

ALGUNOS PROBLEMAS DE FRACTURA EN ELASTICIDAD ANISÓTROPA

C. Blanco¹, J.M. Martínez Esnaola¹, J.M. Bastero¹ y C. Atkinson²

(1) Centro de Estudios e Investigaciones Técnicas de Gipuzkoa (CEIT),
P. Manuel Lardizábal 15, 20018 San Sebastián, y
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Navarra,
P. Manuel Lardizábal 13, 20018 San Sebastián

(2) Department of Mathematics, Imperial College of Science, Technology and Medicine,
Huxley Building, 180 Queen's Gate, London SW7 2BZ, UK

Resumen. Se presenta la resolución de varios problemas de fractura, para el caso general de anisotropía elástica, mediante la formulación de Stroh y la técnica de dislocaciones. Se obtiene la solución fundamental para una dislocación situada en el recubrimiento de un material semi-infinito, que se utiliza para la modelización de grietas en el recubrimiento como distribuciones continuas de dichas dislocaciones. Imponiendo la condición de tracciones nulas sobre los labios de la grieta se obtiene un sistema de ecuaciones integrales singulares del tipo de Cauchy, que se resuelve mediante fórmulas de inversión adecuadas y métodos numéricos. Se analiza, así mismo, una grieta acodada en un medio anisótropo infinito. Para ello, se desarrolla un método para el análisis del tipo de singularidad de las tensiones en el codo, que se utiliza para representar la densidad de dislocaciones de forma adecuada. El sistema de ecuaciones integrales obtenido se resuelve mediante el teorema de reciprocidad y desarrollos en serie de polinomios de Chebyshev de primera especie. En ambos casos, los factores de intensidad de tensiones en los extremos de la grieta se obtienen directamente de la densidad de dislocaciones. Cuando la grieta es acodada se obtiene también el factor de intensidad de tensiones generalizado, que caracteriza la magnitud de las tensiones singulares en las proximidades del vértice.

Abstract. Several problems of fracture mechanics in anisotropic elastic bodies are solved using the Stroh's formalism together with the dislocation technique. Firstly, the fundamental solution for a dislocation located in the coating of a semi-infinite material is obtained. A coating crack is then modelled by means of continuous distributions of these dislocations. The resulting system of singular integral equations, which is obtained by imposing that the crack surface is traction-free, is solved using the appropriate inversion formulae and numerical methods. A kinked crack in an infinite anisotropic material is also considered. First, the stress singularity at the kink vertex is obtained; this is used to define the precise form of the singular dislocation density at the apex. The resulting system of singular integral equations is solved numerically using Chebyshev polynomials and the reciprocal theorem. The stress intensity factors at the crack tips and the generalised stress intensity factor at the kink vertex are directly obtained from the dislocation densities.

1. INTRODUCCIÓN

La formulación de Stroh (1958) ha demostrado ser una herramienta potente y elegante para el análisis de problemas bidimensionales de fractura elástica en materiales anisótropos. Como ejemplos de problemas resueltos analíticamente mediante esta formulación se pueden citar, entre otros, el de un medio infinito con una línea de inclusión (Li y Ting, 1989), con grietas colineales (Hwu, 1991) o con una inclusión elíptica (Hwu y Ting, 1989); grietas colineales a lo largo de la intercara de un bimaternal (Suo, 1990), etc.

Aunque la formulación de Stroh está desarrollada, en principio, para problemas estáticos, se puede extender sin grandes modificaciones a problemas dinámicos (Chadwick y Smith, 1977). Así mismo, Wu (1998) desarrolló una generalización de dicha formulación para

problemas tridimensionales que ha ampliado considerablemente su campo de aplicación.

Stroh, basándose en el trabajo de Eshelby et al. (1953) demostró que, cuando los campos de desplazamientos y tensiones son independientes de una de las coordenadas cartesianas (por ejemplo, x_3), dichos campos pueden expresarse mediante funciones arbitrarias de una combinación lineal de x_1 y x_2 del siguiente modo

$$u_k = \sum_{\alpha=1}^3 A_{k\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C. \quad (1)$$

donde C.C. denota el complejo conjugado de la expresión precedente,

$$z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2, \quad (2)$$

p_α y \bar{p}_α son tres pares de raíces conjugadas de la ecuación característica

$$\det(c_{i1k1} + p(c_{i1k2} + c_{i2k1}) + p^2 c_{i2k2}) = 0 \quad (3)$$

donde c_{ijkl} es el tensor de rigidez elástico. Por último, $A_{k\alpha}$ son los correspondientes autovectores.

De este modo, los campos de tensiones vienen dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma_{i1} &= -\sum_{\alpha} L_{i\alpha} p_{\alpha} f'_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C. \\ \sigma_{i2} &= \sum_{\alpha} L_{i\alpha} f'_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C. \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$L_{i\alpha} = A_{k\alpha}(c_{i2k1} + p_{\alpha} c_{i2k2}). \quad (5)$$

La tensión σ_{33} se puede deducir fácilmente de la expresión para los desplazamientos.

En la ecuación (5), así como en el resto de este artículo, se aplica el convenio de la suma para los subíndices latinos repetidos. Las sumas extendidas a subíndices griegos, como α en la ecuación (4), se entenderán en el rango $\alpha = 1, 2, 3$.

Según lo establecido anteriormente, la resolución de cada problema concreto se reduce a determinar las funciones f_{α} adecuadas para que se verifiquen las condiciones de contorno del problema.

Utilizando esta formulación, se analizan en este artículo varios problemas de fractura en materiales anisótropos. En primer lugar, se obtiene la solución elástica para una dislocación situada en el recubrimiento de un material semi-infinito (sección 2). Esta solución se utiliza en la sección 3 como solución fundamental para la modelización de una grieta situada en el recubrimiento de un material semi-infinito. La sección 4 se dedica a la modelización de una grieta acodada situada en un material anisótropo infinito, previo análisis del tipo de singularidad de las tensiones en las proximidades del codo. Finalmente, se recogen en la sección 5 algunos de los resultados obtenidos para cada uno de los problemas resueltos.

Con el fin de facilitar al lector el seguimiento del desarrollo analítico, en las secciones 2, 3 y 4 se han expresado las ecuaciones de modo compacto, recogiendo en el Apéndice 1 las expresiones para las funciones o constantes que aparecen en dichas

ecuaciones. Así mismo, se proporcionan las referencias en las que pueden encontrarse los desarrollos algebraicos que aquí se omiten.

2. SOLUCIÓN PARA UNA DISLOCACIÓN SITUADA EN EL RECUBRIMIENTO DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO

2.1. Dislocación en un medio infinito

Stroh (1958) resolvió el problema de una dislocación situada en un medio anisótropo infinito. Dado que en este caso los desplazamientos presentan discontinuidad a lo largo de una semirrecta, la función logaritmo complejo resulta adecuada para la definición de dicho campo. Así pues, denotando con (a_1, a_2) las coordenadas del punto en el que se sitúa la dislocación, la solución obtenida para los desplazamientos resulta ser

$$u_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} A_{k\alpha} M_{\alpha j} d_j \ln(z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}) + C.C. \quad (6)$$

donde

$$\zeta_{\alpha} = a_1 + p_{\alpha} a_2, \quad (7)$$

$M_{\alpha j}$ es la matriz inversa de la matriz $L_{i\alpha}$ definida en la ecuación (5) y d_j está relacionado con el vector de Burgers (cf. Apéndice 1).

2.2. Dislocación en un bimaternal infinito

Atkinson y Eftaxiopoulos (1988) resolvieron el problema de una dislocación en un bimaternal infinito, obteniendo para el medio que contiene la dislocación la siguiente solución para los desplazamientos

$$u_k^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} A_{k\alpha}^{(1)} d_j \left\{ M_{\alpha j}^{(1)} \ln(z_{\alpha}^{(1)} - \zeta_{\alpha}^{(1)}) + \sum_{\beta} E_{\beta\alpha j} \log(z_{\alpha}^{(1)} - \bar{\zeta}_{\beta}^{(1)}) \right\} + C.C. \quad (8)$$

donde $E_{\beta\alpha j}$ depende de las constantes elásticas de ambos materiales (cf. Apéndice 1), y el superíndice 1 denota el medio en el que se encuentra la dislocación. De la expresión para los desplazamientos y teniendo en cuenta la ecuación (4), se obtiene el siguiente campo de tensiones

$$\sigma_{k1}^{(1)} = \frac{-1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha}^{(1)} p_{\alpha} d_j \left\{ M_{\alpha j}^{(1)} \frac{1}{z_{\alpha}^{(1)} - \zeta_{\alpha}^{(1)}} + \sum_{\beta} E_{\beta\alpha j} \frac{1}{z_{\alpha}^{(1)} - \bar{\zeta}_{\beta}^{(1)}} \right\} + C.C. \quad (9a)$$

$$\sigma_{k2}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha}^{(1)} d_j \left\{ M_{\alpha j}^{(1)} \frac{1}{z_{\alpha}^{(1)} - \zeta_{\alpha}^{(1)}} + \sum_{\beta} E_{\beta\alpha j} \frac{1}{z_{\alpha}^{(1)} - \bar{\zeta}_{\beta}^{(1)}} \right\} + C.C. \quad (9b)$$

Nótese que el campo obtenido es singular en el punto (a_1, a_2) donde está situada la dislocación, con singularidad del tipo r^{-1} siendo

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}. \quad (10)$$

2.3. Solución para una dislocación en el recubrimiento

Se considera ahora una dislocación situada en el recubrimiento de un medio semi-infinito, siendo ambos materiales anisótropos. Los campos elásticos correspondientes a este problema se obtienen añadiendo a la solución de Atkinson y Eftaxiopoulos, dada por las ecuaciones (8) y (9), un campo corrector que satisfaga las siguientes condiciones:

- (a) Las tracciones sobre el plano correspondiente a la superficie libre del recubrimiento deben ser opuestas a las tracciones, sobre dicho plano, resultantes de la solución para la dislocación en el bimaternal infinito.
- (b) Continuidad de tracciones y desplazamientos en el plano de la intercara.
- (c) Condiciones de regularidad en el infinito.

De este modo, al sumar el campo corrector a la solución para la dislocación en el bimaternal infinito, se sigue verificando la condición de continuidad en la intercara, y el plano correspondiente a la superficie del recubrimiento resulta libre de tracciones.

Se toma un sistema de referencia de manera que la intercara entre ambos materiales corresponda al plano $x_2 = 0$ y la superficie libre del recubrimiento al plano $x_2 = 1$, como se muestra en la Fig. 1.

El campo corrector de desplazamientos (que denotamos v_k) se determina utilizando la transformada de Fourier respecto de la variable x_1 , esto es,

$$V_k(\varepsilon, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon x_1} v_k(x_1, x_2) dx_1. \quad (11)$$

Considerando una solución de la forma

$$V_k(\varepsilon, x_2) = A_k(\varepsilon) e^{-i\varepsilon p} \quad (12)$$

e imponiendo que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio transformadas, se obtiene la ecuación

$$(c_{ilk1} + p(c_{ilk2} + c_{i2k1}) + p^2 c_{i2k2}) A_k(\varepsilon) = 0. \quad (13)$$

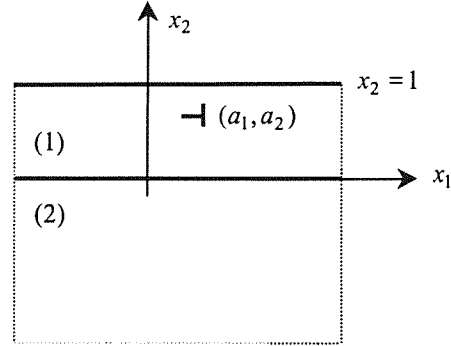


Fig. 1. Dislocación en el recubrimiento de un material semi-infinito: sistema de coordenadas.

Por ser de la misma forma que la obtenida en el trabajo de Stroh (véase la ecuación (3)), se obtienen también tres pares de complejos conjugados, p_{α} y \bar{p}_{α} , y los correspondientes autovectores son proporcionales a los obtenidos por Stroh. Así pues,

$$V_k^{(r)}(\varepsilon, x_2) = \sum_{\alpha} A_k^{(r)} C_{\alpha}^{(r)}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon p_{\alpha}^{(r)}} + \sum_{\alpha} \bar{A}_k^{(r)} D_{\alpha}^{(r)}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon \bar{p}_{\alpha}^{(r)}} \quad (r = 1, 2) \quad (14)$$

con $C_{\alpha}^{(r)}(\varepsilon)$ y $D_{\alpha}^{(r)}(\varepsilon)$ funciones complejas que se determinan imponiendo las condiciones de contorno. Una vez obtenidas estas funciones, aplicando el teorema de inversión para la transformada de Fourier, la solución para el campo corrector correspondiente al recubrimiento resulta ser la siguiente

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} A_{k\alpha}^{(1)} d_j \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} R_{\alpha}^{-1}(\varepsilon) \Phi_{ij}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon a_2^{(1)}} d\varepsilon + \sum_{\beta} W_{\beta\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \bar{R}_{\beta}^{-1}(\varepsilon) \bar{\Phi}_{ij}(\varepsilon) e^{i\varepsilon a_2^{(1)}} d\varepsilon \right\} + C.C. \quad (15)$$

Las constantes $W_{\beta\alpha}$ y las funciones $R_{\alpha i}(\varepsilon)$ y $\Phi_{ij}(\varepsilon)$ dependen de las constantes elásticas de ambos materiales (cf. Apéndice 1). Para el campo corrector de tensiones se tiene

$$s_{k1}^{(1)} = \frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha}^{(1)} P_{\alpha} d_j \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} R_{\alpha}^{-1}(\varepsilon) \Phi_{ij}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon z_{\alpha}^{(1)}} d\varepsilon \\ - \sum_{\beta} W_{\beta\alpha} \int_0^{\infty} \bar{R}_{\beta}^{-1}(\varepsilon) \bar{\Phi}_{ij}(\varepsilon) e^{i\varepsilon z_{\alpha}^{(1)}} d\varepsilon \end{array} \right\} + C.C. \quad (16)$$

$$s_{k2}^{(1)} = \frac{-i}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha}^{(1)} d_j \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} R_{\alpha}^{-1}(\varepsilon) \Phi_{ij}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon z_{\alpha}^{(1)}} d\varepsilon \\ + \sum_{\beta} W_{\beta\alpha} \int_0^{\infty} \bar{R}_{\beta}^{-1}(\varepsilon) \bar{\Phi}_{ij}(\varepsilon) e^{i\varepsilon z_{\alpha}^{(1)}} d\varepsilon \end{array} \right\} + C.C.$$

El análisis detallado de la obtención del campo corrector se puede encontrar en Blanco (1997).

Añadiendo el campo corrector a la solución de Atkinson y Eftaxiopoulos, se obtiene la solución para la dislocación en el recubrimiento.

3. MODELIZACIÓN DE UNA GRIETA RECTA EN EL RECUBRIMIENTO

En esta sección, se estudia la perturbación en los campos elásticos originada por la presencia de una grieta en el recubrimiento. Para ello, se aplica el principio de superposición, de modo que el problema a resolver es el de una grieta en el recubrimiento con tracciones en los labios opuestas a las producidas por el esfuerzo exterior en un medio sin agrietar en el plano correspondiente a la grieta.

Se analizan las tres posiciones de la grieta en el recubrimiento representadas en la Fig. 2: (a) grieta interna paralela a la intercara, (b) grieta interna formando un ángulo arbitrario con la intercara, y (c) grieta superficial.

Para los tres casos, se considera la grieta como una distribución continua de dislocaciones en el recubrimiento. De este modo, las condiciones de contorno de la intercara y la superficie libre se verifican automáticamente y solamente hay que imponer que los labios de la grieta estén libres de tracciones.

En el caso de la grieta paralela a la intercara, la grieta se considera situada en el plano $x_2 = l$, con $0 < l < 1$, y centrada respecto del eje de ordenadas, como se muestra en la Fig. 3.

Se define como densidad de dislocaciones la función

$$d_j'(t) = \frac{d}{dt} d_j(t) \quad (17)$$

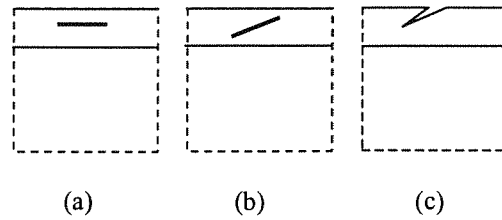


Fig. 2. Posiciones de la grieta en el recubrimiento.

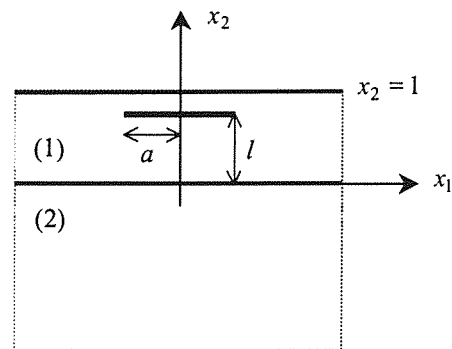


Fig. 3. Grieta en el recubrimiento paralela a la intercara.

Sumando las ecuaciones (9) y (16), sustituyendo d_j por $d_j'(t)dt$ e integrando entre los valores $t = -a$ y $t = a$ se obtienen las tensiones debidas a la distribución de dislocaciones. Las tracciones en los labios de la grieta se pueden expresar de modo compacto como sigue

$$\sigma_{k2}(x_1, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{d_k'(t)}{x_1 - t} dt + \int_{-a}^a d_j'(t) F_{kj}(x_1, t) dt \quad (18)$$

$(-a < x_1 < a)$

donde $F_{kj}(x_1, t)$ son funciones que no presentan singularidades en su dominio de definición (cf. Apéndice 1).

Imponiendo la condición de que las tracciones sobre los labios de la grieta anulen las generadas por los esfuerzos exteriores cuando se considera el medio sin agrietar (que se denotarán t_{k2}), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones integrales singulares de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{b_k(t')}{x - t'} dt' = \int_{-1}^1 b_j(t') G_{kj}(x, t') dt' + t_{k2}(x) \quad (19)$$

$(-1 < x < 1)$

con

$$\begin{aligned} x_1 &= ax \\ t &= at' \\ b_k(t') &= d'_k(t) \\ G_{kj}(x, t') &= F_{kj}(x_1, t) \end{aligned} \quad (20)$$

Para la resolución del sistema (19), teniendo en cuenta que la solución deseada debe ser singular en los extremos de la grieta, se utiliza la fórmula de inversión (Muskhelishvili, 1953)

$$\begin{aligned} b_k(t') &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-t'^2}} C_k \\ &+ \frac{2}{\pi\sqrt{1-t'^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-t'} \left[\int_{-1}^1 b_j(s) G_{kj}(x, s) ds + t_{k2}(x) \right] dx \end{aligned} \quad (21)$$

donde C_k son constantes de integración que se determinan imponiendo que la grieta sea cerrada, es decir,

$$\int_{-1}^1 b_k(t') dt' = 0. \quad (22)$$

La función $b_k(t')$ a determinar será singular en los extremos $t' = \pm 1$, por lo que se puede expresar

$$b_k(t') = \frac{B_k(t')}{\sqrt{1-t'^2}} \quad (23)$$

donde $B_k(t')$ es una función acotada en el intervalo $[-1, 1]$. Sustituyendo (23) en (21) y (22), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones integrales de Fredholm

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} B_k(t') &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-t'} \left[\int_{-1}^1 \frac{B_j(s)}{\sqrt{1-s^2}} G_{kj}(x, s) ds + t_{k2}(x) \right] dx \\ &+ C_k \\ \int_{-1}^1 \frac{B_j(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

que se resuelve numéricamente.

Mediante esta formulación, los factores de intensidad de tensiones (FIT) se obtienen de modo explícito en función de los valores que toma la distribución de dislocaciones en los extremos de la grieta. Definiendo

$$K_{\eta(i)}(\pm a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi r} \sigma_{i2}(\pm a \pm r, 0) \quad (25)$$

con $\eta(1) = II$, $\eta(2) = I$ y $\eta(3) = III$, se obtiene

$$K_{\eta(i)}(\pm a) = -\frac{\sqrt{\pi a}}{2} B_i(\pm 1). \quad (26)$$

El análisis del caso en el que la grieta forma un ángulo arbitrario con la intercara del bimaternal, es paralelo al caso desarrollado, por lo que se omite aquí por brevedad. Cuando la grieta es superficial se procede de modo análogo a excepción de la fórmula de inversión utilizada para la resolución del sistema de ecuaciones integrales. En este caso, las tensiones solamente son singulares en un extremo de la grieta por lo que la fórmula de inversión adecuada es

$$\begin{aligned} b_k(t') &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{1}{x-t'} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left[\int_{-1}^1 b_j(s) G_{kj}(x, s) ds + t_{k2}(x) \right] dx \end{aligned} \quad (27)$$

y la expresión correspondiente para la densidad de dislocaciones es

$$b_k(t') = \frac{B_k(t')}{\sqrt{1+t'}} \quad (28)$$

El análisis detallado de los casos (b) y (c) de la Fig. 2 se puede encontrar en Blanco et al. (1995).

4. MODELIZACIÓN DE UNA GRIETA ACODADA EN UN MEDIO ANISÓTROP O INFINITO

Se considera en esta sección una grieta acodada situada en un material anisótrop o infinito. El interés de este problema radica en el hecho de que la propagación de una grieta puede no producirse en su mismo plano (en particular, en el caso de modos mixtos de carga y materiales anisótropos), sino que puede tomar otra dirección dando lugar a un acodamiento.

En las proximidades del vértice de la grieta acodada, las tensiones presentan una singularidad del tipo $r^{-\lambda}$, con $0 < \lambda < 0.5$, siendo r la distancia radial al vértice. En el caso de un material isotróp o, el valor de λ depende únicamente del ángulo formado por el plano en el que yace la grieta principal y el de la rama (Atkinson et al., 1988; Sih y Ho, 1991; Williams, 1952). Sin embargo, en materiales anisótropos, el tipo de singularidad depende además de las constantes elásticas del material. Bogy (1972), Heinzlmann et al. (1994) y Busch et al. (1994) desarrollaron análisis asintóticos para entallas en materiales ortótropos en los que se muestra ya dicha dependencia.

En los modelos de grieta acodada desarrollados hasta el momento, la singularidad de las tensiones en el codo se trata de diversos modos. En algunos casos no se tiene en cuenta la singularidad (Lo, 1978; Vitek, 1977) mientras que en otros se considera la singularidad en el codo de la misma naturaleza que la de la punta de la grieta, es decir, del tipo $r^{-1/2}$ (Karihaloo et al., 1980).

A continuación se analiza la singularidad de las tensiones en las proximidades del codo en el caso general de anisotropía elástica, para tenerla en cuenta explícitamente en la modelización de la grieta acodada.

4.1. Análisis de la singularidad en el codo

Se toma un sistema de coordenadas en el cual $x_2 = 0$ corresponde al plano en el que yace la grieta principal, el vértice se encuentra en el origen de coordenadas y la rama forma con el eje x_1 un ángulo ϕ , como se muestra en la Fig. 4.

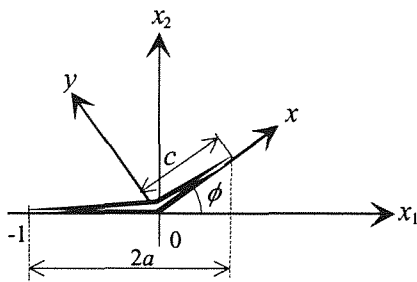


Fig. 4. Grieta acodada: sistemas de coordenadas.

De nuevo se utiliza la formulación de Stroh para la modelización de la grieta. En este caso, la solución fundamental utilizada es la obtenida por Stroh para una dislocación en un medio infinito.

La expresión para la densidad de dislocaciones se determina teniendo en cuenta que las tensiones son singulares en los extremos de la grieta –con singularidad del tipo $r^{-1/2}$ – y también en el vértice, con una singularidad más débil, del tipo $r^{-\lambda}$ ($0 < \lambda < 0.5$), pero todavía desconocida. Así pues, se eligen las funciones

$$f_j(\zeta) = \frac{D_j(\zeta)}{\sqrt{(1+\zeta)(c-\zeta)}} + \frac{F_j(\zeta)}{(-\zeta)^\lambda} \quad (-1 < \zeta < 0)$$

$$g_j(\eta) = \frac{D_j(\eta)}{\sqrt{(1+\eta)(c-\eta)}} + \frac{G_j(\eta)}{\eta^\lambda} \quad (0 < \eta < c)$$

(29)

donde $D_j(\zeta)$, $F_j(\zeta)$ y $G_j(\eta)$ son funciones acotadas en los intervalos $[-1,c]$, $[-1,0]$ y $[0,c]$, respectivamente.

En este caso las ecuaciones integrales que se obtienen al imponer que los labios de la grieta estén libres de tracciones son

$$-t_k(x_1) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} M_{\alpha j} \int_{-1}^0 \frac{f_j(\zeta)}{x_1 - \zeta} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} M_{\alpha j} \int_0^c \frac{g_j(\eta)}{x_1 - \eta \tau_{\alpha}} d\eta + C.C. \quad (30a)$$

$(-1 < x_1 < 0)$

$$-t'_k(x) = \frac{l_{ki}}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} M_{\alpha j} \tau_{\alpha} \int_{-1}^0 \frac{f_j(\zeta)}{x \tau_{\alpha} - \zeta} d\zeta$$

$$+ \frac{l_{ki}}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} M_{\alpha j} \tau_{\alpha} \int_0^c \frac{g_j(\eta)}{x \tau_{\alpha} - \eta \tau_{\alpha}} d\eta + C.C. \quad (30b)$$

$(0 < x < c)$

siendo l_{ki} la matriz del cambio de coordenadas y

$$\tau_{\alpha} = \cos \phi + p_{\alpha} \sin \phi. \quad (31)$$

Tras extender las ecuaciones (30a) y (30b) a las semirrectas $x_1 < 0$ y $x > 0$, respectivamente, se aplica la transformada de Mellin obteniendo el siguiente sistema funcional de incógnitas $\hat{f}_j(s)$ y $\hat{g}_j(s)$ (Blanco et al., 1998a)

$$T_k(s) = \frac{1}{2} \cot(\pi s) \hat{f}_k(s) - \frac{1}{2} \csc(\pi s) H_{kj}(s-1) \hat{g}_j(s)$$

$$T'_k(s) = \frac{l_{ki}}{2} \csc(\pi s) H_{ij}(1-s) \hat{f}_j(s) - \frac{l_{ki}}{2} \cot(\pi s) \hat{g}_j(s) \quad (32)$$

$(0 < \text{Re}(s) < 1)$

donde

$$\hat{f}_j(s) = \int_0^1 f_j(-\zeta) \zeta^{s-1} d\zeta$$

$$\hat{g}_j(s) = \int_0^c g_j(\zeta) \zeta^{s-1} d\zeta \quad (33)$$

$$H_{ij}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha} L_{i\alpha} M_{\alpha j} \tau_{\alpha}^z + \sum_{\alpha} \bar{L}_{i\alpha} \bar{M}_{\alpha j} \bar{\tau}_{\alpha}^z \right\} \quad (34)$$

y las funciones $T_k(s)$ y $T'_k(s)$ son las transformadas de Mellin de las tensiones $t_k(x_1)$ y $t'_k(x)$, es decir,

$$T_k(s) = \int_0^{\infty} x_1^{s-1} t_k(x_1) ds, \quad T'_k(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} t'_k(x) ds. \quad (35)$$

La solución del sistema (32) se puede expresar en forma matricial como

$$F(s) = M^{-1}(s)T(s) \quad (36)$$

con

$$F(s) = \begin{pmatrix} \hat{f}_j(s) \\ \hat{g}_j(s) \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{kj}}{2} \cot(\pi s) & -\frac{1}{2} \csc(\pi s) H_{kj}(s-1) \\ \frac{l_{ki}}{2} \csc(\pi s) H_{ij}(1-s) & -\frac{l_{kj}}{2} \cot(\pi s) \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} T_k(s) \\ T'_k(s) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Las matrices $M(s)$ y $T(s)$ son analíticas en la franja $0 < \text{Re}(s) < 1$, sin embargo la matriz incógnita $F(s)$ es analítica en el semiplano $\text{Re}(s) > \lambda$. Esto implica que la matriz $M(s)$ tiene una singularidad en un punto s_0 con $\text{Re}(s_0) = \lambda$, es decir, el parámetro λ que caracteriza la singularidad de tensiones dominante es la raíz de mayor parte real de la ecuación

$$\det M(s) = 0. \quad (40)$$

De acuerdo con (38), la ecuación (40) depende del ángulo de acodamiento y de las constantes del material a través de las funciones H_{ij} . Por tanto, a diferencia del caso isótropo, en el que el tipo de singularidad en el codo depende solamente del ángulo de acodamiento, en el caso de un material anisótropo, la singularidad de las tensiones en el codo se ve afectada también por las propiedades elásticas del material.

Nótese que este método es igualmente aplicable al caso de una entalla aguda, ya que se está considerando la singularidad de las tensiones locales en el vértice, que no resultan afectadas por la singularidad originada en los extremos de la grieta.

4.2. Modelización de la grieta acodada

Como en los casos anteriores, se utiliza el modelo de dislocaciones para el análisis de la grieta acodada.

De acuerdo con el sistema de referencia considerado (Fig. 4), se toma la siguiente parametrización de la trayectoria de la grieta

$$\begin{aligned} x_1(r) &= \begin{cases} r & -1 \leq r \leq 0 \\ r \cos \phi & 0 < r \leq c \end{cases} \\ x_2(r) &= \begin{cases} 0 & -1 \leq r \leq 0 \\ r \sin \phi & 0 < r \leq c. \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Aunque no se ha demostrado analíticamente, se ha comprobado para distintos materiales y ángulos de acodamiento que la matriz $M(\lambda)$ tiene rango cinco. Así pues, el autovector correspondiente al autovalor λ está determinado salvo una constante. Llamando V al vector cuya primera componente es la unidad, se toma como densidad de dislocaciones (ver ecuación (29))

$$d_j(r) = \begin{cases} \frac{D_j(r)}{\sqrt{(1+r)(c-r)}} + Av_j \frac{1}{(-r)^\lambda} & -1 < r < 0 \\ \frac{D_j(r)}{\sqrt{(1+r)(c-r)}} + Av_{j+3} \frac{1}{r^\lambda} & 0 < r < c \end{cases} \quad (42)$$

siendo A una constante a determinar.

Imponiendo que los labios de la grieta estén libres de tracciones y que la grieta sea cerrada, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} -t_i(r) &= \\ & \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha} M_{\alpha j} \Omega_{\alpha}(r) \int_{-1}^c \frac{((1+\rho)(c-\rho))^{-1/2} D_j(\rho)}{z_{\alpha}(r) - z_{\alpha}(\rho)} d\rho \\ & + \frac{A}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha} M_{\alpha j} \Omega_{\alpha}(r) \left\{ \begin{aligned} & v_j \int_{-1}^0 \frac{(-\rho)^{-\lambda}}{z_{\alpha}(r) - \rho} d\rho \\ & + v_{j+3} \int_0^c \frac{\rho^{-\lambda}}{z_{\alpha}(r) - \rho \tau_{\alpha}} d\rho \end{aligned} \right\} + C.C. \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^c (1+\rho)^{-1/2} (c-\rho)^{-1/2} D_j(\rho) d\rho \\ & + A \left\{ v_j \int_{-1}^0 (-\rho)^{-\lambda} d\rho + v_{j+3} \int_0^c \rho^{-\lambda} d\rho \right\} = 0 \end{aligned} \quad (43b)$$

con

$$z_{\alpha}(r) = x_1(r) + p_{\alpha} x_2(r) \quad (44)$$

$$\Omega_{\alpha}(r) = \frac{dx_1}{dr} + p_{\alpha} \frac{dx_2}{dr}. \quad (45)$$

En este caso, además de las funciones $D_j(r)$, se tiene como incógnita la constante A , por lo que se precisa una ecuación adicional que se obtiene aplicando el teorema de reciprocidad.

4.2.1. Aplicación del teorema de reciprocidad

El teorema de reciprocidad en elasticidad lineal y ausencia de fuerzas de volumen establece, en condiciones de equilibrio, la igualdad de integrales de superficie

$$\int_S \sigma_{kj} \hat{u}_k dS_j = \int_S \hat{\sigma}_{kj} u_k dS_j \quad (46)$$

donde $\hat{\sigma}_{kj}$ y \hat{u}_k son los llamados campos duales, que deben verificar las ecuaciones de equilibrio y las mismas ecuaciones constitutivas que los campos reales, y S es una superficie cerrada que no contiene singularidades.

Mediante este teorema los campos de tensiones singulares en las proximidades del vértice se pueden determinar mediante el campo de tensiones remoto (Atkinson et al., 1988; Bastero et al., 1989).

En el caso que aquí se considera, al ser los campos de desplazamientos y tensiones independientes de la coordenada x_3 , la ecuación (46) adquiere la forma

$$\int_C \sigma_k \hat{u}_k dl = \int_C \hat{\sigma}_k u_k dl \quad (47)$$

con $\sigma_k = \sigma_{kj} n_j$ y $\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_{kj} n_j$, siendo C un contorno cerrado simple.

Se puede demostrar que $s = \lambda - 2$ también es una solución de la ecuación (40) y que la matriz $\mathbf{M}(\lambda - 2)$ tiene rango cinco. Sea \mathbf{W} el correspondiente autovector con la unidad como primera componente. Se toma como campo dual de tensiones el inducido por la densidad de dislocaciones definida por

$$\hat{d}_j(r) = \begin{cases} w_j (-r)^{\lambda-2} & -\infty < r < 0 \\ w_{j+3} r^{\lambda-2} & 0 < r < \infty \end{cases} \quad (48)$$

a lo largo de las líneas de la grieta y de la rama, respectivamente.

Utilizando de nuevo la formulación de Stroh, las expresiones resultantes para las tensiones duales correspondientes son

$$\hat{\sigma}_{i1} = -\sum_{\alpha} L_{i\alpha} p_{\alpha} \hat{f}'_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C. \quad (49)$$

$$\hat{\sigma}_{i2} = \sum_{\alpha} L_{i\alpha} \hat{f}'_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C.$$

con

$$\hat{f}'_{\alpha}(z_{\alpha}) = \frac{1}{4\pi} M_{\alpha j} \left[\begin{array}{l} w_j \int_{-\infty}^0 \frac{(-r)^{\lambda-2}}{z_{\alpha} - r} dr \\ + w_{j+3} \int_0^{\infty} \frac{r^{\lambda-2}}{z_{\alpha} - \tau_{\alpha} r} dr \end{array} \right]. \quad (50)$$

Los desplazamientos correspondientes vienen dados por

$$\hat{u}_k = \sum_{\alpha} A_{k\alpha} \hat{f}'_{\alpha}(z_{\alpha}) + C.C. \quad (51)$$

Como contorno de integración se toma el mostrado en la Fig. 5, con $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$. Se puede probar (Blanco et al., 1998b) que las tracciones duales sobre las semirrectas L_1 y L_2 y el arco γ_R ($R \rightarrow \infty$) son nulas, así como los desplazamientos duales sobre γ_R ($R \rightarrow \infty$). Así pues, en este caso, el teorema de reciprocidad se puede expresar

$$\int_{L_1} \sigma_k \hat{u}_k dl + \int_{\gamma_{\varepsilon}} \sigma_k \hat{u}_k dl + \int_{L_2} \sigma_k \hat{u}_k dl = \int_{\gamma_{\varepsilon}} \hat{\sigma}_k u_k dl. \quad (52)$$

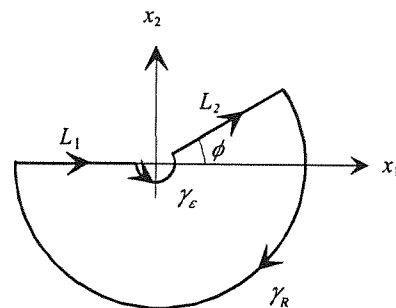


Fig. 5. Contorno de integración para la aplicación del teorema de reciprocidad.

Evaluando las integrales de contorno, se obtiene una nueva ecuación que, junto con el sistema (43), permite determinar las funciones $D_j(r)$ y la constante A . La obtención de esta ecuación no presenta ninguna dificultad, sin embargo, es muy laboriosa por lo que aquí se omite. Para un análisis detallado, véase Blanco et al. (1998b).

4.2.2. Integración numérica del sistema de ecuaciones integrales

En este caso, el sistema de ecuaciones integrales se ha resuelto numéricamente mediante polinomios de

Chebyshev (Erdogan, 1969). Para ello, es conveniente normalizar la trayectoria de la grieta aplicando un cambio de variables adecuado en las ecuaciones (43) y (52), de modo que la densidad de dislocaciones resulta ser

$$b_j(t) = \begin{cases} \frac{B_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} + Av_j(-t)^{-\lambda} & -1 < t < 0 \\ \frac{B_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} + Av_{j+3}t^{-\lambda} & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (53)$$

Las funciones incógnita $B_j(t)$ se aproximan mediante una serie truncada de polinomios de Chebyshev de primera especie, $T_n(t)$, cuyas funciones de peso asociadas son precisamente $(1-t^2)^{-1/2}$. Así pues, expresando

$$B_j(t) = \sum_{n=0}^N B_{jn} T_n(t), \quad (54)$$

sustituyendo en el sistema de ecuaciones integrales y operando convenientemente se obtiene un sistema algebraico cuyas incógnitas son las constantes B_{jn} y A (Blanco et al., 1998b).

Los factores de intensidad de tensiones se obtienen directamente mediante las expresiones

$$K_{\eta(i)} = \frac{-1}{2} \sqrt{(1+c)} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^N (-1)^n B_{in} \quad (55)$$

para el extremo de la grieta principal y

$$K_{\eta(i)} = \frac{l_{ki}}{2} \sqrt{(1+c)} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^N B_{kn} \quad (56)$$

para el extremo de la rama.

Tomando coordenadas polares (ε, θ) con polo en el codo de la grieta y x_1 como eje polar, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ las tensiones se pueden expresar en la forma

$$\sigma_k(\varepsilon, \theta) = A \varepsilon^{-\lambda} \bar{\sigma}_k(\theta) \quad (57)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k(\theta) = & \frac{1}{4} \csc(\pi\lambda) \sum_{\alpha} L_{k\alpha} M_{\alpha j} \frac{-\text{sen } \theta + p_{\alpha} \cos \theta}{\tau_{\alpha}(\theta)^{\lambda}} \\ & \times \left\{ v_j - v_{j+3} \frac{(-1)^{-\lambda}}{\tau_{\alpha}^{1-\lambda}} d\rho \right\} + C.C. \end{aligned} \quad (58)$$

y

$$\tau_{\alpha}(\theta) = \cos \theta + p_{\alpha} \text{sen } \theta. \quad (59)$$

La constante A , que llamamos factor de intensidad de tensiones generalizado por caracterizar las tensiones en los puntos infinitamente próximos al vértice de la grieta, queda totalmente determinada mediante este modelo.

5. RESULTADOS

En esta sección, se recogen algunos de los resultados obtenidos para cada uno de los problemas considerados.

Los resultados de la Fig. 6 corresponden a una grieta en el recubrimiento paralela a la intercara del bimaternal. La semilongitud de la grieta es constante, $a = 0.75$, mientras que la distancia a la intercara, l , es variable (obsérvese que se trata de magnitudes normalizadas, al haber tomado un espesor unidad para el recubrimiento). Los materiales tomados para el recubrimiento y material base son dos materiales monoclínicos: tartrato de dipotasio $-K_2(C_4H_4O)\frac{1}{2}H_2O-$ y tiosulfato de sodio $-Na_2S_2O-$, respectivamente. Las constantes elásticas de ambos materiales pueden encontrarse en Blanco et al. (1994). Los labios de la grieta están sometidos a tracción uniforme, σ , y los factores de intensidad de tensiones se presentan normalizados con respecto a su correspondiente valor en un medio infinito, esto es, $F_i = K_i / \sigma \sqrt{\pi a}$. Nótese que, por simetría, se verifican las relaciones: $K_I(-a) = K_I(a)$, $K_{II}(-a) = -K_{II}(a)$ y $K_{III}(-a) = -K_{III}(a)$.

Los factores de intensidad de tensiones en el extremo de una grieta superficial de tamaño $2a = 0.5$ con orientación variable respecto de la intercara se muestran en la Fig. 7. Los labios de la grieta están sometidos a tracción uniforme, σ . Los factores de intensidad de tensiones se presentan normalizados con respecto a los correspondientes a la grieta superficial en un medio semi-infinito, esto es, $F_i = K_i / \sigma \sqrt{2\pi a}$.

En Blanco et al. (1994, 1995) se pueden encontrar más resultados referentes a la grieta en el recubrimiento en cualquiera de las tres posiciones respecto de la intercara.

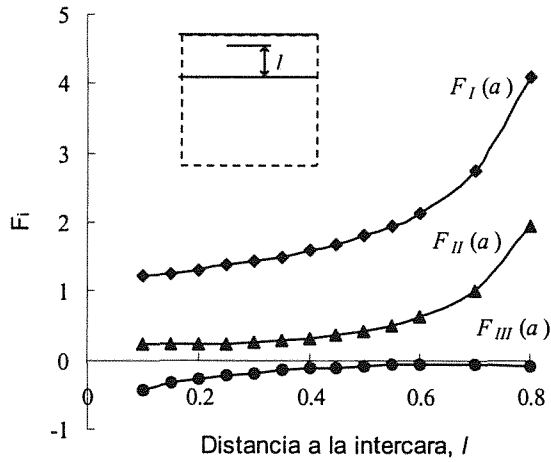


Fig. 6. Grieta en el recubrimiento paralela a la intercara ($a = 0.75$). Variación de los factores de intensidad de tensiones con la distancia a la intercara.

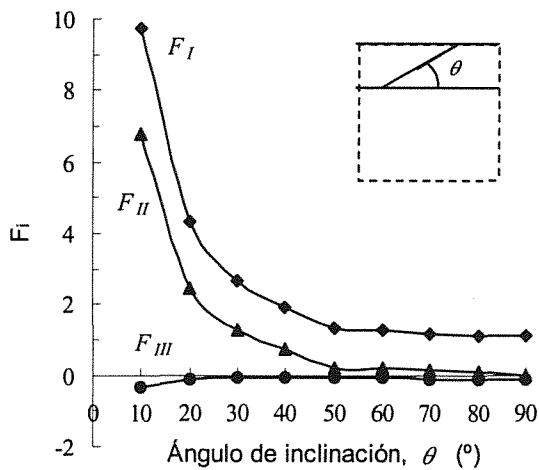


Fig. 7. Grieta superficial en el recubrimiento ($2a = 0.5$). Variación de los factores de intensidad de tensiones con la inclinación de la grieta.

Finalmente, se presentan también algunos resultados correspondientes a la grieta acodada.

Como se ha demostrado en la sección 4, en el caso anisótropo, el exponente λ que caracteriza la singularidad de las tensiones en la punta de una entalla (o en el codo de una grieta acodada) depende del ángulo de la entalla y de las constantes elásticas del material. En la Tabla 1 se recogen los valores de λ dados por Atkinson et al. (1988) para el caso isótropo y los obtenidos mediante el presente análisis para el caso anisótropo. *MS* denota un materiales ortótropo (silice monocristalina), y *EDT* uno monoclinico (tartrato de

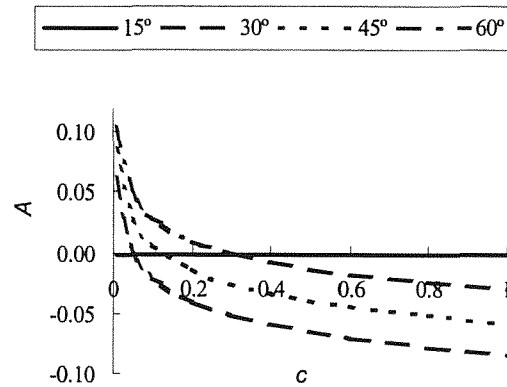
etileno $-C_2H_6N_2H_2C_4H_4O_6-$ (Huntington, 1958). *AN* es un material anisótropo no real: se han definido sus constantes elásticas tomando una matriz simétrica y definido-positiva arbitraria (Apéndice 2). Nótese que en el caso $\phi = 0^\circ$ se trata de una grieta recta; el valor $\lambda = 0$ obtenido es coherente con la ausencia de singularidad. El otro caso límite se da cuando $\phi = 180^\circ$ en el cual la posición del vértice corresponde al extremo de una grieta por lo que se obtiene el valor esperado $\lambda = 0.5$.

Tabla 1. Valores de λ para distintos materiales y ángulos de entalla

ϕ (°)	Material			
	Isótropo*	EDT	MS	AN
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.1813	0.2393	0.1652	0.2400
40	0.3028	0.3238	0.2938	0.3688
60	0.3842	0.3725	0.3824	0.4272
80	0.4371	0.4220	0.4407	0.4545
100	0.4696	0.4639	0.4712	0.4709
120	0.4877	0.4861	0.4884	0.4829
140	0.4965	0.4954	0.4968	0.4924
160	0.4995	0.4992	0.4996	0.4986
180	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

(*) Atkinson et al. (1988)

En la Fig. 8 se ha representado el factor de intensidad de tensiones generalizado para diferentes condiciones de carga remota y para varios ángulos de inclinación de la rama, al variar su longitud (siendo la longitud de la grieta principal la unidad). Los valores se dan normalizados respecto de $\sigma\sqrt{\pi}$.



(a)

Fig. 8. (pie en página siguiente).

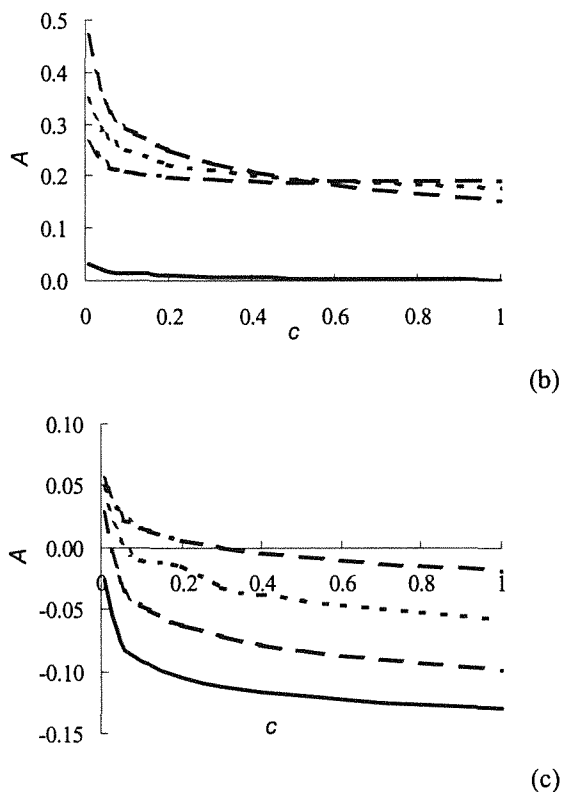


Fig. 8. Factor de intensidad de tensiones generalizado en función de la longitud de la rama, para varios ángulos de inclinación: (a) tracción en el infinito perpendicular a la grieta principal; cortadura en el infinito respecto de la grieta principal; (c) tensión antiplana en el infinito.

6. CONCLUSIONES

Este artículo ha pretendido mostrar el potencial del formalismo de Stroh y la técnica de dislocaciones para la resolución de algunos problemas de fractura en elasticidad anisótropa general, mediante una combinación de técnicas analíticas y numéricas.

Se ha resuelto el problema de una dislocación situada en el recubrimiento de un sustrato semi-infinito. Tomando este resultado como solución fundamental, se ha modelizado una grieta situada en el recubrimiento como una distribución continua de dichas dislocaciones. Se ha analizado tanto el caso de grieta interna como superficial, con orientación arbitraria respecto de la intercara del bimaternal. Los factores de intensidad de tensiones se expresan directamente en función de los valores que toma la densidad de dislocaciones en los extremos de la grieta.

Se ha desarrollado un método para calcular el tipo de singularidad que presentan las tensiones en las proximidades del vértice de una grieta acodada. Se ha demostrado que, en el caso general de anisotropía elástica, la singularidad depende tanto del ángulo de

acodamiento como de las constantes elásticas del material, y se ha obtenido la ecuación característica que proporciona la magnitud de dicha singularidad.

Se ha modelizado una grieta acodada situada en un material anisótropo. En el modelo se tiene en cuenta la singularidad de las tensiones tanto en los extremos de la grieta como en el codo. Se han determinado los factores de intensidad de tensiones en los extremos de la grieta así como el factor de intensidad de tensiones generalizado que caracteriza las tensiones en las proximidades del vértice de la grieta acodada.

REFERENCIAS

- Atkinson, C., Bastero, J.M. and Martínez Esnaola, J.M. (1988) "Stress analysis in sharp angular notches using auxiliary fields", *Engng. Fracture Mech.*, **31**, 637-646.
- Atkinson, C. and Eftaxiopoulos, D.A. (1988) "Interaction between a crack and a free or welded boundary in media with arbitrary anisotropy" *Int. J. Fracture Mech.*, **31**, 637-646.
- Bastero, J.M., Atkinson, C. and Martínez Esnaola, J.M. (1989) "Use of path-independent integral A for mixed-mode fast crack propagation in uncoupled thermoelastic media", *Engng. Fracture Mech.*, **34**, 325-335.
- Blanco, C., Martínez Esnaola, J.M. y Bastero, J.M. (1994) "Interacción grieta-intercara en materiales recubiertos con anisotropía elástica general", *Anales de Mecánica de la Fractura*, **11**, 68-74.
- Blanco, C., Martínez Esnaola, J.M., Atkinson, C. and Bastero, J.M. (1995) "Coating cracks in materials with general anisotropy", *Int. J. Fracture*, **71**, 99-130.
- Blanco, C. (1997) "Modelos de dislocaciones para grietas en recubrimientos y para grietas acodadas en el caso general de anisotropía elástica". Tesis Doctoral. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Navarra, San Sebastián.
- Blanco, C., Martínez Esnaola, J.M. and Atkinson, C. (1998a) "Analysis of sharp angular notches in anisotropic materials", *Int. J. Fracture*, **93**, 373-386.
- Blanco, C., Martínez Esnaola, J.M. and Atkinson, C. (1998b) "Kinked cracks in anisotropic elastic materials". *Int. J. Fracture*, **93**, 387-407.
- Bogy, D.B. (1972) "The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading", *J. Appl. Mech.*, **39**, 1103-1109.
- Busch, M., Heinzelmann, M. and Maschke, H.G. (1994) "A cohesive zone model for the failure assessment of V-

notches in micromechanical components”, Int. J. Fracture, **69**, R15-R21.

Chadwick, P. and Smith, G.D. (1977) “Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials”, Advances in Appl. Mech., **17**, 303-376.

Erdogan, F. (1969) “Approximate solution of systems of singular integral equations”. SIAM. J. Appl. Math., **17**, 1041-1059.

Eshelby, J.D., Read, W.T. and Schockley, W. (1953) “Anisotropic elasticity with applications to dislocations theory”, Acta Metall., **1**, 251-259.

Heinzelmann, M., Kuna, M. and Busch, M. (1994) “FEM and BEM analyses of notch stress intensity factors in anisotropic materials”, ECF 10 - Structural Integrity: Experiments, Models and Applications, Vol. 1, K-H. Schwalbe and C. Berger (Eds.), EMAS, Warley (UK), 329-334.

Huntington, H.B (1958) Solid State Physics, Vol. 7, F. Seitz and Turubull (Eds.), Academic Press, New York, 214-351.

Hwu, C. (1991) “Colinear cracks in anisotropic bodies” Int. J. Fracture, **52**, 239-256.

Hwu, C. and Ting, T.C.T. (1989) “Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solids with an elliptic inclusion”, Q. J. Mech. Appl. Math., **42**, 553-572.

Karihaloo, B.L., Keer, L.M. and Nemat-Nasser, S. (1980) “Crack kinking under nonsymmetric loading”, Engng. Fracture Mech., **13**, 879-888.

Li, Q. and Ting, T.C.T. (1989) “Line inclusions in anisotropic elastic solids”, J. Appl. Mech., **56**, 556-567

Lo, K.K. (1978) “Analysis of branched cracks”, J. Appl. Mech., **45**, 797-802.

Muskhelishvili, N.I. (1953) Singular Integral Equations. Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Sih, G.C. and Ho, J.W. (1991) “Sharp notch fracture strength characterised by critical energy density”, Theor. Appl. Fracture Mech., **16**, 179-214.

Stroh, A.N. (1958) “Dislocations and cracks in anisotropic elasticity”, Phil. Mag., **3**, 625-646.

Suo, Z. (1990) “Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media”, Proc. Royal Soc. London, A **427**, 331-358.

Vitek, V. (1977) “Plane strain stress intensity factors for branched cracks”, Int. J. Fracture, **13**, 481-501.

Williams, M.L. (1952) “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension”, J. Appl. Mech., **19**, 526-528.

Wu, K.-C. (1998) “Generalization of the Stroh formalism to 3-dimensional anisotropic elasticity”, J. Elasticity, **51**, 213-225.

APÉNDICE 1

En este apéndice se recogen las expresiones de las constantes y funciones incluidas en las ecuaciones a lo largo del texto.

Ref. ecuación (6)

Denotando con b_k el vector de Burgers de la dislocación, se define el vector d_j de manera que verifique la relación

$$b_k = B_{kj} d_j \quad (\text{A.1})$$

con

$$B_{kj} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (A_{k\alpha} M_{\alpha j} - \bar{A}_{k\alpha} \bar{M}_{\alpha j}). \quad (\text{A.2})$$

Ref. ecuación (8)

$$\bar{E}_{\beta\alpha j} = J_{\beta kj} F_{k\alpha}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

con

$$J_{\beta kj} = (A_{k\beta}^{(1)} - D_{ki}^{(2)} L_{i\beta}^{(1)}) M_{\beta}^{(1)} \quad (\text{A.4})$$

$$F_{\alpha k} = D_{ki}^{(2)} \bar{L}_{i\alpha}^{(1)} - \bar{A}_{k\alpha} \quad (\text{A.5})$$

$$D_{ki}^{(2)} = \sum_{\alpha} A_{k\alpha}^{(2)} M_{\alpha i}^{(2)}. \quad (\text{A.6})$$

Ref. ecuación (15)

$$\bar{W}_{\alpha\beta} = F_{k\beta}^{-1} (A_{k\alpha}^{(1)} - D_{kj}^{(2)} L_{i\alpha}^{(1)}) \quad (\text{A.7})$$

$$R_{i\alpha}(\varepsilon) = L_{i\alpha}^{(1)} e^{-i\varphi_{\alpha}^{(1)}} + \sum_{\beta} \bar{L}_{i\beta}^{(1)} \bar{W}_{\alpha\beta} e^{-i\bar{\varphi}_{\beta}^{(1)}} \quad (\text{A.8})$$

$$\Phi_{ij}(\varepsilon) = \sum_{\alpha} \bar{L}_{i\alpha}^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{\alpha j}^{(1)} e^{-i\varepsilon(\bar{p}_{\alpha}^{(1)} - \zeta_{\alpha}^{(1)})} \\ + \sum_{\beta} \bar{W}_{\beta\alpha} M_{\beta}^{(1)} e^{-i\varepsilon(\bar{p}_{\alpha}^{(1)} - \zeta_{\beta}^{(1)})} \end{array} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Ref. ecuación (18)

$$\begin{aligned}
 F_{kj}(x_1, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} \sum_{\beta} E_{\beta\alpha j} \frac{1}{x-t + I(p_{\alpha} - \bar{p}_{\beta})} \\
 &- \frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} \int_0^{\infty} R_{\alpha i}^{-1}(\varepsilon) \Phi_{ij}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon(t+p_{\alpha}l)} d\varepsilon \\
 &- \frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{k\alpha} \sum_{\beta} W_{\beta\alpha} \int_0^{\infty} \bar{R}_{\beta}^{-1}(\varepsilon) \bar{\Phi}_{ij}(\varepsilon) e^{i\varepsilon(t+p_{\alpha}l)} d\varepsilon \\
 &+ C.C.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

APÉNDICE 2

Matriz de rigidez para el material anisótropo *AN*
(unidades arbitrarias):

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} 20.3 & -3.1 & 1.6 & -1. & 4. & 0.8 \\ & 4. & 20. & 1.5 & 2. & -0.1 \\ & & 150.5 & 2. & 10. & 6.2 \\ & & & 1.75 & 1.7 & 5.7 \\ & \text{sym} & & & 9.5 & 4.1 \\ & & & & & 222.2 \end{bmatrix}$$