

MODELIZACIÓN SIMPLIFICADA DEL COMPORTAMIENTO DE COMPONENTES ESTRUCTURALES SOMETIDOS A IMPACTO

R. Zaera, A. Arias, C. Navarro

Área de Ingeniería Estructural, Departamento de Ingeniería Mecánica.
Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid.
Avda. de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid.

Resumen. El elevado coste de la experimentación en problemas de impacto a velocidades superiores a los 600 m/s, para los que se requiere de instalaciones complejas, tanto por las medidas de seguridad que hay que tomar, como por los dispositivos de propulsión con los que hay que contar, ha propiciado el desarrollo de herramientas analíticas de simulación que simplifican y abaratan el proceso de diseño de estructuras sometidas a impacto. En este texto se presenta un resumen de los métodos empleados en la simulación analítica de impactos a alta velocidad. Así mismo se presenta un nuevo modelo para impacto de placas metálicas circulares empotradas desarrollado a partir de una ecuación de balance energético.

Abstract. Testing of high impact problems at speeds of over 600 m/s calls for the use of complex facilities equipped with special security measures as well as with high propulsion devices. The high cost of these facilities has led to the development of analytical simulation tools that simplifies the design of structures to be subjected to impact. A summary is given here of the methods of analytical simulation used in tests of high-speed impact. Also a new analytical model for fully clamped circular metallic plates subjected to impact is presented. This model uses an energy balance equation.

1. INTRODUCCION

Durante los últimos cincuenta años, científicos e ingenieros han mostrado un creciente interés por la solución de problemas relacionados con el impacto de sólidos. Ejemplos de este tipo de problemas pueden encontrarse en el campo de la protección militar, explosiones sobre estructuras, accidentes de vehículos, impactos sobre aviones o satélites. Hasta hace un par de décadas, el análisis de estos problemas se limitaba casi exclusivamente a las colisiones sólidos de geometrías simples y bajas energías de impacto con deformaciones plásticas limitadas. La razón hay que buscarla tanto en la complejidad matemática que aparece en la resolución de las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos como en la relativa ignorancia sobre el comportamiento mecánico de los materiales a elevadas velocidades de deformación. La aparición de potentes herramientas de cálculo y el progreso en las técnicas de instrumentación, que han permitido disponer de una mayor cantidad de datos experimentales, han venido a ayudar a la resolución de problemas impulsivos. El ingeniero comienza a disponer de una serie de modelos que brindan una indispensable ayuda en el estudio de choque de coches, impactos sobre álabes de turbinas o protecciones balísticas y explosiones sobre estructuras o vehículos.

Atendiendo al concepto físico del término, se define habitualmente el *impacto* como un proceso de contacto entre dos o más sólidos en el que las fuerzas de contacto alcanzan valores elevados en un breve intervalo de tiempo. En cualquier proceso de contacto entre cuerpos aparecen fenómenos de transmisión de ondas de tensión que se propagan a cierta velocidad. Este fenómeno físico cobra especial relevancia en situaciones en las que la aplicación de las cargas es muy rápida. En estos casos, el estudio de este tipo de problemas se complica enormemente, ya que las ecuaciones de los problemas dejan de ser lineales, tanto por las ecuaciones de comportamiento del material como por las deformaciones que aparecen. Otro rasgo diferenciador en los problemas de impacto es la necesidad de incluir en el estudio del problema la evolución del cuerpo que ejerce la carga. En problemas no impulsivos, es habitual considerar conocida la carga a priori -un valor constante en problemas cuasi-estáticos o una función del tiempo conocida en problemas vibratorios-, ignorando el posible efecto que la respuesta del sólido pueda tener sobre la causa de la carga. En problemas impulsivos es necesario estudiar de forma acoplada la evolución del cuerpo que recibe el impacto y del cuerpo que lo produce ya que, de otra forma, es imposible conocer el valor de la fuerza de contacto.

2. SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE IMPACTO

El diseño de estructuras sometidas a impacto es una actividad que se ha realizado tradicionalmente de forma empírica, mediante pruebas de impacto real con la configuración proyectil-blanco objeto de cada estudio. Este método de diseño ofrece una gran seguridad, pero presenta la desventaja de ofrecer resultados válidos exclusivamente para la configuración ensayada y difícilmente extrapolables; cualquier modificación en la velocidad de impacto o en las características del proyectil o del blanco invalida los datos obtenidos. Es además el método más gravoso económicamente ya que para la realización de pruebas de impacto se requieren instalaciones y dispositivos costosos. En el caso de que el objetivo de las pruebas experimentales sea más amplio que la simple obtención de las características del blanco que evita que se alcance un nivel de daño no aconsejable, o de las características del proyectil que consiguen perforar un blindaje o destruir una estructura, la realización de pruebas experimentales puede ser mucho más costosa; si se desea obtener la deformación del blanco o la posición del proyectil durante el proceso de perforación se requieren dispositivos de fotografía ultrarrápida –óptica o de rayos X– que encarecen enormemente los ensayos. Con objeto de ampliar la validez de las pruebas de fuego a configuraciones proyectil-blanco diferentes de las ensayadas, se han desarrollado paralelamente las denominadas técnicas semiempíricas, que proponen ecuaciones algebraicas con algún fundamento teórico y calibradas a partir de un gran número de datos experimentales. Estas ecuaciones permiten interpolar o extrapolar resultados. Una enumeración de fórmulas semiempíricas empleadas habitualmente en el diseño de blindajes metálicos sometidos a impacto de proyectiles metálicos puede encontrarse en el trabajo de Zukas (1982). En general, este tipo de técnicas no avanzan en el conocimiento de los fenómenos físicos que tienen lugar durante el proceso de impacto. La necesidad de disponer de herramientas de diseño que permitan simular un proceso de impacto ha impulsado en las últimas décadas el desarrollo de un gran número de modelos analíticos.

La *modelización analítica* consiste en asumir una serie de hipótesis simplificadoras en los mecanismos físicos que definen el comportamiento de los sólidos y definir, mediante ecuaciones sencillas, un modelo analítico que permita resolver cada problema en unos pocos minutos o segundos. La precisión de estos métodos es menor que la de los métodos numéricos, pero su rapidez compensa este inconveniente, ya que permiten realizar una gran cantidad de cálculos en poco tiempo. Los modelos analíticos, también denominados modelos ingenieriles, se muestran como una herramienta de gran utilidad en el diseño de blindajes por su rapidez y sencillez de manejo, además de proveer una detallada información acerca del

proceso de penetración. La caracterización de los materiales en estos modelos se suele expresar mediante ecuaciones sencillas y a través de parámetros de determinación experimental, tales como el módulo de elasticidad, la resistencia o la deformación de rotura. Las ecuaciones utilizadas en mecánica de medios continuos se simplifican considerablemente al introducir hipótesis obtenidas del análisis del comportamiento global del fenómeno. La aproximación que se obtiene con este tipo de modelos depende en gran medida de su complejidad. La introducción de un mayor número de variables en el modelo permite reproducir con mayor exactitud los fenómenos físicos que tienen lugar durante el impacto, aunque se complica la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales y aumenta el tiempo de ejecución. Por ello es necesario llegar a un compromiso entre la capacidad del modelo para predecir resultados experimentales y la necesidad de que el cálculo no adquiera un gran complejidad. En este sentido, es frecuente considerar las siguiente hipótesis para la simulación de impactos a alta velocidad (Zukas, 1982): se asume que únicamente una pequeña zona en torno al punto de impacto sufre sus efectos. Las condiciones de contorno no se consideran; los fenómenos termodinámicos (rozamientos, aumento de temperatura por deformación y variación de propiedades mecánicas en el material por cambio de temperatura) no se consideran; los materiales se consideran rígidos hasta su plastificación (se evita la complejidad de contemplar fenómenos de transmisión de ondas elásticas sin cometer graves errores, ya que la mayor parte de la energía del impacto se disipa en deformación plástica). Bajo estas hipótesis, las predicciones de los modelos analíticos suelen ser suficientemente acertadas en la mayor parte de los casos, aunque la validez de cada modelo se restringe a un problema de características concretas para el cual ha sido desarrollado.

3. MODELOS ANALÍTICOS PARA VIGAS Y PLACAS METÁLICAS

La modelización analítica de vigas o placas sometidas a cargas impulsivas se suele realizar utilizando ecuaciones de balance energético o de variación de momento. En ambos casos se postula algún tipo de deformada característica que el elemento estructural deberá seguir.

Modelización mediante ecuación de balance energético.

En este tipo de modelos (Calder et al., 1971, Perrone et al., 1984) se elige, para indicar el desplazamiento u de un punto de la estructura, una función de la forma:

$$u = u_o(t) \phi(r) \quad (1)$$

donde u_s es el desplazamiento de un punto característico de la viga o de la placa, y cuya posición determina completamente la posición del resto de los puntos (Fig. 1). Partiendo de esta ecuación se obtiene el campo de velocidades y de deformaciones, con lo que se puede calcular la energía cinética E_k del sólido y la energía disipada en deformación plástica E_p . El balance energético se plantea en forma diferencial:

$$\dot{T} = \dot{E}_k + \dot{E}_p \quad (2)$$

donde T es el trabajo realizado por las cargas exteriores. De esta ecuación de balance se obtiene una relación entre u_o , \dot{u}_o y \ddot{u}_o que puede integrarse numéricamente en el tiempo para obtener u_o en cada instante y, por tanto, la deformada de la placa. La condición de rotura en la placa suele establecerse en términos de deformación longitudinal de la placa.

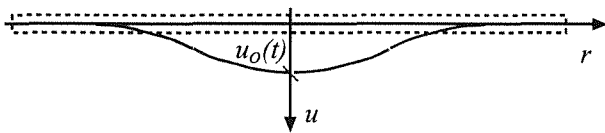


Fig. 1. Deformada característica para una placa en función de la posición de uno de los puntos.

Modelización mediante ecuaciones de variación del momento.

Existen otro tipo de modelos para estudiar la respuesta de vigas y placas (Parkes, 1955, Shen et al., 1993) que utilizan un planteamiento alternativo consistente en suponer campos de velocidad o de desplazamiento lineales a tramos. En los puntos de discontinuidad se supone la existencia de rótulas plásticas (Fig. 2), lo que permite conocer el valor de los esfuerzos en estos puntos. Sobre cada tramo se aplican ecuaciones de variación del momento lineal y del momento angular, con lo que se dispone de la ecuaciones del movimiento en función de las cargas exteriores aplicadas. En cuanto a la posición de las rótulas, puede suponerse fija o variable. En el primer caso es habitual determinar su posición inicial en los puntos de aplicación de las cargas. En el segundo caso, es necesario disponer de ecuaciones adicionales que permitan determinar la posición en cada instante de las rótulas, para lo que suele emplearse el principio de máximo trabajo plástico. La condición de rotura se asocia a la deformación longitudinal o al valor del cortante en las rótulas plásticas.

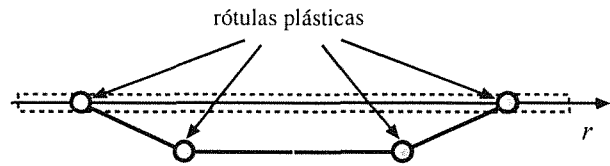


Fig. 2. Campo de velocidades característico para una placa.

4. MODELOS DE PENETRACIÓN EN BLANCOS SEMIINFINITOS

A diferencia de los problemas indicados anteriormente, en los problemas de penetración se considera un proyectil que se introduce en el blanco y cuya evolución debe ser analizada conjuntamente a la del blanco que recibe el impacto. La aplicación de estos modelos está restringida prácticamente a los problemas balísticos.

Impacto a hipervelocidad

Los primeros modelos analíticos de impacto a alta velocidad se desarrollaron en el campo de la hipervelocidad. A estas velocidades, el valor de las tensiones superan ampliamente la resistencia de los materiales, que presentan un comportamiento más cercano al de los fluidos que al de los sólidos. Esto permite utilizar sencillos principios de mecánica de fluidos para formalizar el problema. El primer acercamiento a la simulación de este tipo de problemas lo constituyen el trabajo de Pack y Evans (1951) con el desarrollo del modelo denominado "fluid jet penetration" para penetración de proyectiles esbeltos en blancos de gran espesor. En este modelo proyectil y blanco se estudian como fluidos y la interfase entre ellos es un punto de remanso sobre el que se toma un sistema de referencia móvil y se plantea el equilibrio de presiones (Fig. 3). Este punto de remanso avanza a una velocidad u , mientras que el proyectil lleva una velocidad v . La ecuación propuesta por estos autores es:

$$\frac{1}{2} \rho_p (v-u)^2 = \frac{1}{2} \rho_t u^2 \quad (3)$$

donde ρ_p y ρ_t son las densidades de proyectil y blanco, respectivamente. De esta ecuación se obtiene una velocidad de penetración u constante, menor que v , por lo que el proyectil va perdiendo longitud de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dL}{dt} = -(v-u) \quad (4)$$

La penetración cesa cuando el proyectil se ha erosionado completamente, instante en el cual la profundidad del crater es, según el modelo:

$$p = L \sqrt{\rho_p / \rho_t} \quad (5)$$

siendo L la longitud inicial del proyectil. Según esta ecuación, la profundidad es independiente de la velocidad del proyectil, lo que puede comprobarse experimentalmente en impactos a hipervelocidad. Sin embargo, para velocidades de impacto por debajo de los 3000 m/s, las propiedades resistentes de los materiales comienzan a tener relevancia y el modelo anterior deja de tener validez.

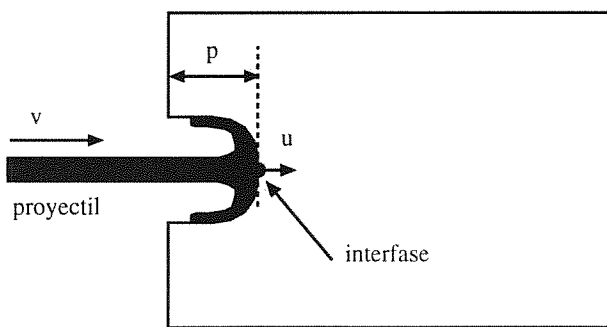


Fig. 3. Modelo "fluid jet penetration".

Impacto a velocidades inferiores a 3000 m/s

Con la intención de resolver la discrepancia observada entre la teoría del "fluid jet penetration" y los resultados experimentales para velocidades de impacto inferiores a los 2500 m/s, Tate (1967) y Alekseevskii (1966) propusieron de forma independiente una modificación de la ecuación de Pack y Evans introduciendo la resistencia del proyectil Y_p y del blanco Y_t . La ecuación de Tate-Alekseevskii queda:

$$\frac{1}{2} \rho_p (v-u)^2 + Y_p = \frac{1}{2} \rho_t u^2 + Y_t \quad (6)$$

La velocidad de penetración u puede obtenerse en cada instante, teniendo en cuenta que el proyectil es ahora decelerado de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Y_p}{\rho_p L} \quad (7)$$

Las ecuaciones (4), (6) y (7) permiten resolver el problema de penetración para velocidades de impacto inferiores a los 3000 m/s proporcionando resultados muy cercanos a los valores experimentales. Aunque el desarrollo del modelo de Tate-Alekseevskii estuvo

asociado a blancos metálicos, numerosos autores lo han utilizado para blancos de cerámicas avanzadas (Bless et al., 1987, Sternberg, 1989, Hohler et al., 1995).

5. PENETRACIÓN EN BLANCOS METÁLICOS DE ESPESOR FINITO

Los dos modelos más empleados para el estudio de placas metálicas sometidas a impacto de proyectiles son los debidos a Averbuch & Bodner (1974) y a Ravid & Bodner (1983).

Modelo de Averbuch & Bodner

Este modelo es unidimensional y considera proyectiles rígidos. El proyectil perfora la placa metálica a una velocidad v , con lo que la posición z de su punta con respecto a la cara anterior de la placa viene dada por la ecuación:

$$v = \frac{dz}{dt} \quad (8)$$

Puesto que el modelo sólo considera desplazamientos en la dirección del impacto y no se admite flujo en dirección radial, se supone que el material del blanco que el proyectil encuentra durante la penetración queda unida a su punta ocupando un volumen nulo de masa finita. La masa m asociada en cada instante al proyectil es, por tanto:

$$m = m_o + \rho_t A z \quad (9)$$

siendo m_o la masa inicial del proyectil, A su sección y ρ_t la densidad de la placa. Las fuerzas resistentes que se oponen a la penetración son F_c , F_t y F_s ; F_c representa la fuerza necesaria para plastificar el material de la placa –proporcional a su límite elástico–, F_t representa la fuerza necesaria para acelerar la masa que se va incorporando al proyectil –proporcional a v^2 – y F_s representa la fuerza tangencial que se opone al deslizamiento entre el proyectil y el blanco. La ecuación del movimiento es:

$$-(F_c + F_t + F_s) = \rho_t A v^2 + (m_o + \rho_t A z) \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

El proceso de penetración se divide en tres etapas distintas (Fig. 4). Durante el primero, el proyectil encuentra exclusivamente las fuerzas que actúan sobre la punta $-F_c$ y F_c , en la segunda fase actúa también la fuerza cortante F_t y en la tercera fase se produce la salida del tapón, por lo que la fuerza sobre la punta desaparecen. El mayor inconveniente del modelo de Averbuch & Bodner está en el tratamiento unidimensional que se hace de un problema claramente bidimensional, con flujo de material en dirección radial. Por otra parte, requiere de un conjunto de parámetros que es necesario calibrar antes de poder utilizar el

modelos. Sin embargo, debido a su gran simplicidad ha sido utilizado ampliamente en el diseño de blindajes.

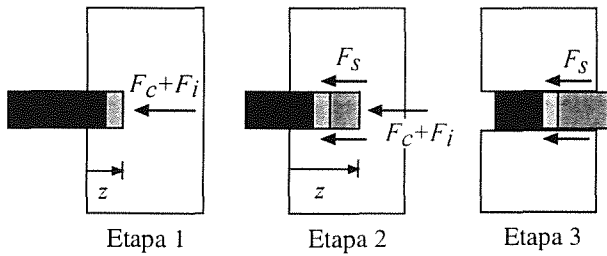


Fig. 4. Etapas del modelo de penetración de Awerbuch & Bodner.

Modelo de Ravid y Bodner

El modelo de Ravid y Bodner contempla un campo de desplazamientos bidimensional del material de blanco en torno al proyectil, que se supone también rígido. El proceso de penetración se considera dividido en cinco etapas que incluyen la formación de un abultamiento en la parte posterior de la placa metálica y la salida final del tapón. Este modelo ofrece resultados muy ajustados a los valores experimentales. Por otra parte, presenta la ventaja frente al modelo de Awerbuch y Bodner de no requerir parámetros empíricos que necesitan calibración.

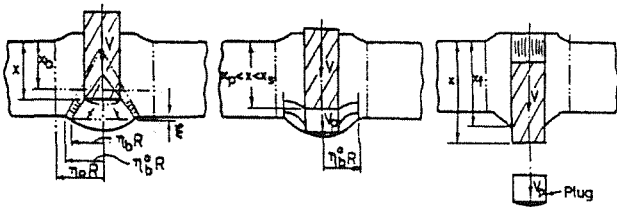


Fig. 5. Etapas finales del modelo de Ravid y Bodner.

6. IMPACTO SOBRE COMPONENTES DE MATERIAL COMPUESTO

En la protección balística de sistemas móviles - vehículos y aeronaves militares o civiles, personal de cuerpos de seguridad- es indispensable reducir al máximo el peso del blindaje. En estos casos se suelen utilizar blindajes de material compuestos de fibra - vidrio, aramida, polietileno- o metales ligeros como el titanio. Si el proyectil tiene un núcleo perforante de acero o wolframio, es habitual además disponer delante de la placa de material compuesto o metálica una capa de losetas de cerámicas avanzadas -alúmina, nitruro de aluminio, carburo de silicio, carburo de boro- con las que se consigue una gran reducción de peso. La modelización se complica entonces por la existencia de

distintos materiales, algunos de ellos con comportamiento anisótropo, con respuestas radicalmente diferentes ante cargas impulsivas.

Modelos para laminados de fibra

Los modelos analíticos de impacto sobre material compuesto de fibras son muy escasos. Se han realizado algunos modelos para laminados de aramida y polietileno. Los más recientes (Navarro et al. 1994, Chocrón et al., 1998, Navarro, 1998) se basan en el estudio de Jameson et al. (1962) sobre el efecto de un impacto transversal sobre una fibra elástica, que da lugar a la transmisión en ella de dos ondas de velocidades diferentes. Una onda longitudinal de tracción que se transmite a la velocidad c_l ;

$$c_l = \sqrt{E_{fibra} / \rho_{fibra}} \tag{11}$$

y otra que se transmite a una velocidad inferior c_t ;

$$c_t = \sqrt{\sigma_{fibra} / \rho_{fibra}} \tag{12}$$

y que produce un desplazamiento en la dirección transversal (Fig. 6). E_{fibra} es el módulo de elasticidad del material de la fibra, ρ_{fibra} su densidad y σ_{fibra} la tensión en la fibra.

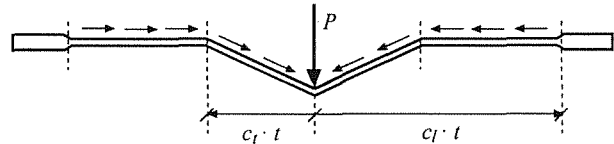


Fig. 6. Deformación en una fibra sometida a una fuerza transversal P .

En los laminados que se emplean en la protección frente a impacto, el comportamiento de cada fibra aislada es mucho más complejo, ya que interaccionan entre sí a través del tejido y de la matriz. La modelización de todos estos fenómenos está aún sin resolver completamente, incluso en el caso de la simulación mediante técnicas numéricas, en las que se dispone muchas más posibilidades para formalizar el problema. En los anteriores modelos analíticos se opta por considerar el laminado como un conjunto de fibras que responden ante el impacto como si estuvieran aisladas, con lo que se simplifica considerablemente el problema. Se propone un campo de desplazamientos bidimensional, deducido del de la Fig. 6, y se calcula la resistencia del laminado ante el impacto como suma de las contribuciones individuales de los hilos, cada uno de

ellos con una deformación diferente. La perforación se alcanza cuando la deformación de las fibras del laminado alcanza un valor límite o cuando el proyectil ha sido capaz de perforar cada una de las láminas. En el trabajo de Navarro (1998) puede encontrarse una revisión de modelos simplificados para materiales compuestos de matriz polimérica y refuerzo de fibras sometidos a impacto.

Modelos para blindajes cerámicos ligeros

La utilización de material cerámico en la protección comenzó a mediados de los años 60. La incorporación de una capa de losetas de cerámica de elevadas propiedades mecánicas tiene un importante efecto erosivo sobre el proyectil. La placa posterior de material compuesto o metálica tiene la misión de contener los fragmentos de material cerámico y absorber la energía cinética del proyectil. El proceso de penetración pasa por diversas etapas (Fig. 7); la primera dura unos pocos microsegundos durante los cuales la loseta cerámica se va fragmentando, creándose un volumen aproximadamente cónico de cerámica fragmentada delante del proyectil. En esta primera etapa la cerámica presenta su máxima resistencia a la penetración y apenas transmite carga a la placa posterior. Finalizada esta etapa, el proyectil comienza a penetrar en la cerámica fragmentada, al tiempo que ésta reparte la carga sobre la placa posterior, que comienza a deformarse. Una vez que el proyectil ha perforado el volumen de cerámica fragmentada, comienza a penetrar en la placa posterior. Si el proyectil queda detenido en alguna de estas fases, el blindaje habrá cumplido su misión; en caso contrario habrá sido perforado.

El primer modelo analítico para diseño de protecciones cerámicas se debe a Florence (1969) para paneles cerámica/metal. En este modelo el proyectil se idealiza como un cilindro rígido que impacta sobre el blindaje. Se admite que la cerámica se fragmenta progresivamente cuando el proyectil choca contra ella formándose un tronco de cono que distribuye la carga sobre la placa metálica. El análisis se plantea en términos energéticos: si la energía cinética del proyectil es superior a la energía que la placa metálica puede absorber por deformación plástica, el proyectil perforará; en caso contrario se producirá la detención del proyectil. Para tratar de forma analítica el problema Florence adopta las siguientes simplificaciones: el diámetro de la zona circular de la placa metálica afectada por el impacto es igual al de la base del cono de cerámica fracturada; el radio de la base del cono es igual al radio del proyectil más el doble del espesor de la loseta cerámica; la placa se modeliza como una membrana circular apoyada en el contorno; la placa rompe cuando la máxima deformación en ella alcanza un valor límite igual a la deformación de rotura uniaxial de la placa; se desprecia la energía consumida en la

fragmentación de la loseta cerámica. Bajo estas hipótesis e igualando la energía cinética del proyectil a la energía absorbida por la placa hasta rotura se obtiene una ecuación que permite obtener la velocidad límite por encima de la cual el proyectil perfora. Las ventajas de este modelo provienen de su simplicidad y la sencillez de cálculo. Sin embargo, no tiene en cuenta el tipo de cerámica –factor esencial en la efectividad del blindaje– y no considera la disipación de energía cinética del proyectil en erosión del proyectil. Con él se obtiene resultados demasiado conservadores, con velocidades límite v_p demasiado bajas.

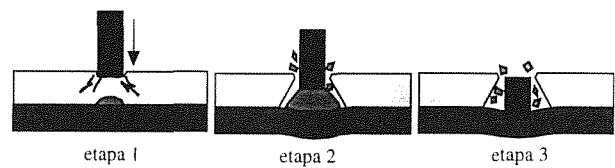


Fig. 7. Etapas del proceso de penetración en un blindaje cerámico.

Con posterioridad se han ido proponiendo otros modelos tanto para cerámica/material compuesto (Navarro et al., 1994, Chocrón et al., 1998) como para cerámica/metal (Woodward, 1990, den Reijer, 1991, Zaera et al., 1998) en los que se plantean una serie de ecuaciones en las que se consideran los procesos físicos esenciales que tienen lugar durante la penetración y que, integradas en el tiempo, permiten obtener la evolución del sistema desde el instante en que el proyectil toma contacto con el blindaje hasta el momento de perforación o parada. Son todos ellos modelos *unidimensionales*, en el sentido de que estudian exclusivamente el movimiento en la dirección del impacto. Cada una de las partes involucradas en el problema -proyectil, cerámica y placa posterior- se estudia por separado. Sobre proyectil y cono de cerámica se plantean las ecuaciones de variación del momento lineal en la dirección del impacto, teniendo en cuenta que ambos sistemas son de masa variable, ya que tanto proyectil como cono de cerámica van perdiendo masa por erosión a medida que la penetración del proyectil avanza. Junto a estas ecuaciones de variación del momento lineal se emplea una ecuación que recoge el fenómeno de erosión en la interfase proyectil-cerámica en función de la diferencia de velocidades entre proyectil y cerámica. En cuanto al estudio de la placa de respaldo, se utilizan modelos de comportamiento de placas sometidas a impacto durante la etapa en la que el proyectil está todavía penetrando en el cono de cerámica fragmentada; una vez que la punta del proyectil alcanza el back-up plate, se utilizan modelos de penetración en placas de espesor.

7. MODELO ANALÍTICO PARA PLACAS CIRCULARES EMPOTRADAS

Los autores han desarrollado recientemente un modelo analítico para la simulación de placas circulares metálicas empotradas sometidas a cargas impulsivas perpendiculares, teniendo en cuenta inercia de traslación, inercia rotatoria, axiles y momentos flectores radial y circunferencial. Para ello se ha partido de la ecuación de balance de potencias

$$\dot{W}_e = \dot{E}_c + \dot{W}_p \tag{13}$$

donde W_e , E_c y w_p representan el trabajo de las fuerzas exteriores sobre la placa, la energía cinética de la placa y el trabajo disipado en deformación plástica de la placa, respectivamente. La determinación de cada uno de los términos de la ecuación (13) puede obtenerse a partir del campo de desplazamientos de la placa, tarea que queda facilitada si este campo se describe en forma modal, como producto de una función del tiempo y una función de la variable espacial. Para ello se ha propuesto un campo de desplazamientos definido por una función de forma $\phi(r)$ que se ajusta a las condiciones de contorno del problema (Fig. 8). Así, el desplazamiento de un punto del plano medio de la placa viene dado por la ecuación

$$u = u_o(t) \phi(r) \tag{14}$$

siendo u_o es el desplazamiento en el eje de la placa.

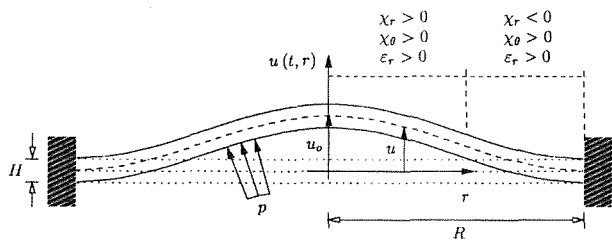


Fig. 8. Campo de desplazamientos de la placa circular en el plano meridiano

Trabajo de las fuerzas exteriores

Admitiendo que la carga exterior se aplica sobre toda la placa y en dirección normal a su superficie, como correspondería al efecto de una explosión en un medio gaseoso o a una sobrepresión en un medio líquido que estuviesen en contacto con ella, la potencia de las fuerzas exteriores puede expresarse

$$\dot{W}_e = 2\pi p \int_0^R \dot{u}_o \phi r dr \tag{15}$$

donde p es la presión exterior considerada uniforme y R el radio de la placa.

Energía cinética

En el cálculo de la energía cinética se han tenido en cuenta los términos de traslación y de rotación. Llamando H al espesor de la placa y ρ a la densidad del metal obtenemos:

$$\dot{E}_c^t = 2\pi \rho H \int_0^R \dot{u}_o \ddot{u}_o \phi^2 r dr \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_c^r &= \pi \rho H^3 \int_0^R \frac{1}{6} \dot{u}_o \ddot{u}_o \frac{\phi^2}{(1+u_o^2 \phi'^2)^2} r dr - \\ &- \pi \rho H^3 \int_0^R \frac{1}{3} u_o \dot{u}_o^3 \frac{\phi^4}{(1+u_o^2 \phi'^2)^3} r dr \end{aligned} \tag{17}$$

La suma de ambos términos permite obtener uno de los sumandos de la ecuación (13).

Trabajo plástico

Se han considerado para el cálculo del trabajo plástico los siguientes esfuerzos -por unidad de ancho-: el momento radial M_r , el momento circunferencial M_θ y el esfuerzo axil N_r . El trabajo plástico debido al esfuerzo cortante puede obviarse en placas con $R/H < 2$ (Jones, 1989) y, dado que los desplazamientos radiales en este tipo de problemas son pequeños (Griffith et al., 1961), puede obviarse también el trabajo realizado por el esfuerzo de membrana en dirección circunferencial. Asociados a los tres esfuerzos considerados aparecen, respectivamente, las siguientes variables geométricas: la curvatura radial χ_r , la curvatura circunferencial χ_θ y la deformación longitudinal del plano medio ϵ_r . Para el cálculo de estas variables pueden emplearse las expresiones dadas por la geometría analítica para superficies de revolución. Dado que se pretenden analizar problemas con desplazamientos del eje de la placa varias veces superiores al espesor H , se han empleado las expresiones completas de las curvaturas principales para una superficie de revolución. Para la potencia plástica debida al esfuerzo axil obtenemos la expresión

$$\dot{W}_p^{\epsilon_r} = 2\pi \int_0^R u_o \dot{u}_o N_r \frac{\phi^2}{(1+u_o^2 \phi'^2)^{1/2}} r dr \tag{18}$$

Para la potencia plástica debida al momento radial $w_p^{\dot{\chi}_r}$ y para la potencia debida al momento circunferencial $w_p^{\dot{\chi}_\theta}$ obtenemos respectivamente

$$\dot{W}_p^{\dot{\chi}_r} = 2\pi \int_0^R M_r (\dot{\chi}_r ds + \dot{\chi}_r ds) r \quad (19)$$

$$\dot{W}_p^{\dot{\chi}_\theta} = 2\pi \int_0^R M_\theta \dot{\chi}_\theta r dr \quad (20)$$

Sumando estos tres términos se obtiene w_p . La ecuación de balance de potencias queda entonces como una ecuación diferencial

$$f(u_o, \dot{u}_o, \ddot{u}_o) = 0 \quad (21)$$

La resolución de esta ecuación, así como la obtención de las diversas integrales presentadas se ha realizado numéricamente.

Cálculo de los esfuerzos

Para el cálculo de los esfuerzos se ha empleado la regla de la normalidad que postula, para un punto determinado de la placa, la proporcionalidad entre el vector $\{\dot{\epsilon}_r, \dot{\chi}_r, \dot{\chi}_\theta\}$ y el vector normal a la superficie de fluencia $\{N_r, M_r, M_\theta\}$. Para ello es necesario obtener un criterio de plastificación acoplado para los tres esfuerzos considerados. Cuando uno de los esfuerzos es nulo es posible obtener un criterio de plastificación para los otros dos esfuerzos considerando distribuciones de tensiones sencillas. Dado que se requiere de un criterio que relacione los tres esfuerzos se ha propuesto a tal efecto la ecuación (22), una superficie elipsoidal que, por ser continua, facilita la aplicación de la regla de la normalidad. Al ser convexa, verifica el principio de estabilidad de Drucker.

$$\left(\frac{N_r}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{M_r}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{M_\theta}{M_p}\right)^2 - \frac{M_r M_\theta}{M_p^2} = 1 \quad (22)$$

La regla de la normalidad proporciona entonces los siguientes valores de los esfuerzos:

$$N_r = \sqrt{3} \frac{N_p^2 \dot{\epsilon}_r}{\sqrt{3N_p^2 \dot{\epsilon}_r^2 + 4M_p^2 (\dot{\chi}_r^2 + \dot{\chi}_\theta^2 + \dot{\chi}_r \dot{\chi}_\theta)}} \quad (23)$$

$$M_r = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{M_p^2 (2\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta)}{\sqrt{3N_p^2 \dot{\epsilon}_r^2 + 4M_p^2 (\dot{\chi}_r^2 + \dot{\chi}_\theta^2 + \dot{\chi}_r \dot{\chi}_\theta)}} \quad (24)$$

$$M_\theta = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{M_p^2 (2\dot{\chi}_\theta + \dot{\chi}_r)}{\sqrt{3N_p^2 \dot{\epsilon}_r^2 + 4M_p^2 (\dot{\chi}_r^2 + \dot{\chi}_\theta^2 + \dot{\chi}_r \dot{\chi}_\theta)}} \quad (25)$$

Validación del modelo

Para la validación del modelo se han utilizado los resultados experimentales obtenidos por Bodner y Symonds (1979) para placas metálicas circulares empotradas sometidas a cargas explosivas. Las placas ensayadas eran acero laminado en caliente (ASTM.A415) y titanio de 99.2% de pureza (Ti-50A). Estos materiales presentan una curva de endurecimiento tipo Cowper-Symonds (ec. 26) siendo $\bar{\sigma}$ y $\dot{\epsilon}$ son la tensión equivalente y la velocidad de deformación plástica equivalente respectivamente. Los datos de cada material vienen dados en la tabla 1.

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_o} = 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right)^n \quad (26)$$

El límite elástico utilizado para la determinación del axil plástico y del momento plástico se obtiene de la anterior ecuación de endurecimiento, adoptando ϵ_r como medida de la velocidad de deformación equivalente para cada punto de la placa. Las dimensiones R y H de las placas figuran también en la tabla 1. La función de forma elegida ha sido la propuesta por Westine and Baker (1974) para placas circulares empotradas

$$\phi(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi r}{R}\right) \quad (27)$$

Para la descripción del pulso de presión provocado por la carga explosiva se ha adoptado una función triangular, propuesta por Biggs (1964)

$$p(t) = p_{max} \left(1 - \frac{t}{t_{load}}\right) \quad (28)$$

donde t_{load} es la duración del pulso y p_{max} es la presión al inicio del pulso. El valor de t_{load} se ha fijado en 10 μs , de acuerdo con la duración del pulso de presión indicado en (Bodner y Symonds, 1979). Fijada la forma del pulso, su duración y el valor del impulso ejercido por la onda de presión sobre la placa se puede obtener el valor de t_{load} . En las figuras 9 y 10 se muestran los resultados del modelo desarrollado comparados con los resultados experimentales, los resultados del modelo de Shen y Jones (1993) y del modelo de Jones (1989), incorporando este último el comportamiento viscoplástico del material según el modelo de Perrone y Badhra (1984). Las gráficas muestran el desplazamiento permanente adimensional en el eje de la placa u_o^{max} en función del impulso adimensional I :

$$I = \frac{\int p dt}{\sqrt{\rho \sigma_o H^2}} \quad (29)$$

Como puede observarse, el modelo desarrollado por los autores proporciona resultados similares a los del modelo de Shen and Jones; ambos modelos dan lugar a un comportamiento más rígido de la placa, especialmente en el caso del acero. Por contra, el modelo de Jones-Perrone da lugar a un comportamiento más flexible.

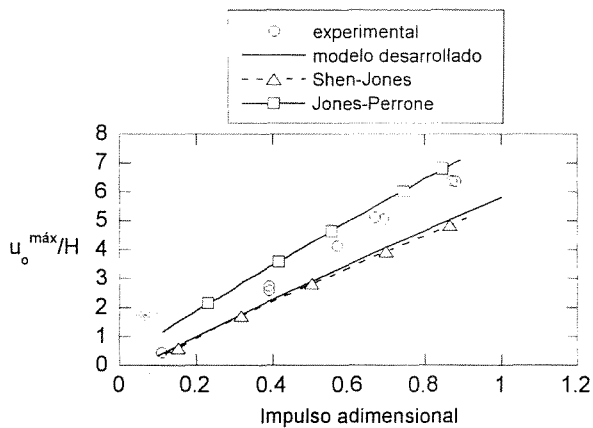


Fig. 9: Validación del modelo con los resultados experimentales para la placa de acero.

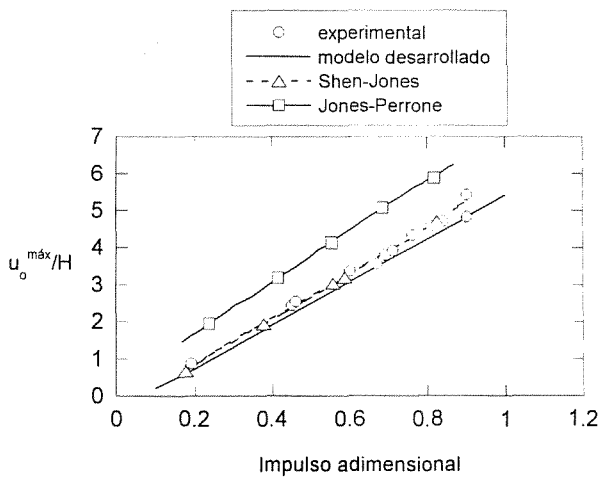


Fig. 10: Validación del modelo con los resultados experimentales para la placa de titanio.

Tabla 1: Propiedades de las placas ensayadas por Bodner y Symonds.

propiedad, dimensiones	Acero ASTM.A415	Ti-A Titanio
R (m)	0.0318	0.0318
H (m)	0.00193	0.00234
ρ (kg/m ³)	7850	4520
σ_o MPa	223	251
$\dot{\epsilon}_o$ (s ⁻¹)	40	120
n	5	9

8. REFERENCIAS

Alekseevskii V. P. (1966) "Penetration of a rod into a target at high velocity", in "Combustion, Explosion and Shock Waves", Faraday Press, USA.

Awerbuch A., Bodner S. R. (1974) "Analysis of the mechanics of perforation of projectiles in metallic plates", Int. J. Solids Struct., 10, 671-684.

Biggs J. M. (1964) "Structural Dynamics", capítulo 7, McGraw-Hill.

Bless S. J., Rosenberg Z., Yoon B. (1967) "Hypervelocity penetration of ceramics", Int. J. Impact Engng, 5, 165-171.

Bodner S. R., Symonds S. (1979) "Experiments on viscoplastic response of circular plates to impulsive loading", J. Mech. Phys. Solids, 27, 91-113.

Calder C. A., Goldsmith W. (1971) "Plastic deformation and perforation of thin plates resulting from projectile impact", Int. J. Solids Structures, 7, 863-881.

Chocron-Benloulo I. S., Sánchez-Gálvez V. (1988) "A New Analytical Model to Simulate Impact onto Ceramic/Composite Armors", Int. J. Impact Engng., 21, 461-471.

den Reijer P. C. (1991) "Impact on ceramic faced armours", Ph. D. Thesis, Delft University of Technology.

Florence A. L. (1969) "Interaction of projectiles and composite armour. Part II", Stanford Research Institute, Menlo Park, California, USA.

Griffith J., Vanzant H. (1961) "Large deformation of circular membranes under static and dynamic loads", 1st. Int. Congress on Experimental Mechanics, New York.

- Hohler V., Stilp A. J., Weber K. (1995) "Hypervelocity penetration of tungsten sinte-alloy rods into alumina", *Int. J. Impact Engng.*, **17**, 409-418.
- Jameson J. W., Stewart G. M., Peterson D. R., Odell F. A. (1962) "Dynamic distribution of strain in textile materials under high-speed impact. Part III: strain-time-position history in yarns", *Textile Res. J.*, 858-860
- Jones N. (1989) "Structural Impact", capítulo 6, Cambridge University Press.
- Navarro C. (1998) "Simplified modelling of the ballistic behaviour of fabrics and fibre-reinforced polymeric matrix composites", *Key Engineering Materials*, **141-143**, 383-400.
- Navarro C., Zaera R., Cortés R., Martínez Casanova M. A. (1994) "The response of ceramic faced lightweight armours under projectile impact", *Structures under Shock and Impact III*, 323-330.
- Pack D. C., Evans W. M. (1951) "Penetration by high velocity jets I and II", *Proc. Phys. Soc.*, 293-303.
- Parkes E. W. (1955) "The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip", *Proc. R. Soc., Series A*, 228.
- Perrone N., Badhra P. (1984) "Simplified large deflection mode solutions for impulsively loaded, viscoplastic, circular mebranes", *J. Appl. Mech.*, **51**, 505-509.
- Ravid M., Bodner S. R. (1983) "Dynamic perforation of viscoplastic plates by rigid projectiles", *Int. J. Engng. Sci.*, **21**, 577-591.
- Shen, W. Q. and Jones, N. Dynamic (1993) "Response and failure of fully clamped circular plates under impulsive loading". *Int. J. Impact Engng.*, **13** (2), 259-278.
- Sternberg J. (1989) "Material properties determining the resistance of ceramics to high velocity penetration", *J. Appl. Phys.*, **65**, 3417-3424.
- Tate (1967) "A theory for the deceleration of long rod after impact", *Jour. Mech. Phys. Solids*, **15**, 387-399.
- Westine, P. S. and Baker W. E (1974) "Energy solutions for predicting deformation in blast loaded structures. In Proc. 19th Explosive Safety Seminar, 849-879, Florida.
- Woodward R. L. (1990), "A simple one-dimensional approach to modelling ceramic composite armour defeat", *Int. J. Impact Engng.*, **9**, 455-474, 1990.
- Zaera R., Sánchez-Gálvez V. (1998) "Analytical modelling of normal and oblique ballistic impact on ceramic/metal lightweight armours", *Int. J. Impact Engng.*, **21**, 133-148.
- Zukas J. A., Nicholas T., Swift H. F., Greszczuk L. B., Curran D. R. (1982) "Impact Dynamics", John Wiley & Sons, New York.