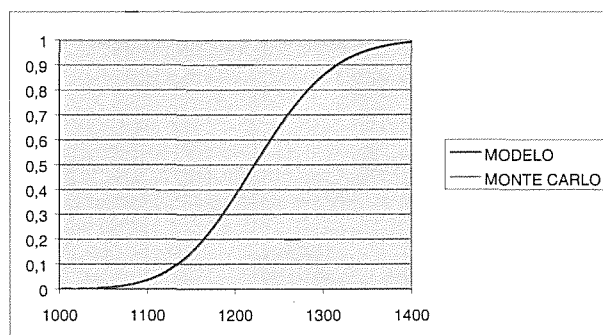


Fig. 1. Función de distribución obtenida con el modelo propuesto, frente a la simulación de Monte Carlo.

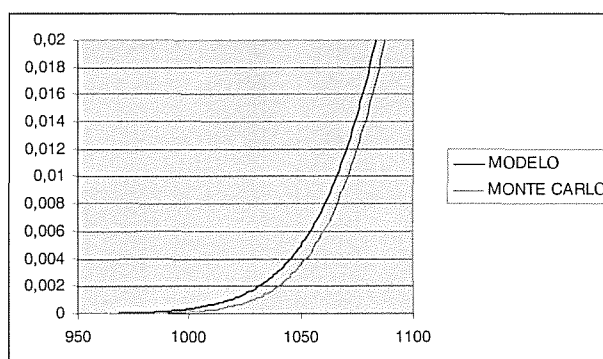


Fig. 2. Función de distribución para valores bajos de probabilidad de fallo (nucleación).

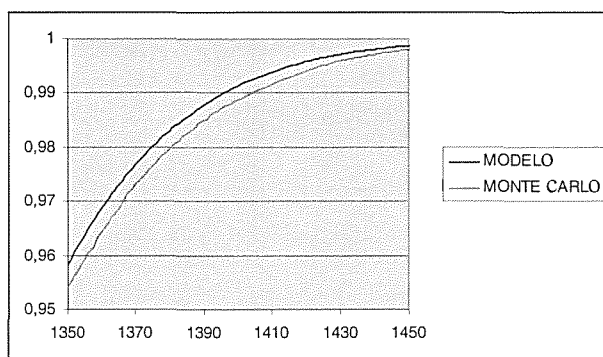


Fig. 3. Función de distribución para altos valores de probabilidad de fallo.

#### 4.2 Ejemplo 2.

En este caso se aumentan los valores de la varianza del coeficiente de resistencia a fatiga cuatro órdenes de magnitud, concretamente a un valor de 100,4287758, dejando los demás valores sin cambios significativos. La media de la amplitud de deformación se mantiene en 0,0087285. Al igual que en el ejemplo precedente, la comparación de los datos obtenidos con el modelo

<sup>†</sup> Obviamente, una varianza nula indica valor determinista.

propuesto se comparan con los provenientes de una simulación de Monte Carlo. Dicha comparación puede observarse en la tabla 3, así como en las Figs. 4, 5 y 6.

Tabla 3. Resultados del modelo propuesto, comparados con una simulación de Monte Carlo.

Vida de nucleación	MEDIA	VARIANZA
Simulación de Monte Carlo	1225,86358	5145,92051
Modelo propuesto	1223,526385	5095,389871

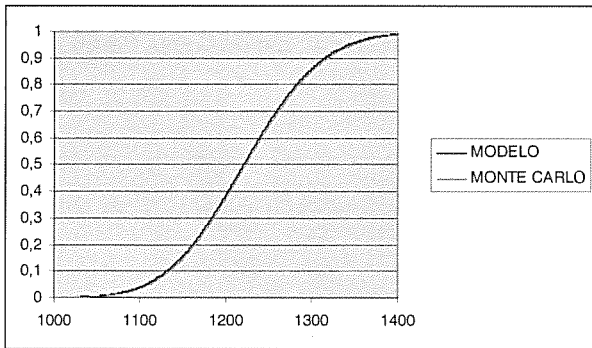


Fig. 4. Función de distribución del modelo frente a Monte Carlo.

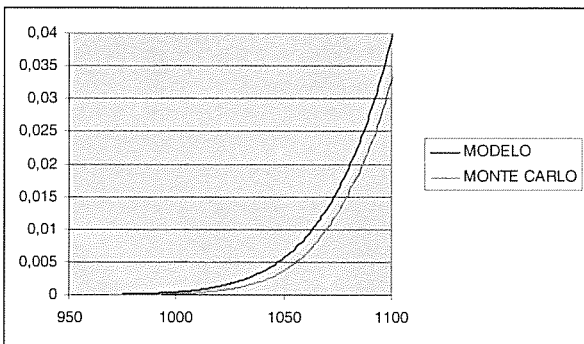


Fig. 5. Zona correspondiente a probabilidad de fallo baja.

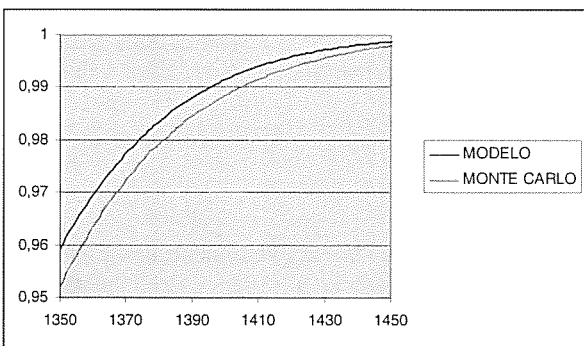


Fig. 6. Probabilidad de fallo alta, corresp. a la Fig. 4.

4.3 Ejemplo 3.

En este caso se aumentan los valores de la varianza del exponente de ductilidad a fatiga, manteniendo el resto de los datos iguales a los de la tabla 1. Así pues se pasa de un valor de  $1,10807E-05$  a  $3,99E-04$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 7.

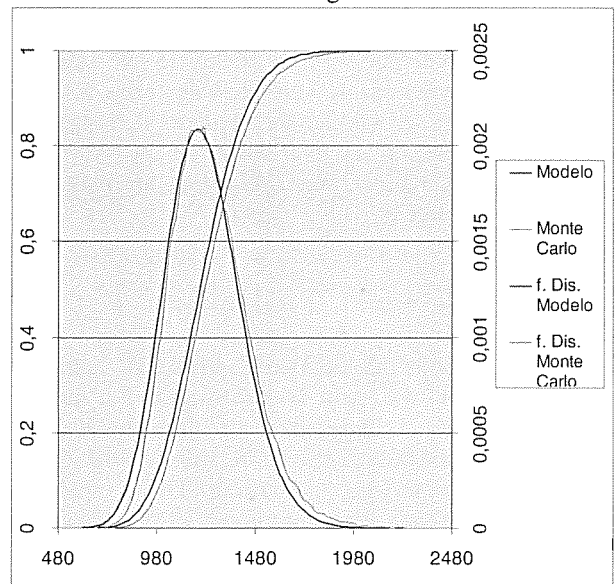


Fig. 7. Funciones de densidad y de distribución.

5. CONCLUSIONES

En todos los resultados puede apreciarse un muy buen acuerdo entre los datos que predice el modelo, comparados con Monte Carlo, aún en el caso de aumentar el valor de las varianzas de las variables aleatorias que definen el problema. Este acuerdo es debido al hecho de utilizar desarrollos en serie de Taylor incluyendo orden dos. Asimismo, también es de destacar el hecho de que en todos los resultados obtenidos, la predicción del modelo de fiabilidad propuesto siempre da valores conservativos. En los resultados mostrados puede observarse la influencia de la disminución de los valores del cociente señal-ruido para dos variables aleatorias.

6. REFERENCIAS

- [1] Bea, J.A.; Doblaré, M. And Gracia, L. Evaluation of the Probability Distribution of Crack Propagation Life in Metals Fatigue by means of PFEM and B-Models. Eng. Fract. Mech. J. (aceptado)
- [2] Bogdanoff, J.L. and Kozin, F., *Probabilistic models of cumulative damage*, (Wiley, New York, 1985).
- [3] Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 3rd Edition Martinus Nijhoff, Dordrecht, Netherlands (1982).