

CÁLCULO DE K_I PARA UNA FISURA CIRCULAR EN UNA FIBRA SOMETIDA A TRACCIÓN

C. Rosselló, G.V. Guinea, M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales
Universidad Politécnica de Madrid

E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. c/ Prof. Aranguren s/n, 28040 Madrid

Resumen. En este artículo se presenta el cálculo del factor de intensidad de tensiones para una fisura circular perpendicular al eje de una fibra sometida a tracción. Se ha realizado un modelo tridimensional por elementos finitos con el que se ha hallado el valor de K_I por el método de los desplazamientos. Se han calculado cuatro tamaños distintos de fisura situando las grietas en distintas posiciones dentro de la fibra. Los resultados para el caso de una fisura centrada encontrados en la bibliografía concuerdan con los obtenidos con el modelo.

Abstract. In this paper several calculations of the stress intensity factor of a circular crack embedded in a fiber under tension are presented. A 3-D finite element model has been developed where the K_I value has been computed through the displacement method. Four different crack sizes have been studied varying the position of each inside the fiber cross section. Results show good agreement with other references in the case of the centered crack.

1. INTRODUCCIÓN

Debido al proceso de fabricación o a tratamientos posteriores pueden aparecer defectos en las fibras que deterioran sus propiedades mecánicas. Cuando se trata de fibras frágiles sometidas a tracción muchas veces es posible suponer que su comportamiento se puede estudiar mediante la mecánica de la fractura elástica y lineal. En el caso de que el defecto en la fibra sea plano, superficial y perpendicular a su eje existen aproximaciones numéricas en la bibliografía para determinar el factor de intensidad de tensiones (K_I) en función de la carga aplicada [1]. Para el caso en el que la fisura es circular, interior y centrada respecto de la fibra existen también expresiones que permiten aproximar dicho valor [2]. Sin embargo para el caso en el que el centro de la fisura y el centro de la fibra no coincidan no se existe ninguna aproximación que permita hallar K_I .

En este trabajo se ha realizado un cálculo del factor de intensidad de tensiones para una fisura interior, circular, perpendicular al eje de la fibra y cuyo centro no coincide

con el de la sección. El material de la fibra se considera elástico y lineal.

El cálculo de K_I se ha realizado por el método de los desplazamientos que utiliza el conocimiento del campo de desplazamientos alrededor de una fisura. En el apartado 2 se presentan las expresiones que permiten calcular el valor de K_I a partir de esos desplazamientos.

En el apartado 3 se describe la implementación del modelo de la fibra sometida a tracción en el código de elementos finitos ANSYS, que ha permitido obtener para una cierta carga los desplazamientos en los nodos más próximos al frente de la fisura. Dada la excentricidad de la fisura ha sido necesario realizar un cálculo en 3 dimensiones.

Los resultados se presentan en el apartado 4 en el que se comparan los resultados obtenidos para el caso de la fisura centrada con las soluciones publicadas en la literatura.

2. MÉTODO DE CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Para hallar el valor del factor de intensidad de tensiones se ha usado el método de los desplazamientos [3]. Este método se basa en el conocimiento del campo de desplazamientos local alrededor de una fisura. Aunque existen otros métodos para hallar el factor de intensidad de tensiones (principalmente basados en el cálculo energético) éste resulta muy práctico al modelizar el problema por el método de los elementos finitos ya que el valor de K_I resulta directamente del desplazamiento de los nodos adyacentes a los situados sobre el frente de fisura. El método de los desplazamientos requiere una malla refinada alrededor del frente de fisura para dar un resultado aceptable, ya que debe representar con precisión el campo de desplazamientos en puntos muy cercanos al frente de fisura.

Para obtener una representación adecuada del campo singular de tensiones alrededor del frente de fisura se ha utilizado un elemento singular sugerido por Barsoum [4], en el que los nodos más próximos a la punta de la fisura se sitúan a un cuarto del lado del elemento y no a la mitad (fig. 1).

El campo de desplazamientos a lo largo de la cara superior de la grieta ($\theta=\pi$) para un elemento singular isoparamétrico es una función de los desplazamientos de los nodos A y B y viene dado por:

$$u(r) = (4u_A - u_B)\sqrt{\frac{r}{l}} - (4u_A - 2u_B)\frac{r}{l} \tag{1}$$

La mecánica de la fractura elástica lineal proporciona la expresión asintótica del desplazamiento, u , normal al plano de la fisura para una fisura bidimensional en modo I (fig. 1), que viene dado por:

$$u = K_I \frac{1+\nu}{4E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ (2\kappa+1)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} + \frac{A_1(1+\nu)r}{E} (\kappa-3)\sin\theta + \frac{A_2(1+\nu)r^{3/2}}{E} \left\{ \frac{(2\kappa-1)}{3}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} + \dots \tag{2}$$

donde E es el módulo de elasticidad, ν es el coeficiente de Poisson, κ un parámetro elástico que vale $3-4\nu$ para deformación plana y $(3-\nu)/(1+\nu)$ para tensión plana, A_i son parámetros dependientes de la geometría y de la carga de la probeta, r y θ son las coordenadas polares definidas en la figura 1.

El factor de intensidad de tensiones K_I se ha calculado igualando el término en $r^{1/2}$ de (2) con el término correspondiente de la función de interpolación de los desplazamientos para $u(r)$.

Sustituyendo en la ecuación (2) $\theta=\pi$ e identificando términos con $r^{1/2}$ en (1) y (2) obtenemos:

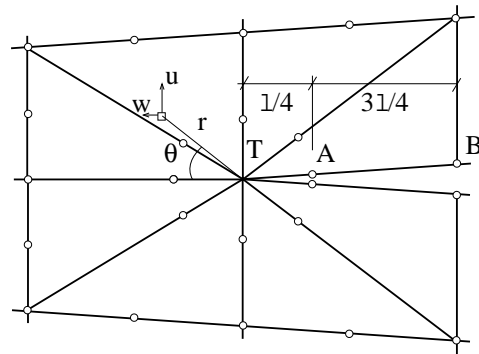


Fig. 1. Elementos singulares alrededor del frente de fisura y coordenadas para la descripción del campo alrededor de la fisura.

$$K_I = \frac{E}{(1-\nu^2)4} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (4u_A - u_B) \tag{3}$$

El caso que se trata en este trabajo es un cálculo en tres dimensiones. Diversos autores han mostrado que el campo asintótico de desplazamientos evaluado en planos perpendiculares al frente de la fisura tiene la forma dada en la ecuación (2) para deformación plana [5]. Por ello se han usado las expresiones precedentes en un sistema de coordenadas local para calcular K_I en cada punto del frente de fisura.

3. GEOMETRÍA DEL PROBLEMA Y MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Se ha calculado el factor de intensidad de tensiones para cuatro tamaños distintos de fisura cuya relación r/R , donde r es el radio de la fisura y R el radio de la fibra, varía entre 0.062 y 0.375 (fig. 2).

Para cada tamaño se han considerado al menos cuatro posiciones de la fisura en las que la distancia relativa al borde b/R ha variado entre 0.125 y 0.937. Los casos estudiados son los que aparecen en la tabla 1.

Para todos los casos se han considerado dos valores para el coeficiente de Poisson: 0.0 y 0.3. En todos los casos el módulo de elasticidad ha sido igual a 1. En total se han realizado 44 cálculos con 22 geometrías distintas.

Tabla 1. Casos estudiados en el trabajo

d/R r/R	0	0.219	0.375	0.500	0.625	0.750	0.812
0.062	x	x	x	x	x	x	x
0.125	x	x	x	x	x	x	
0.250	x	x	x	x	x		
0.375	x	x	x	x			

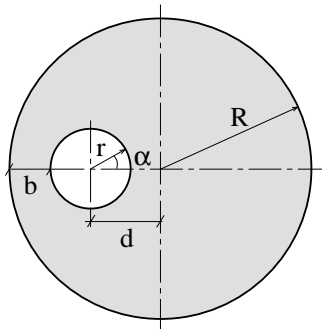


Fig. 2. Esquema de la sección con defecto.

Todos los elementos que forman la malla son prismáticos de 20 nodos, situados sobre los vértices y en medio de las aristas (fig. 3). Estos elementos son isoparamétricos y la función de interpolación de los desplazamientos sobre la arista del elemento viene dada por (1) cuando el nodo intermedio se sitúa a 1/4 del vértice. Los elementos que se han situado alrededor de la fisura (fig. 4) son del mismo tipo pero con la configuración de prisma triangular.

Se han colocado 6 elementos singulares rodeando cada segmento del frente de fisura (fig. 4) que se ha dividido en 18 elementos, en el caso de las fisuras de tamaño relativo $r/R=0.062$ y 0.125 , ó en 22 elementos en el caso de $r/R=0.250$ y 0.375 . En total se han usado 108 y 132 elementos singulares respectivamente.

El valor del factor de intensidad de tensiones ha sido calculado en cada uno de los nodos situados sobre el frente de la fisura, es decir que se ha calculado el valor de K_I para valores del ángulo α variando entre 0 y 180° (fig. 2).

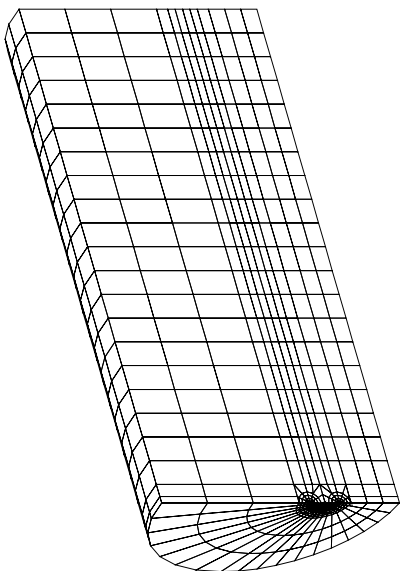


Fig. 3. Malla en 3D correspondiente a la zona inferior del cuarto de fibra modelizado. La fisura se sitúa en el plano inferior.

Por economía en el método de cálculo se ha construido un superelemento que sustituye aproximadamente la mitad superior de la fibra. Dicho superelemento tiene los mismos elementos que el resto de la fibra. Para cada posición y tamaño de fisura, por tanto para cada geometría, ha sido necesaria la generación de una malla específica tanto de la parte inferior que contiene la fisura como de la parte superior (superelemento).

Como condición de contorno se ha impuesto un desplazamiento sobre la cara superior de la fibra simulando la tracción uniaxial. Para simular la fisura se han dejado con libertad de movimiento los nodos que se encuentran en la región circular. Se ha visto que al aumentar las divisiones sobre el frente de fisura aumenta la precisión en los resultados siendo necesarios más elementos en las fisuras de mayor radio relativo.

Por otra parte el tamaño de los elementos singulares es de importancia crítica. Si dicho valor no es inferior a 1/4 del radio de la fisura los resultados no tienen una precisión aceptable. Se ha tomado en cualquier caso un tamaño de elemento singular de la décima parte del radio de la fisura.

4. RESULTADOS

En la figura 5 se ha representado el valor de K_I a lo largo del frente de fisura para $r/R=0.125$ y $d/R=0.219$.

Se observa que el valor del factor de intensidad de tensiones aumenta con el ángulo α . Es decir a medida que el punto es más cercano al borde de la fibra crece el valor del factor de intensidad de tensiones.

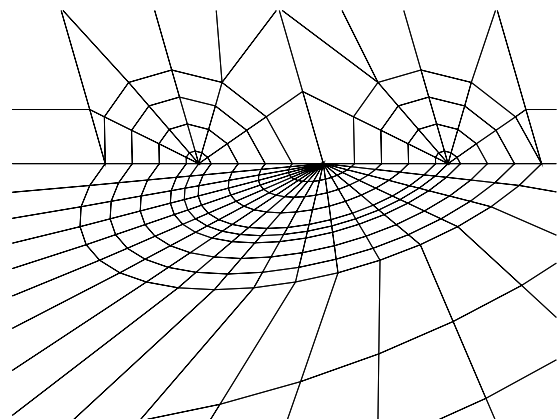


Fig. 4. Distribución de la malla en la zona de la fisura.

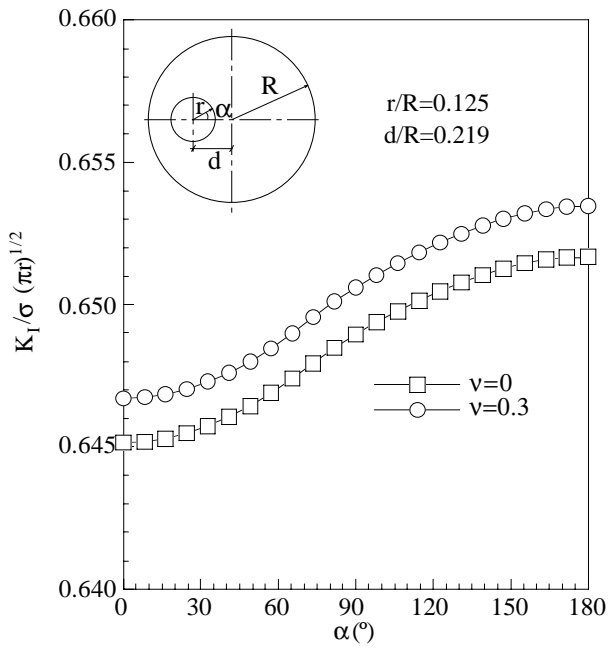


Fig. 5. Valor de K_I a lo largo del frente de fisura para $r/R=0.125$ y $d/R=0.219$.

Se ha observado que esto se puede generalizar a todos los casos estudiados. La tendencia de K_I a lo largo de cualquier fisura en cada posición siempre es la misma. El valor más relevante en todos los cálculos es pues el que corresponde al ángulo $\alpha=180^\circ$, ya que siempre es el máximo.

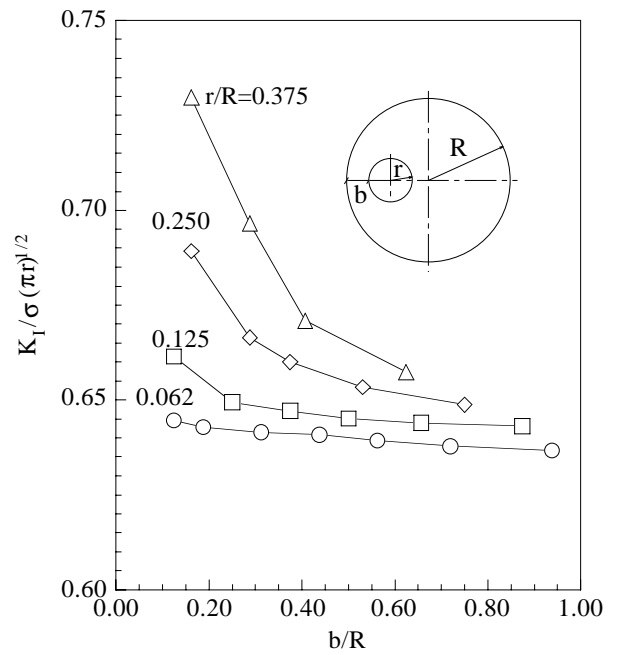


Fig. 7. K_I para distintos tamaños y distancias al borde de la fibra ($\nu=0.3$).

Los resultados del factor de intensidad de tensiones máximo obtenidos para los distintos tamaños y distancias se presentan en la figura 6 para el caso de $\nu=0$ y en la figura 7 para el caso de $\nu=0.3$.

El aspecto de las curvas de las figuras 6 y 7 es prácticamente idéntico, la diferencia al variar el coeficiente de Poisson de 0 a 0.3 es poco relevante.

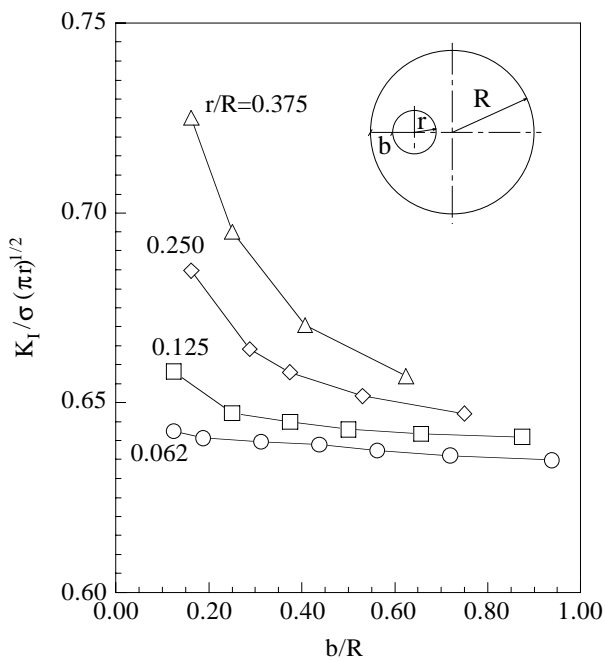


Fig. 6. K_I para distintos tamaños y distancias al borde de la fibra ($\nu=0$).

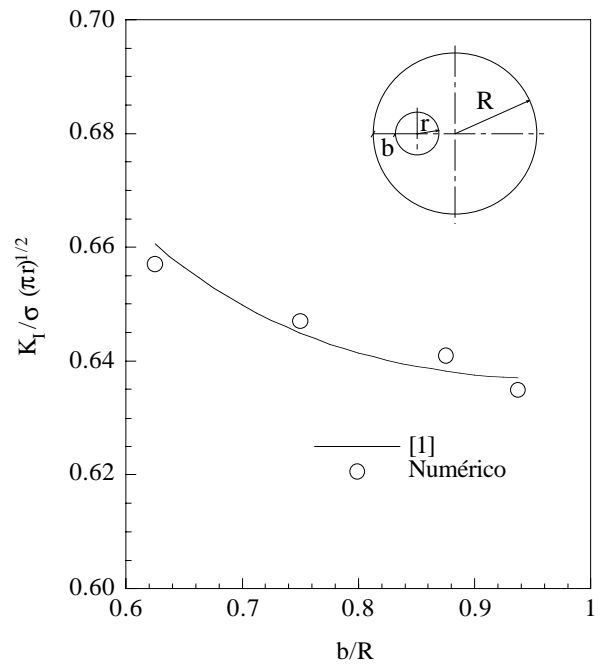


Fig. 8. Comparación de los resultados para el caso de la fisura centrada.

Finalmente, para contrastar la precisión de los resultados obtenidos se han trazado en la figura 8 los valores de K_I en el caso de la fisura centrada frente a otros encontrados en la bibliografía [1].

Hay que notar que en este caso K_I presenta el mismo valor de a lo largo de todo el frente de fisura. Se puede observar en la figura 8 la buena concordancia de los resultados obtenidos con los publicados en [2].

5. CONCLUSIONES

Se han obtenido los valores de K_I para cuatro tamaños distintos de fisura colocados en distintas posiciones dentro de la sección de la fibra.

Para una fisura excéntrica el valor del factor de intensidad de tensiones aumenta a medida que el punto del frente de fisura está situado más cerca del borde de la fibra.

A medida que aumenta la distancia entre el centro de la fibra y el centro de la fisura para un tamaño dado de fisura aumenta también el factor de intensidad de tensiones.

El cálculo realizado presenta un buen acuerdo con los resultados encontrados en la bibliografía para el caso de la fisura circular centrada.

6. REFERENCIAS

- [1] Levan, A. y Royer, J. "Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting". *International Journal of Fracture* **61**, 71-99 (1993).
- [2] Tada, H., Paris, P. e Irwin, G. "The stress analysis of Cracks Handbook", Del research Corporation (1973).
- [3] Guinea, G. V., Planas, J. y Elices, M., " K_I evaluation by the displacement extrapolation technique", *Engineering Fracture Mechanics*, **66**, 243-255 (2000)
- [4] Barsoum, R.S. "Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *International Journal of Fracture* **10**, 603-605 (1974).
- [5] Kassir, M.K. y Shih, G. C. "Three dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings" *Journal of Applied Mechanics*, **33**, 601-611 (1966).