

MODELIZACIÓN DE LA FRACTURA DEL HORMIGÓN EN MODO MIXTO

D.A. Cendón, J.C. Gálvez, J. Planas y M. Elices
 Departamento de Ciencia de Materiales
 E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
 Universidad Politécnica de Madrid, 28040 MADRID.

Resumen. En este trabajo se presenta un modelo de fractura de materiales cuasi frágiles bajo sollicitaciones de tracción y cortante (modo mixto I y II). Se trata de un modelo no lineal, basado en las hipótesis del modelo de fisura cohesiva, desarrollado para fractura en modo I. Se presenta la formulación del modelo y el procedimiento para incorporarlo en un programa de elementos finitos mediante un elemento de interface en una grieta discreta. El modelo se ha contrastado experimentalmente. Se presentan las predicciones hechas con el modelo de los ensayos de fractura en modo mixto de vigas de hormigón de varios tamaños, bajo carga proporcional y no proporcional, obteniéndose un buen ajuste y una adecuada convergencia numérica.

Abstract. This paper presents a model for normal/shear fracture of quasibrittle materials. The model is non-linear and is based on the hypothesis of the cohesive crack, developed for mode I fracture. The formulation of the model and the procedure to implement it on a finite element code by means of an interface element are shown. The experimental validation is also shown. Mixed mode fracture tests of several sizes concrete beams under proportional and non proportional loading are simulated by the model; adequate fit and numerical converge are reached.

1. INTRODUCCIÓN

La modelización numérica de la fractura en modo mixto de materiales cuasi frágiles es un problema complicado al que se han dedicado importantes esfuerzos durante los últimos años. Tradicionalmente los modelos de fractura basados en el método de los elementos finitos se clasifican en dos grupos: modelos de fisura distribuida y modelos de fisura discreta.

En los modelos de fisura distribuida la fractura es representada mediante infinitas grietas paralelas, distribuidas dentro del elemento finito, que se abren infinitesimalmente. Se emplea una malla fija de elementos finitos en la que la propagación de las grietas es simulada mediante la reducción de la rigidez y de la resistencia del material. Las leyes constitutivas, definidas mediante relaciones tensión-deformación, son no lineales y presentan ablandamiento, lo que introduce dificultades en el cálculo [1-2].

El modelo de fisura discreta es preferido cuando hay una o varias fisuras en la estructura. El modelo de la fisura cohesiva, desarrollado por Hillerborg [3], es muy adecuado para modelizar la fractura en modo I de materiales cuasi frágiles [2]. Se ha extendido a la fractura en modo mixto (modos I y II) e incorporado a códigos de elementos finitos [4-6] y de elementos de

contorno [7]. Estos códigos tienen un ámbito de usuarios reducido, generalmente relacionado con los autores y muy especializado.

Este trabajo presenta un procedimiento de cálculo para reproducir el proceso de fractura en modo mixto de materiales cuasi frágiles incorporable a códigos de elementos finitos comerciales. Extiende el modelo de la fisura cohesiva a la fractura en modo mixto. Además, se contrastan las predicciones hechas por el modelo con los resultados experimentales de un conjunto de vigas de hormigón ensayadas bajo carga en modo mixto [8-10].

2. FISURA COHESIVA EN MODO MIXTO**2.1. Superficie de rotura en modo mixto y su evolución**

El ingrediente fundamental de la fisura cohesiva en modo I es la ley de ablandamiento del material, expresada como una relación entre la tensión normal a los labios de la grieta y la apertura de la grieta. Cuando la grieta progresa en modo mixto (I y II) es necesario tener en cuenta la interacción entre la tensión normal, σ y la tensión tangencial, τ , a los labios de la grieta. Se asume que la grieta progresa cuando la combinación de las tensiones normal al plano de la grieta, σ , y la tensión

ANALES DE MECANICA DE LA FRACTURA VOL. 16 (1999)

tangente, τ alcanza la superficie de rotura $F(\sigma, \tau) = 0$, que juega un papel similar a la superficie de plastificación en plasticidad clásica. En este trabajo se ha adoptado el modelo desarrollado en [1]:

$$F = \tau^2 - 2c \tan \phi_f (\sigma_t - \sigma) + \tan^2 \phi_f (\sigma^2 - \sigma_t^2) \quad (1)$$

donde: c es la cohesión, ϕ_f es el ángulo de fricción y σ_t la resistencia normal a los labios de la grieta.

De acuerdo con el planteamiento de la fisura cohesiva [3], la superficie de rotura debe evolucionar a medida que la grieta se abre. Esto se hace a través de las funciones de ablandamiento de la cohesión y de la resistencia normal entre los labios de la grieta. Se define el vector de desplazamientos inelásticos relativos entre los labios de la grieta, \mathbf{u}^i . Se adopta como variable para definir las funciones de ablandamiento la norma de este vector, u^{ieff} . El vector \mathbf{u}^i se obtiene por descomposición del vector de desplazamiento relativo entre los labios de la grieta, \mathbf{u} , en una parte elástica, \mathbf{u}^e , y una parte inelástica, \mathbf{u}^i . La parte inelástica, \mathbf{u}^i , se compone de los desplazamientos plásticos, \mathbf{u}^p , y de los desplazamientos debidos a la fractura (apertura de la grieta), \mathbf{u}^f . Todo ello se expresa:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^i \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^f \quad (3)$$

$$u^{ieff} = \|\mathbf{u}^i\| = \left(u_x^i{}^2 + u_y^i{}^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

y la superficie de rotura: $F = F(c, \sigma_t, \phi_f)$

donde: $c = c(u^{ieff})$ y $\sigma_t = \sigma_t(u^{ieff})$.

En este trabajo se adoptan las siguientes leyes bilineales para las funciones $c(u^{ieff})$:

$$\left. \begin{aligned} c(u^{ieff}) &= c_0 + u^{ieff} \frac{s_{1c} - c_0}{\omega_{1c}} \dots \forall u^{ieff} < \omega_{1c} \\ c(u^{ieff}) &= s_{1c} \left(1 - \frac{u^{ieff} - \omega_{1c}}{\omega_c - \omega_{1c}} \right) \dots \forall u^{ieff} \in \langle \omega_{1c}, \omega_c \rangle \\ c(u^{ieff}) &= 0 \dots \forall u^{ieff} > \omega_c \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{donde: } \omega_c = \frac{2G_F^{IIa} - (s_{1c} + c_0)\omega_{1c}}{s_{1c}}$$

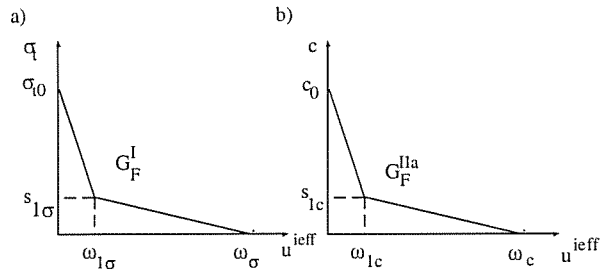


Figura 1. Leyes de ablandamiento bilineal: a) tensiones normales, b) cohesión.

y para $\sigma_t(u^{ieff})$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t(u^{ieff}) &= \sigma_{t0} + u^{ieff} \frac{s_{1\sigma} - \sigma_{t0}}{\omega_{1\sigma}} \dots \forall u^{ieff} < \omega_{1\sigma} \\ \sigma_t(u^{ieff}) &= s_{1\sigma} \left(1 - \frac{u^{ieff} - \omega_{1\sigma}}{\omega_\sigma - \omega_{1\sigma}} \right) \dots \forall u^{ieff} \in \langle \omega_{1\sigma}, \omega_\sigma \rangle \\ \sigma_t(u^{ieff}) &= 0 \dots \forall u^{ieff} > \omega_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{donde: } \omega_\sigma = \frac{2G_F^I - (s_{1\sigma} + \sigma_{t0})\omega_{1\sigma}}{s_{1\sigma}}$$

y G_F^I y G_F^{IIa} son la energía de fractura en modo I y modo IIa (medida mediante un ensayo de cortante con elevado confinamiento); s_{1c} , ω_{1c} , $s_{1\sigma}$ y $\omega_{1\sigma}$, son las coordenadas del codo de la ley de ablandamiento de la cohesión y la tensión normal, respectivamente.

La figura 1 representa las leyes de ablandamiento correspondientes a la tensión normal y a la cohesión, y la figura 2 presenta la superficie de rotura y su evolución.

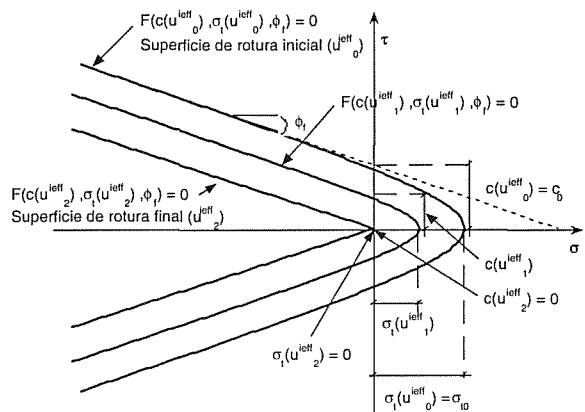


Figura 2. Superficie de rotura y su evolución.

2.2. Dilatancia

Las tensiones tangentes a los labios de la grieta, además de provocar el deslizamiento relativo entre los labios de la grieta, inducen la apertura normal de la grieta. Este fenómeno se denomina *dilatancia* y se debe a que las irregularidades de la superficie de rotura impiden el deslizamiento relativo de los labios de la grieta si ésta no se abre a la vez. La dilatancia puede ser representada en el mismo gráfico de la superficie de rotura a partir de la dirección del vector de deformaciones inelásticas en la grieta. El ángulo formado por este vector con el eje vertical (tensiones tangenciales) es interpretado como ángulo de dilatancia del modelo. De este modo, la dirección paralela al eje vertical (tensiones tangenciales) corresponde a dilatancia nula, y la dirección paralela al eje horizontal (tensiones normales) corresponde a la apertura de la grieta normal a sus labios sin deslizamiento relativo. En plasticidad tradicional, la expresión que establece la dirección de las deformaciones inelásticas se denomina *regla de flujo* y es normal en cada punto al *potencial plástico* ($Q=cte$). Si no hay dilatancia el potencial plástico coincide con la expresión de la superficie de rotura, denominándose *flujo asociativo*. Si hay dilatancia esto no es así, las funciones son distintas y se denomina *flujo no asociativo*. En este trabajo se considera que el ángulo de dilatancia decrece a medida que se abre la grieta, adoptándose la siguiente función lineal [4]:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_{0d} \left(1 - \frac{u^{ieff}}{\omega_{c\phi}} \right) \dots \forall u^{ieff} < \omega_{c\phi} \\ \phi &= 0 \dots \dots \dots \forall u^{ieff} > \omega_{c\phi} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

donde ϕ_{0d} es la dilatancia inicial y $\omega_{c\phi}$ la apertura crítica para la cual se anula el ángulo de dilatancia.

3. INCORPORACIÓN EN UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS

El modelo de la fisura cohesiva descrito en el apartado anterior se ha incorporado como la ecuación constitutiva de un modelo de plasticidad en un elemento de interface dentro de un código de elementos finitos. Este procedimiento permite representar el proceso de fractura del material cuasi frágil en una grieta discreta mediante un modelo de fractura no lineal de acuerdo con las hipótesis de la fisura cohesiva [3]. Se trata en definitiva de la extensión del modelo de Hillerborg [3] a la fractura en modo mixto (I y II).

Se ha empleado el código comercial de elementos finitos ABAQUS®. Se ha desarrollado, mediante una subrutina de usuario, un elemento de interface de espesor nulo constituido por 4 nodos, enfrentados dos a dos y situados en caras opuestas de la grieta.

Inicialmente, cuando el desplazamiento relativo de los labios es nulo, los nodos son coincidentes dos a dos.

De acuerdo con la teoría de la plasticidad, el procedimiento de propagación de la grieta se establece, de forma incremental, del siguiente modo. Sea el paso n en el que se conoce el estado de tensiones σ_n y el parámetro que controla el ablandamiento, u_n^{ieff} , en el que la grieta se propaga y, por tanto se cumple la ecuación de la superficie de rotura: $F_n(\sigma_n, u_n^{ieff}) = 0$. Se establece un incremento de desplazamientos relativos entre los labios de la grieta, Δu_n . En el nuevo estado $n+1$ se debe cumplir de nuevo el criterio de rotura: $F_{n+1}(\sigma_{n+1}, u_{n+1}^{ieff}) = 0$. Para ello se establece un predictor elástico de tensiones:

$$\sigma_e = \sigma_n + \mathbf{E} \Delta u_n \quad (8)$$

donde σ_e es el nuevo estado de tensiones, exterior a la superficie de rotura y \mathbf{E} la matriz de rigidez de la grieta. Para retornar a la superficie de rotura se establece un corrector inelástico:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_e - \Delta \lambda \mathbf{E} \mathbf{m} \quad (9)$$

donde $\Delta \lambda$ es el multiplicador plástico y \mathbf{m} es el vector de desplazamientos inelásticos, normal al potencial plástico ($Q=cte$). El valor de $\Delta \lambda$ se obtiene de la condición de rotura para el paso $n+1$:

$$F_{n+1}(\sigma_e - \Delta \lambda \mathbf{E} \mathbf{m}, u_{n+1}^{ieff}) = 0 \quad (10)$$

donde: $u_{n+1}^{ieff} = u_n^{ieff} + \|\Delta \lambda \mathbf{m}\|$

En los puntos donde no es posible construir la normal al potencial plástico, el vector \mathbf{m} se obtiene mediante el retorno al vértice del potencial (figura 3).

El modelo de interface expuesto conduce a un sistema de ecuaciones no lineal. En este trabajo se ha empleado el método de la longitud de arco [13], calculando en cada iteración la matriz tangente.

Los elementos de interface han sido incorporados en la trayectoria de la grieta, calculada previamente mediante un cálculo elástico lineal del modo recogido en [9-10]. Para este trabajo se han dispuesto 100 elementos de interface a lo largo de la trayectoria de la grieta.

4. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

El modelo desarrollado se ha contrastado con los resultados experimentales correspondientes a un conjunto de vigas de hormigón ensayadas en fractura en modo mixto bajo carga proporcional y no proporcional [8-10]. La figura 4 presenta la geometría, esquema de

carga y condiciones de contorno de los ensayos. La tabla 1 detalla las dimensiones y número de probetas ensayadas de cada tipo.

Las propiedades mecánicas del hormigón, medidas de acuerdo con RILEM 50-FMC, ASTM C39, ASTM C469 y ASTM C496 fueron, respectivamente: $G_F = 70$ N/m, $f_c = 57$ Mpa, $E = 39$ GPa y $f_t = 3.0$ Mpa. De acuerdo con [4] se han estimado los otros valores necesarios para el modelo: $c = 5.0$ Mpa, $\phi_f = 50^\circ$, $\phi_d = 45^\circ$ y $G^{IIa}_F = 70$ N/m.

Las figuras 5 a 7 muestran la envolvente experimental y la predicción del modelo de las curvas carga frente a CMOD y carga frente al desplazamiento del punto de aplicación de la carga para los ensayos de tipo 1 para las vigas de los tres tamaños, respectivamente. Se puede observar que las predicciones hechas para las vigas pequeñas ($D = 75$ mm) y medianas ($D = 150$ mm) son ajustadas, que el método converge correctamente en la rama post-pico de las curvas hasta valores bajos de la carga y que el *snap-back* de las curvas carga-desplazamiento es correctamente captado por el modelo. La predicción de los resultados correspondientes a las vigas grandes ($D = 300$ mm) no es tan bueno, lo que sugiere que la energía de fractura en modo mixto para este tamaño es mayor que la medida en modo I para las vigas pequeñas.

Las figuras 8 y 9 muestran la envolvente experimental y la predicción del modelo de las curvas carga frente a CMOD y carga frente al desplazamiento del punto de aplicación de la carga para los ensayos de tipo 2 para las vigas de tamaño pequeño ($D = 75$ mm) y mediano ($D = 150$ mm), respectivamente. En todos los casos las predicciones hechas por el modelo son ajustadas, el método converge correctamente en la rama post-pico de las curvas hasta valores bajos de la carga y el *snap-back* de las curvas carga-desplazamiento es correctamente captado por el modelo.

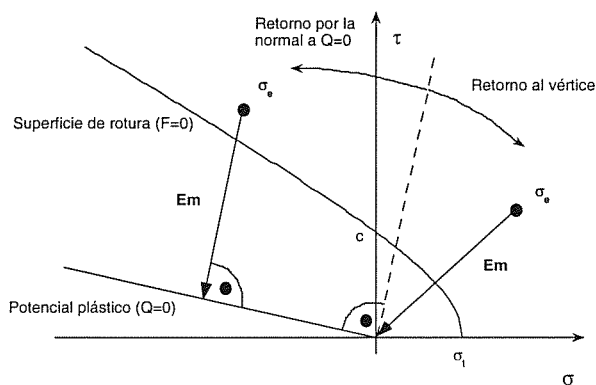


Figura 3. Dirección del corrector inelástico para retornar a la superficie de rotura.

Tabla 1. Dimensiones y número de probetas ensayadas

	Canto (mm)	Longitud (mm)	Espesor (mm)	Nº Probetas	
				Tipo 1	Tipo 2
D1	75	340	50	6	4
D2	150	675	50	6	6
D3	300	1350	50	4	5

5. COMENTARIOS FINALES

Se ha presentado un modelo de fractura en modo mixto I y II (tensiones normales y tangenciales) de materiales cuasi frágiles. El modelo constituye una extensión del modelo de fisura cohesiva, desarrollado para fractura en modo I, mediante una formulación análoga a la empleada para materiales elastoplásticos. Se ha incorporado a un programa comercial de elementos finitos mediante un elemento de interface y se ha contrastado experimentalmente obteniéndose un buen ajuste. Además, en las predicciones realizadas de las curvas carga-desplazamiento y carga-CMOD el método converge satisfactoriamente en la rama post-pico hasta valores bajos de la carga. Por último, es importante destacar que la predicción del modelo ha sido satisfactoria para los tres tamaños de viga y los dos tipos de ensayo.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Cultura la concesión de las ayudas PB97-0579 y MAT 97-1022, así como al Universidad Politécnica de Madrid la concesión de la ayuda I+D 14989, para la realización de este trabajo.

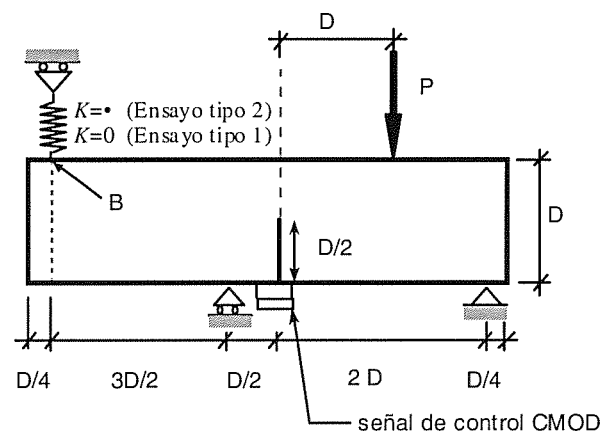


Figura 4. Geometría, condiciones de contorno y esquema de cargas de los ensayos [8-10].

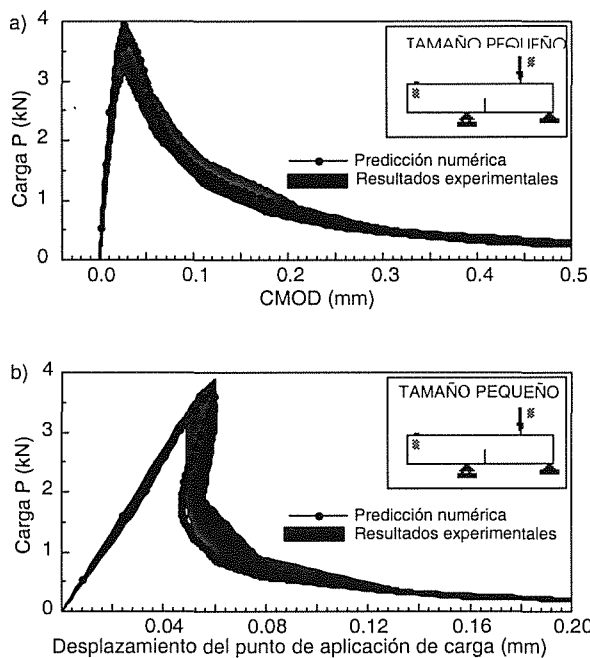


Figura 5. Envoltorio experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 1* en probetas pequeñas ($D=75$ mm): a) Curvas carga-CMOD, b) curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

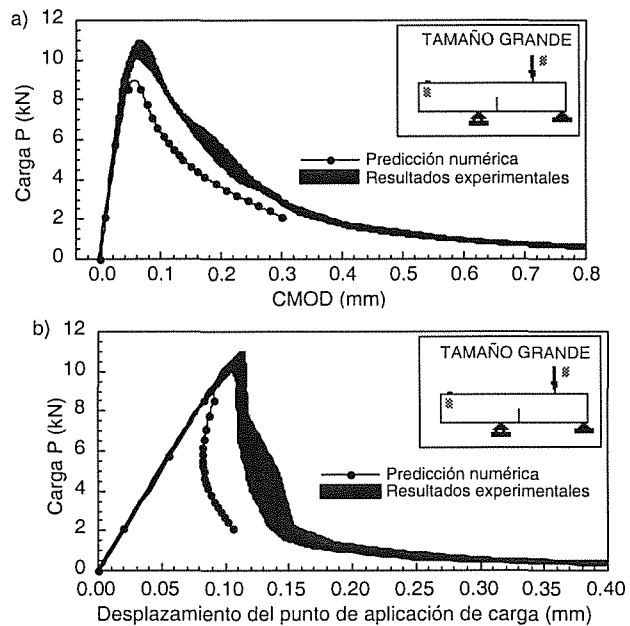


Figura 7. Envoltorio experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 1* en probetas grandes ($D=300$ mm): a) Curvas carga-CMOD, b) curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

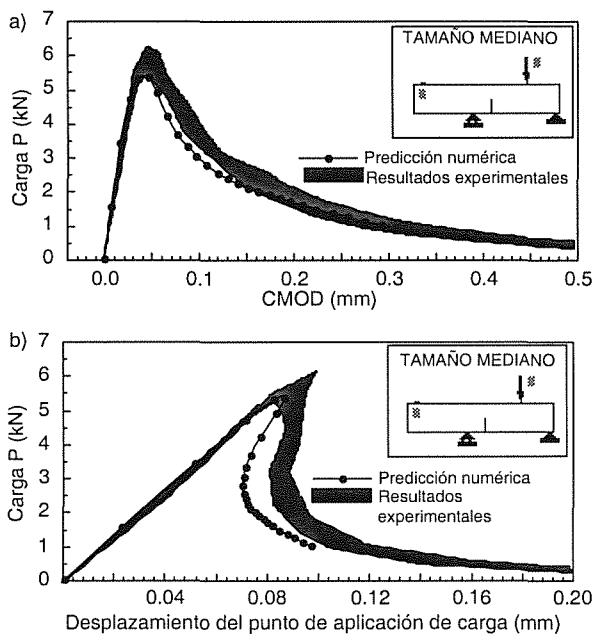


Figura 6. Envoltorio experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 1* en probetas medianas ($D=150$ mm): a) Curvas carga-CMOD, b) curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

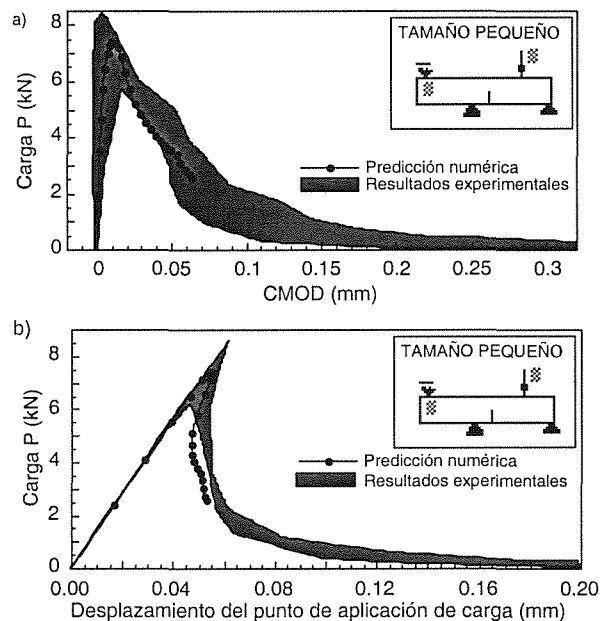


Figura 8. Envoltorio experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 2* en probetas pequeñas ($D=75$ mm): a) Curvas carga-CMOD, b) curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

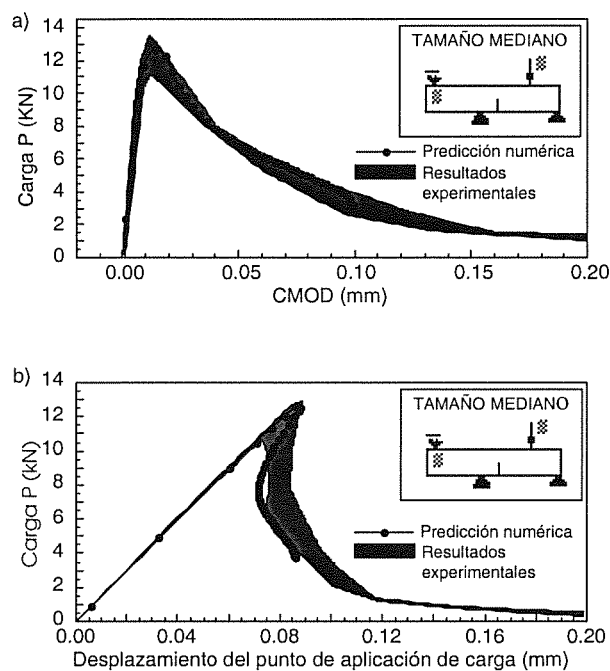


Figura 9. Envolvente experimental y predicción numérica de los ensayos *tipo 2* en probetas medianas ($D=150$ mm): a) Curvas carga-CMOD, b) curvas carga-desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

7. REFERENCIAS

- [1] Carol I., Prat P. y López C. "Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis", *J. of Engineering Mechanics*, 123, 765-773 (1997).
- [2] Bazant Z. y Planas J. "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials", CRC Press, 616 pág. (1997).
- [3] Hillerborg A., Modéer M. y Petersson P. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782 (1976).
- [4] Cervenka J. "Discrete crack modelling in concrete structures", Ph. D. Thesis, University of Colorado (1994).
- [5] Valente, S. "On the cohesive crack model in mixed-mode conditions", *Concrete, Rock and Ceramics*, E & FN Spon, 66-80 (1995).
- [6] Xie M. y Gerstle W. "Energy-based cohesive crack propagation modelling", *J. of Engineering Mechanics*, 121, 1349-1358 (1995).
- [7] Saleh A. y Aliabadi M. "Crack growth analysis in concrete using boundary element method", *Engineering Fracture Mechanics*, 51, 533-545 (1995).
- [8] Gálvez J.C., Cendón D.A., Planas J., Guinea, G.V. y Elices, M. "Fracture of concrete under mixed loading. Experimental results and numerical prediction", *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, AEDIFICATIO Pub, 729-738 (1998).
- [9] Cendón D.A., Gálvez J.C., Planas J. y Elices M. "Fractura del hormigón en modo mixto: resultados experimentales y predicción numérica", *Anales de Mecánica de la Fractura*, 15, 169-174 (1998).
- [10] Gálvez J.C., Planas J., Guinea, G.V. y Elices, M. "Mixed mode fracture of concrete under proportional and non proportional loading", *Int. Journal of Fracture*, aceptado para publicar (1999).
- [11] Carol I., Prat P. y Bazant Z. "New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation", *Int. J. of Solids and Structures*, 29, 1173-1191 (1992).
- [12] Ortiz M. y Martin J. "Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 28, 1839-1853 (1989).