

**IMPLANTACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO DE LA INTEGRAL J  
SOBRE UN DOMINIO**

**Carlos Cueto-Felgueroso García**

**Integridad de Componentes  
Tecnatom S.A.**

**Avda. Montes de Oca 1  
28709 San Sebastián de los Reyes (Madrid)**

**Resumen.** En esta comunicación se presenta una implantación del Método de la Integral sobre un Dominio (Domain Integral Approach), para el cálculo de la integral J. El método ha sido programado en una serie de subrutinas del programa ANSYS de Elementos Finitos y utilizando su lenguaje interno de programación APDL. De esta manera, la integral J puede ser calculada post-procesando los resultados de un cálculo tensional desde el propio programa. También se analizan los resultados de su aplicación a casos concretos, incluyendo comparaciones con los resultados obtenidos por otros métodos a esos mismos casos.

**Abstract.** This paper presents an implementation of the Domain Integral Approach for the evaluation of J-integral. The method has been programmed in a set of subroutines of ANSYS general purpose finite element code, and written in its own programming language APDL. This way, the J-integral can be evaluated by postprocessing the stress analysis results. In the paper are also analyzed the results of the application of the method to representative cases, including comparisons with results obtained for the same cases by other available methods.

**1. INTRODUCCIÓN**

En un campo bidimensional, la integral J se define por medio de una integral de línea. En el contexto de un cálculo por el Método de los Elementos Finitos, es preferible realizar la integración sobre un área, lo que no es sino una extensión natural de las integraciones que se realizan sobre cada elemento finito durante la generación de la matriz del elemento.

**2. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL J**

En un sólido elástico no-lineal, bidimensional, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y despreciando las fuerzas de volumen, la integral J puede definirse como:

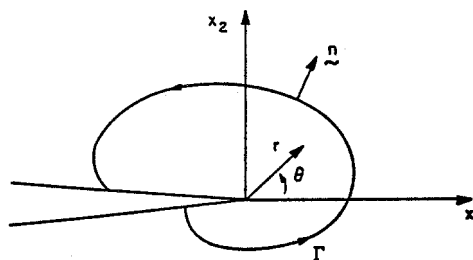
$$J = \int_{\Gamma} \left[ W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] ds \tag{1}$$

Donde:

$\Gamma$  es un contorno cualquiera que rodea al vértice de la grieta, recorrido en sentido antihorario desde la cara inferior de la grieta hasta la superior (Figura 1).

- $n_i$  es la normal a  $\Gamma$  hacia el exterior.
- $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones.
- $u_j$  es el vector de desplazamientos.
- $ds$  es el incremento de arco a lo largo de  $\Gamma$ .
- $W$  es la densidad de energía de deformación, definida como

$$W(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \tag{2}$$



**Fig. 1.** Coordenadas en el vértice de la grieta.

**3. EXPRESIÓN DE LA INTEGRAL DE DOMINIO EN DOS DIMENSIONES**

Considérese una región anular  $A$  alrededor del vértice de una grieta (Figura 2). La ecuación (1) puede escribirse en la siguiente forma:

$$J = - \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{li} \right] n_i ds \quad (3)$$

donde el símbolo  $\delta_{ij}$  representa la delta de Kroneker.

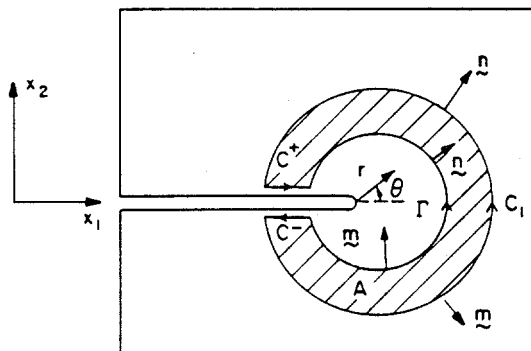


Fig. 2. Región anular A y contornos asociados.

Sean  $C = C_1 + C^+ - \Gamma + C^-$  el contorno cerrado que rodea la región  $A$  y  $\mathbf{m}$  la normal hacia el exterior de  $C$ . Por tanto,  $\mathbf{m} = -\mathbf{n}$  en  $\Gamma$  y  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  en  $C_1$ . Teniendo en cuenta dichas definiciones, la ecuación (3) se transforma en la siguiente [1-2]:

$$J = \int_C \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{li} \right] m_i q_1 ds - \int_{C^+ + C^-} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} m_i q_1 ds \quad (4)$$

donde  $q_1$  es una función suficientemente continua en  $A$ , que es igual a la unidad en  $\Gamma$  y se anula en  $C_1$ .

Nótese que en las caras de la grieta ( $C^+ + C^-$ ),  $m_1 = 0$  y  $m_2 = \pm 1$ . Por tanto, el segundo término de (4) puede expresarse como

$$- \int_{C^+ + C^-} t_j u_{j,1} q_1 ds \quad (5)$$

Obviamente, este término se anula cuando no actúan tracciones sobre las caras de la grieta.

Aplicando en (4) el teorema de la divergencia a la integral sobre el contorno cerrado  $C$ , y substituyendo (5) se obtiene:

$$J = \int_A \left[ (\sigma_{ij} u_{j,1} - W \delta_{li}) q_1 \right]_{,i} dA - \int_{C^+ + C^-} t_j u_{j,1} q_1 ds \quad (6)$$

**4. INCLUSIÓN DE LAS TENSIONES DE ORIGEN TÉRMICO Y DE LAS FUERZAS DE VOLUMEN**

Si sobre la estructura actúan tensiones de origen térmico, las deformaciones totales pueden expresarse como la suma de una parte elástica  $\epsilon_{ij}^e$ , una parte plástica  $\epsilon_{ij}^p$  y una parte térmica.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (7)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica y  $\theta$  es la temperatura por encima de la de referencia.

En este caso, la energía de deformación mecánica se define de la siguiente forma [2]:

$$W(\epsilon_{ij}, \theta) = \int_0^{\epsilon_{ij}^m} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^m \quad (8)$$

donde

$$\epsilon_{ij}^m = \epsilon_{ij} - \alpha \theta \delta_{ij} \quad (9)$$

son las deformaciones mecánicas.

De las ecuaciones anteriores, y aplicando la regla de derivación en cadena, se deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^m} \frac{\partial \epsilon_{ij}^m}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^m}{\partial x_1} = \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} - \alpha \sigma_{kk} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \alpha \sigma_{kk} \theta_{,1} \end{aligned} \quad (10)$$

Por otra parte, invocando la condición de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (11)$$

y substituyendo (7), (10) y (11) en (6) se obtiene la expresión buscada de la integral  $J$

$$\begin{aligned} J &= \int_A \left\{ \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{li} \right] \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right\} dA + \\ &+ \int_A \left[ \alpha \sigma_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - f_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] q_1 dA - \\ &- \int_{C^+ + C^-} t_j u_{j,1} q_1 ds \end{aligned} \quad (12)$$

Debe señalarse que en presencia de deformaciones térmicas, fuerzas de volumen y/o tracciones en las caras de la grieta, el dominio  $A$  debe contener el vértice de la grieta ( $r \rightarrow 0^+$ , Figura 2) [3]. Por el contrario, cuando no están presentes, la ecuación (12) se reduce a

$$J = \int_A \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{li} \right] \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (13)$$

que coincide con la expresión dada por deLorenzi [4].

La función  $q_1$  puede interpretarse como la imposición a los puntos sobre la línea  $\Gamma$  de un desplazamiento unitario en la dirección  $x_1$  mientras los puntos sobre la línea  $C_1$  permanecen fijos. Por tanto, este método de cálculo de la integral  $J$  se asemeja a una técnica de extensión virtual de la grieta.

La ecuación (12) permite evaluar la integral  $J$  como una integral de área en la región  $A$  que puede llevarse a cabo por medio de los mismos procedimientos de integración aplicados en la obtención de las matrices de rigidez del Método de los Elementos Finitos. Análogamente, la contribución de las tracciones en las caras de la grieta puede evaluarse aplicando los procedimientos habituales de integración para presiones en dicho método. En definitiva, esta formulación es una extensión natural del Método de los Elementos Finitos.

En el contexto de un cálculo por elementos finitos,  $\Gamma$  es normalmente el arco formado por el vértice y las caras de la grieta. Haciendo que  $C_1$  coincida con el contorno de diferentes regiones que rodeen el vértice de la grieta, la integral  $J$  puede calcularse en dominios distintos, y de la misma manera que la integral  $J$  definida por la ecuación (1) es independiente del camino de integración, la calculada por (12) es independiente del dominio de integración.

**5. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LA INTEGRAL SOBRE UN DOMINIO**

**5.1 Coordenadas y funciones**

En el interior de los elementos finitos isoparamétricos, las coordenadas  $x_1, x_2$  y los desplazamientos  $u_1, u_2$  se expresan de la siguiente forma

$$x_i = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) X_{iI} \tag{14a}$$

$$u_i = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) U_{iI} \tag{14b}$$

siendo

- $n$  el número de nodos del elemento.
- $X_{iI}$  las coordenadas  $x_i$  de los nodos.
- $U_{iI}$  los desplazamientos  $u_i$  de los nodos.
- $N_I(\xi, \eta)$  las funciones de forma del elemento.
- $\xi, \eta$  las coordenadas paramétricas del elemento.

Las derivadas de los desplazamientos  $u_i$  en un elemento se calculan aplicando la regla de derivación en cadena:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial N_I}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} U_{iI} \tag{15}$$

donde  $\partial \xi_k / \partial x_j$  es la matriz inversa del Jacobiano de la transformación de coordenadas (14a).

Análogamente, la función  $q_1$  puede expresarse como

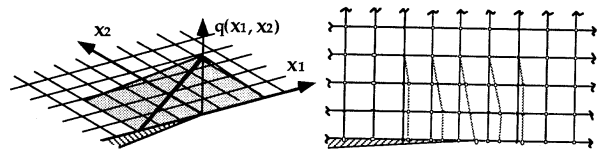
$$q_1 = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) Q_{1I} \tag{16}$$

siendo  $Q_{1I}$  los valores de  $q_1$  en los nodos.

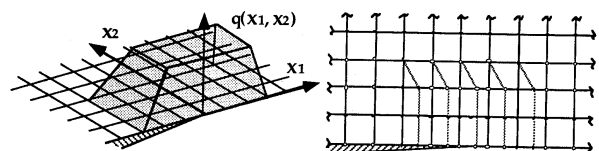
El gradiente de  $q_1$  en un elemento se calcula aplicando el mismo método de derivación que a los desplazamientos.

La función  $q_1$  debe ser especificada en todos los nodos dentro del dominio de integración. La forma de esta función es arbitraria, si bien debe tener los valores correctos en los contornos (en este caso en las curvas  $C_1, \Gamma$  y las caras de la grieta).

Las figuras 3a y 3b representan dos ejemplos de funciones  $q_1$  comúnmente empleadas en problemas bidimensionales [2]. La función tipo pirámide es igual a la unidad en el vértice de la grieta, se anula en el contorno exterior del dominio de integración y varía linealmente a cero en todas las direcciones. La función meseta es igual a la unidad en toda la región de integración excepto en el contorno exterior del dominio. Como se verá en el apartado siguiente, los valores calculados de la integral  $J$  son relativamente insensibles a la forma de la función  $q_1$ .



**Fig. 3a.** Función pirámide.



**Fig. 3b.** Función meseta.

**5.2. Funciones de forma**

Las funciones de forma para el cuadrilátero isoparamétrico de segundo orden (8 nodos) son las siguientes:

- nodos de esquina

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_I)(1 + \eta \eta_I - 1) \tag{17a}$$

- nodos intermedios

$$N_I = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_I) \quad \xi_I = 0 \tag{17b}$$

$$N_I = \frac{1}{2}(1 - \xi \xi_I)(1 + \eta^2) \quad \eta_I = 0 \tag{17c}$$

En la Mecánica de la Fractura se utilizan también elementos triangulares, en particular para modelizar la

primera fila de elementos en torno al vértice de la grieta. Aunque pueden obtenerse elementos triangulares colapsando en un elemento cuadrilátero dos nodos de esquina contiguos, no se consigue así reproducir de manera adecuada la singularidad en torno a la grieta. Para ello deben utilizarse elementos triangulares genuinos, en los cuales las funciones de forma se definen en función de las coordenadas de área  $L_1$  (Figura 4), donde  $L_1$  es igual a la fracción de área. Para el elemento triangular de segundo orden (6 nodos), dichas funciones son las siguientes:

- nodos de esquina  
 $N_I = (2L_I - 1)L_I$  (18a)

- nodos intermedios  
 $N_I = 4L_J L_K$  donde  $I \neq J, K$  (18b)

Las coordenadas de área no son independientes entre sí, ya que en cualquier punto del elemento su suma ha de ser igual a la unidad. Para sortear esta dificultad se definen dos variables independientes como sigue:

$$\begin{aligned} \xi &= L_1 \\ \eta &= L_2 \\ 1 - \eta - \xi &= L_3 \end{aligned} \quad (19)$$

Tras efectuar la sustitución de variables, las subsiguientes operaciones son entonces análogas a las del elemento cuadrilátero.

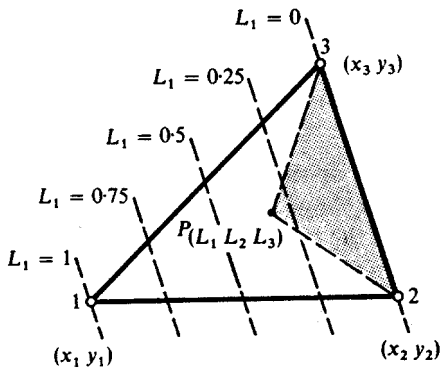


Fig. 4. Coordenadas de área.

5.3. Integración numérica

En el contexto de un cálculo por el Método de los Elementos Finitos, la ecuación (12) puede evaluarse de forma numérica como el sumatorio extendido a todos los elementos finitos de la región  $A$  de las contribuciones individuales de cada elemento:

$$\begin{aligned} J &= \sum_A \sum_{p=1}^{ng} \left\{ [(\sigma_{ij} u_{j,1} - W \delta_{1i}) q_{1,i}] \det \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p + \\ &+ \sum_A \sum_{p=1}^{ng} \left\{ [(\alpha \sigma_{ii} \theta_{,1} - f_j u_{j,1}) q_{1,1}] \det \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p - \\ &- \sum_{C^+ + C^-} \left\{ t_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q_1 \right\} w \end{aligned} \quad (20)$$

Las cantidades dentro de los corchetes  $\{\}_p$  se evalúan en los  $ng$  puntos de integración o de Gauss y  $w_p$  son los factores de peso correspondientes. El término debido a las tracciones en las caras de la grieta puede evaluarse utilizando las fuerzas nodales equivalentes y los valores de  $\partial u_j / \partial x_1$  en los nodos, o bien un procedimiento de integración por presiones en el contorno.

Para el caso axisimétrico, la expresión discretizada de la ecuación (12) es la siguiente:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{r_a} \sum_A \sum_{p=1}^{ng} \left\{ [(\sigma_{\beta\gamma} u_{\gamma,r} - W \delta_{r\beta}) q_{,\beta}] \det \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \right) r \right\}_p w_p - \\ &- \frac{1}{r_a} \sum_A \sum_{p=1}^{ng} \left\{ [(\alpha tr(\sigma) \theta, r - f_\gamma u_{\gamma,r}) q] \det \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \right) r \right\}_p w_p - \\ &- \frac{1}{r_a} \sum_A \sum_{p=1}^{ng} \left\{ \left[ \sigma_{\phi\phi} \frac{u_r}{r} - W \right] \det \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \right) q \right\}_p w_p - \\ &- \frac{1}{r_a} \sum_{C^+ + C^-} \{ t_\gamma u_{\gamma,r} q r \} w \end{aligned} \quad (21)$$

Siendo

- $tr(\sigma)$  la traza del tensor de tensiones.
- $r$  la distancia radial al punto de integración.
- $r_a$  la distancia radial al vértice de la grieta.

Los índices  $\beta$  y  $\gamma$  toman los valores de las coordenadas  $r$  y  $z$ .

6. CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Las densidades de la energía de deformación elástica y plástica en cada punto de integración se calculan por medio de las siguientes expresiones [6]:

$$W^e = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon^e \} \quad (22a)$$

$$W^p = \sum_1^{NS} \{ \sigma \}^T \{ \Delta \epsilon^p \} \quad (22b)$$

donde:

$\{ \Delta \epsilon^p \}$  es el vector de incrementos de deformaciones plásticas.

$NS$  es el número de subetapas en las que se ha realizado el cálculo elasto-plástico.

7. CASOS DE DEMOSTRACIÓN

El proceso de cálculo descrito, se ha implantado en una serie de subrutinas de postproceso del programa ANSYS, y escritas en su lenguaje interno de programación APDL (ANSYS Parametric Design Language). De esta

manera, el cálculo de la integral se realiza como un postproceso del cálculo tensional dentro del propio programa ANSYS.

Como aplicación de la metodología expuesta, se han estudiado sendos casos, con diferentes niveles de cargas aplicadas.

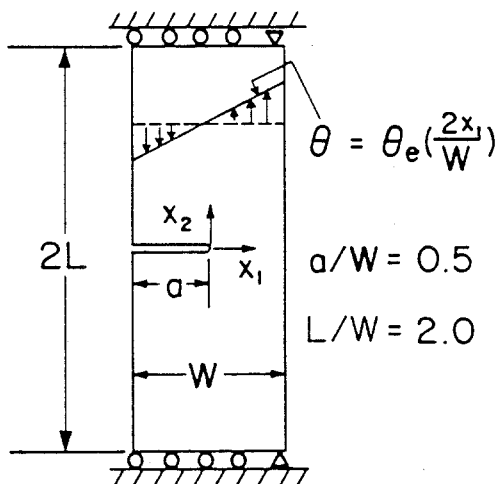


Fig. 5. Placa con grieta de borde sometida a una distribución de temperaturas.

7.1. Casos con carga aplicada baja

El primer caso analizado consiste en una placa en condiciones de deformación plana, con una grieta de borde, sometida a una distribución lineal de temperaturas y cuyos desplazamientos longitudinales están impedidos en los extremos [2], (Figura 5).

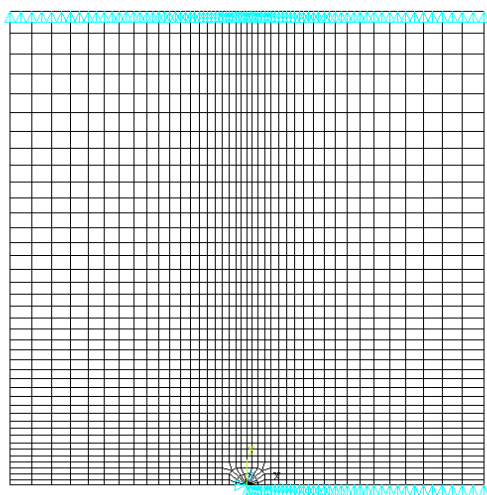


Fig. 6. Malla de elementos finitos.

La tensión en la placa en ausencia de grieta es:

$$\sigma_{\theta} = \frac{E\alpha\theta_e}{(1-\nu)} \tag{23}$$

donde  $E = 210000 \text{ MPa}$  y  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

La malla de elementos finitos se ha elaborado haciendo uso de la condición de simetría con respecto al plano de la grieta (Figura 6). Consta de 1618 elementos isoparamétricos de segundo orden y 5003 nodos. En la primera fila de elementos en torno al vértice de la grieta se han utilizado elementos triangulares (uno cada  $15^{\circ}$ ). El tamaño de dichos elementos es equivalente a  $a/40$ .

La integral J se ha calculado en las regiones representadas en la Figura 7, las cuales se han denominado en orden ascendente según su tamaño, y haciendo uso de las funciones de arbitrarias  $q_1$  tipo meseta y tipo pirámide.

Dado que la carga aplicada es baja, y con vistas a una mejor comparación con las soluciones disponibles en la literatura, se ha calculado el factor de intensidad de tensiones a partir de los valores de la integral J por medio de la relación

$$K_J = \sqrt{\frac{J E}{1-\nu^2}} \tag{24}$$

Finalmente, también se ha calculado el factor de intensidad de tensiones por medio del comando KCALC de ANSYS, el cual se basa en un algoritmo que utiliza los desplazamientos en torno al vértice de la grieta. Para ello, los elementos de la primera fila en torno al vértice de la grieta se han modificado desplazando los nodos intermedios a  $1/4$  del vértice.

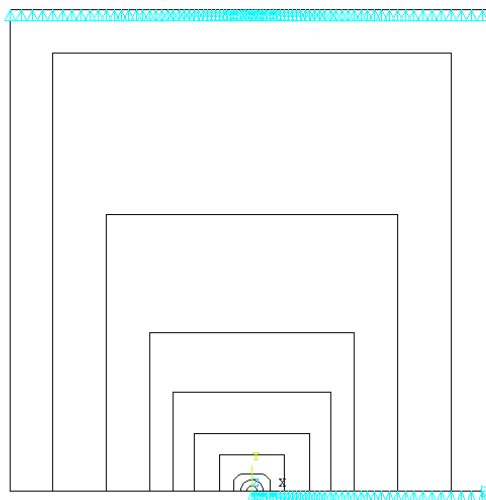


Fig. 7. Regiones de integración sobre la malla de elementos finitos.

Los resultados se resumen en la Tabla 1. En ella puede observarse que con excepción de la Región 1, formada por la primera fila de elementos en torno al vértice de la grieta (y en la que obviamente sólo la distribución tipo pirámide es aplicable), los valores calculados de la integral J no muestran diferencias significativas de una región a otra ni tampoco por la utilización de una distribución tipo meseta o pirámide. Por ejemplo, el resultado en la Región 3 con distribución pirámide es casi

idéntico al de la Región 4 y siguientes con distribución meseta. Naturalmente, los valores de  $K_J$  siguen la misma pauta que los de  $J$ , si bien cabe hacer notar que es precisamente el valor correspondiente a la Región 1 el que más se aproxima al factor de intensidad de tensiones proporcionado por el comando KCALC de ANSYS, lo cual se justifica en razón de que ambos se han calculado utilizando el campo de tensiones y desplazamientos más próximo al vértice de la grieta.

**Tabla 1.** Valores calculados de la integral  $J$  para el caso de la placa sometida a una distribución lineal de temperaturas.

Región		$\frac{J}{\sigma_0^2 a / E}$	$\frac{K_J}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$
P	M		
1		0,213726	0,273422
2		0,199033	0,263856
3		0,198631	0,263590
	4	0,198634	0,263592
	5	0,198628	0,263588
	6	0,198626	0,263586
	7	0,198624	0,263585
	8	0,198622	0,263583
	9	0,198622	0,263583
KCALC		-	0,263120

Comparativamente, los resultados aquí presentados muestran mayor independencia del dominio de integración y de la función  $q_1$  que en [2], lo cual es probablemente el resultado de que en el presente trabajo se han utilizado elementos de segundo orden, mientras que en dicha referencia se han empleado elementos de primer orden, es decir, sin nodos intermedios.

El segundo ejemplo de aplicación es el de la misma placa pero sometida ahora a una tracción uniforme. Este caso es bien conocido y de él existen diferentes soluciones ingenieriles (por ejemplo NASCRAC [8]).

Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Valores calculados de la integral  $J$  para el caso de la placa sometida a una tracción remota uniforme.

Región		$\frac{J}{\sigma_0^2 a / E}$	$\frac{K_J}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$
P	M		
1		24,46864	2,925562
2		22,73228	2,819849
3		22,70372	2,818077
	4	22,68728	2,817057
	5	22,68664	2,817017
	6	22,68641	2,817002
	7	22,68628	2,816995
	8	22,68621	2,816990
	9	22,68622	2,816991
KCALC		-	3,036206

7.2. Casos con carga aplicada alta

Para el análisis de estos casos se ha considerado que la curva tensión-deformación del material puede aproximarse por una relación del tipo de Ramberg-Osgood.

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \tag{25}$$

donde  $\sigma_0 = 420$  MPa,  $\epsilon_0 = \sigma_0/E = 0,002$ ,  $n = 10$  y  $\gamma = 1$ .

El criterio de plastificación utilizado ha sido el de von Mises y se ha supuesto endurecimiento isotrópico. La curva tensión-deformación (25) se aproximó por diversos tramos lineales.

El gradiente de temperaturas aplicado a la placa se incrementó hasta que la deformación térmica  $\epsilon_\theta$  alcanzara los valores de  $\epsilon_0$  y de  $2\epsilon_0$  respectivamente.

Los valores obtenidos se resumen en la Tabla 3, donde puede observarse que los valores normalizados de la integral  $J$  mantienen la misma pauta que en el caso de la carga baja, aunque son algo más sensibles al tamaño de la región de integración. Cabe señalar también que en las regiones cuyos contornos están más alejados del vértice de la grieta, el valor de la integral  $J$  se incrementa con respecto al de las regiones intermedias, lo cual puede ser debido a que los contornos de aquellas están relativamente próximos al contorno de la placa.

**Tabla 3.** Valores calculados de la integral  $J$  para el caso de la placa sometida a un gradiente alto de temperaturas.

Región		$\frac{J}{\sigma_0^2 a / E}$	
P	M	$\epsilon_\theta / \epsilon_0 = 1$	$\epsilon_\theta / \epsilon_0 = 2$
1		0,212740	0,174646
2		0,197896	0,164348
3		0,197574	0,164446
	4	0,197444	0,164349
	5	0,197437	0,164676
	6	0,197433	0,165614
	7	0,197431	0,167115
	8	0,197953	0,170832
	9	0,206471	0,174749

Finalmente, con vistas a contrastar la metodología aquí expuesta, se ha analizado el caso de la placa bajo la acción de una tensión uniforme relativamente alta, y se han comparado sus resultados con los obtenidos por el programa NASCRAC [8].

En la Tabla 4 puede observarse que la concordancia es bastante satisfactoria.

**8. CONCLUSIONES**

Las subrutinas de cálculo de la integral J sobre un dominio, permiten un post-proceso bastante eficiente de los resultados de un cálculo por el Método de los Elementos Finitos.

Los valores obtenidos de la integral J muestran bastante independencia de las regiones de integración y de las funciones de ponderación  $q_1$ , además de compararse favorablemente con los obtenidos por otras metodologías.

**Tabla 4.** Valores calculados de la integral J para el caso de la placa sometida a una tensión uniforme alta.

Región		$\frac{J}{\sigma_0^2 a / E}$	
P	M	$\sigma = 60 \text{ MPa}$	$\sigma = 100 \text{ MPa}$
1		25,43506	27,42672
2		23,67860	26,04978
3		23,60936	26,12170
	4	23,59950	26,14127
	5	23,59883	26,14241
	6	23,59858	26,14191
	7	23,59845	26,14175
	8	23,59837	26,14165
	9	23,59838	26,14168
NASCRAC		22,31116	23,86465

**9. REFERENCIAS**

[1] F.Z. Li, C.F. Shih and A. Needleman, “A comparison of methods for calculating energy release rates”, Engineering Fracture Mechanics 21, pp 405-421, 1985.

[2] C.F. Shih, B. Moran and T. Nakamura, “Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body”, International Journal of Fracture 30, pp 79-102, 1986.

[3] T. Nakamura, C.F. Shih and L.B. Freund, “Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture”, International Journal of Fracture 27, pp 229-243, 1985.

[4] H.G. deLorenzi, “Energy release rate calculations by the finite element method”, Engineering Fracture Mechanics 21, pp 129-143, 1985.

[6] ANSYS Theory Manual, Version 5.6.

[7] O. C. Zienkiewicz, “El Método de los Elementos Finitos”, Ed. Reverté.

[8] NASCRAC, NASA Crack Analysis Code, Version 3.0.