

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA FISURA COHESIVA AL PMMA Y DETERMINACIÓN DE SU CURVA DE ABLANDAMIENTO

F.J. Gómez, A. Valiente y M. Elices

Universidad Politécnica de Madrid
Departamento de Ciencia de Materiales
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. c/ Prof. Aranguren s/n, 28040 Madrid

Resumen. El objetivo del presente artículo es aplicar la teoría de la fisura cohesiva al Polimetilmetacrilato (PMMA) y desarrollar un procedimiento de obtención de su curva de ablandamiento. En otros materiales cohesivos como el hormigón o las cerámicas existen técnicas experimentales para obtener la curva de ablandamiento, pero su generalización al PMMA requiere una revisión. En esta investigación se propone un procedimiento indirecto que aproxima linealmente la curva de ablandamiento y emplea tres parámetros determinados experimentalmente: la energía de fractura, la resistencia cohesiva y la pendiente inicial. La curva de ablandamiento obtenida ha sido empleada para predecir la carga de rotura de probetas entalladas en U con distintos valores del radio y la profundidad de la entalla, los resultados concuerdan con los datos experimentales.

Abstract. This paper proposes a procedure to apply the cohesive zone model to polymethyl-methacrylate (PMMA) and determine the softening curve experimentally. In concrete or ceramics experimental techniques to evaluate the softening curve exist, but these techniques are not applicable to PMMA. In this paper a new method is analysed. The cohesive curve is linearly approximated by a three-parameter curve: the fracture energy, the cohesive strength and the initial slope of the softening curve. The results have been used to predict the maximum load of notched specimens of different u-notch radius and u-notch depth. Numerical predictions are in good agreement with a large experimental programme.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de la fisura cohesiva permite explicar y predecir la rotura de hormigones, polímeros, materiales cerámicos y compuestos [1]. Recientemente ha sido aplicada para estudiar la rotura del polimetilmetacrilato (PMMA) producida por entallas [2]. En esta teoría, los mecanismos de daño que preceden a la rotura son modelizados como una fisura capaz de transmitir carga entre sus labios. Su principal característica es la existencia de una relación única, propiedad del material, entre la tensión transmitida en cada punto de la fisura y el desplazamiento relativo de ambas caras en el mismo punto. Esta relación se denomina curva de ablandamiento. En otros materiales cohesivos, como el hormigón o las cerámicas, existen técnicas experimentales para obtener la curva de ablandamiento [3], pero estas técnicas no son aplicables al PMMA.

El objeto de este trabajo es desarrollar un procedimiento experimental que permita obtener la curva de ablandamiento en PMMA. Para alcanzar este objetivo se ha modificado el método propuesto por Guinea, Planas y Elices [3], empleando los resultados experimentales de probetas entalladas disponibles [2].

A continuación se describe el programa experimental de ensayos de rotura, las hipótesis de la teoría de la fisura cohesiva y el método que existe en hormigón para determinar la curva de ablandamiento. Posteriormente se propone un procedimiento experimental para obtener la curva de ablandamiento en PMMA y con esta curva se predice el valor de la carga de rotura de los sólidos entallados descritos en el apartado experimental. Por último se comparan los valores obtenidos con los resultados experimentales.

2. EXPERIMENTACION

El material objeto de estudio en esta investigación es polimetilmetacrilato (PMMA), un polímero transparente, cuyo comportamiento es frágil a temperatura ambiente frente a fisuras y entallas. Sus propiedades mecánicas aparecen en la tabla 1 [2]. El módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson se han obtenido en un ensayo de tracción realizado a temperatura ambiente y a una velocidad de deformación de 0.00014 s^{-1} .

Tabla 1. Propiedades mecánicas del PMMA.

$E = 3 \text{ GPa}$
$\nu = 0,4$
$K_{IC} = 1,04 \text{ MPa m}^{1/2}$

Se ha realizado un amplio programa experimental de ensayos de rotura de probetas entalladas, sometidas a tracción y a flexión en tres puntos. La forma general de las probetas puede verse en la figura 1. El espesor fue 14 mm en todos los casos.

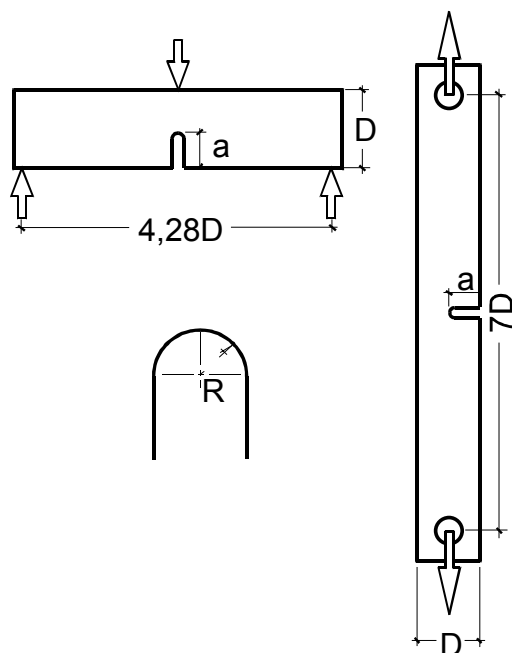


Fig. 1. Forma de las probetas

Todos los ensayos se realizaron controlando el desplazamiento de apertura de la boca de la entalla, (en control de CMOD), y para cada geometría se ensayaron un mínimo de cuatro probetas. Los valores medios de las cargas máximas obtenidos con su desviación típica correspondiente aparecen en las tablas 2 y 3.

Para explorar la influencia del radio y la profundidad de la entalla en la carga de rotura se han analizado 22 geometrías distintas. Los valores del radio de entalla R y la profundidad de entalla a aparecen en la tabla 2, donde se ha marcado el tipo de sollicitación en la que se ha ensayado cada combinación de valores, flexión en tres

puntos (TPB) o tracción (SEN). En todos los casos el canto D fue 28 mm.

Tabla 2. Cargas máximas de las geometrías analizadas variando el radio y la profundidad de entalla.

a (mm)	R (mm)	P _{MAX} (N) TPB (D=28 mm)	P _{MAX} (N) SEN (D=28 mm)
2,0	0,50	1900±100	
2,0	1,50	2700±200	
2,0	2,0	3000±10	
5,0	1,0		8700±400
5,0	1,5	2000±200	
10,0	1,0		4600±200
10,0	1,5	1100±100	
14,0	0,10	350±30	
14,0	0,15	340±30	
14,0	0,20	410±50	
14,0	0,5	600±50	1800±200
14,0	1,0	710±60	2400±200
14,0	1,5	800±100	2600±200
14,0	2,0	920±80	3000±100
14,0	1,5	800±100	
20,0	1,0		950±20
20,0	1,5	310±60	310±60

Para analizar la influencia del tamaño de la probeta en la carga de rotura se han ensayado geometrías con diferentes valores del canto D: 14, 21, 28 y 56 mm. En esta serie las relaciones profundidad de entalla canto y radio canto se mantuvieron constantes, $a/D=0,5$ y $R/D=0,07$.

Tabla 3. Cargas máximas de las geometrías analizadas con distinto canto.

D (mm)	a (mm)	R (mm)	P _{MAX} (N)
13,8	7,0	1,00	510±30
21,2	10,5	1,50	810±40
28	14,0	2,00	920±80
56	28,0	4,00	2200±200

3. MODELO COHESIVO

La teoría de la fisura cohesiva es un modelo macroscópico mediante el cual se representan los fenómenos físicos que tienen lugar en la zona de fractura como una fisura que transmite cargas entre sus labios. Las tensiones transmitidas dependen de la separación de los labios de la fisura a través de la curva de ablandamiento.

Las hipótesis de la zona cohesiva se refieren al inicio y a la evolución de la fisuración. El inicio de la fisuración se produce cuando la tensión principal mayor alcanza un valor crítico f_t , denominado resistencia a tracción o resistencia cohesiva. Alcanzado este valor se genera una

fisura cohesiva en el plano perpendicular a la dirección de dicha tensión principal mayor. La evolución de esta fisura cohesiva está gobernada por la curva de ablandamiento. En el instante inicial la tensión transmitida σ es igual a la resistencia cohesiva, a partir de dicho instante al aumentar el desplazamiento w la tensión disminuye hasta anularse cuando se alcanza el valor w_c , momento en el que cesa la transferencia de cargas y se forma una fisura verdadera. El área bajo la curva de ablandamiento es la energía específica de fractura G_F definida en la expresión (1) y coincide con el trabajo necesario para abrir monótonamente una unidad de área de grieta.

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma \, dw = \int_0^{w_c} f(w) \, dw \quad (1)$$

donde $\sigma = f(w)$ es la curva de ablandamiento del material. Una magnitud importante dentro de la teoría es la longitud característica l_{ch} definida por:

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} \quad (2)$$

El comportamiento en rotura de sólidos se puede predecir implementando el modelo cohesivo en un código de elementos finitos. En la modelización se distinguen dos zonas, la zona cohesiva y el resto del material. El comportamiento de la zona cohesiva está gobernado por la curva de ablandamiento mientras que el del resto del material por la ecuación constitutiva. En la zona cohesiva se introducen elementos especiales unidimensionales, y fuera de esta zona elementos convencionales. Los detalles de los cálculos realizados para obtener la carga máxima en probetas entalladas, como por ejemplo las mallas y el tipo de algoritmo empleados, se pueden encontrar en otros trabajos de los autores [2].

Para determinar la curva de ablandamiento de un material existen métodos de medida directa, que plantean grandes dificultades experimentales [4,5], y métodos indirectos, que consisten en postular la forma de la curva de ablandamiento definiendo una expresión analítica dependiente de varios parámetros que se determinan de forma experimental [3,6,7]. Entre los procedimientos indirectos se encuentra el método de Guinea, Planas y Elices [3] que consiste en aproximar la curva de ablandamiento real por una curva bilineal dependiente de cuatro parámetros: la energía específica de fractura G_F , la resistencia a tracción f_t , la intersección de la recta inicial con el eje de abscisas w_1 y la abscisa del punto de quiebro de la curva w_k (figura 2).

En hormigón, la energía específica de fractura G_F se obtiene a partir de un ensayo de rotura de una probeta fisurada dividiendo el trabajo de fractura por el área del ligamento. La medida de dicho trabajo no resulta fácil debido a un conjunto de fenómenos que pueden disipar el trabajo de las fuerzas exteriores [8].

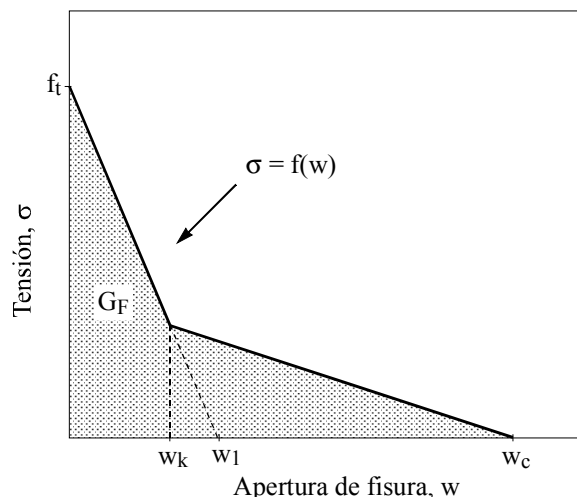


Fig. 2. Curva de ablandamiento bilineal.

La resistencia a tracción f_t se determina a partir del valor de la carga máxima de ensayos brasileños o de compresión diametral. El ensayo es válido siempre que la probeta sea suficientemente grande comparada con la longitud característica del material y la grieta se inicie en el centro de la probeta [9].

La intersección de la recta inicial con el eje de abscisas w_1 , se determina a partir del valor de la carga máxima de una probeta fisurada. En sólidos fisurados y no fisurados cuyas dimensiones no son muy grandes comparadas con la longitud característica, el máximo en carga se alcanza antes de que en algún punto de la zona cohesiva se haya desarrollado por completo la curva de ablandamiento [10], por tanto en el valor máximo sólo influye el primer tramo de la curva. Definiendo la carga adimensional como el cociente entre la tensión nominal σ_N y la resistencia cohesiva f_t , se puede demostrar que dicha carga adimensional es función únicamente de un monomio adimensional [11].

$$\frac{\sigma_N}{f_t} = g\left(\frac{2D f_t}{Ew_1}\right) \quad (3)$$

en el caso de flexión en tres puntos la tensión nominal es:

$$\sigma_N = \frac{3PL}{2BD^2} \quad (4)$$

donde L es la distancia entre apoyos y B el espesor de la probeta, y en tracción:

$$\sigma_N = \frac{P}{BD} \quad (5)$$

La abscisa del punto de quiebro w_k del área bajo la curva de ablandamiento se calcula a partir de la curva carga-desplazamiento del punto de aplicación de carga de un ensayo estable de una probeta fisurada [12].

En hormigón, y en general en materiales cuasifrágiles cuyo comportamiento sea elástico y lineal y su longitud característica sea suficientemente grande, estos cuatro parámetros se pueden determinar por este método, pero cuando se trata de otros materiales, como el PMMA, es necesario revisar los fundamentos del mismo.

4. CURVA DE ABLANDAMIENTO EN PMMA

La obtención de la energía de fractura G_F en PMMA es más sencilla que en hormigón puesto que la longitud característica, que está directamente relacionada con el tamaño de la zona de proceso, es muy pequeña, del orden de décimas de milímetro [2], comparada con las dimensiones de probetas habituales en laboratorio. Este hecho permite aproximar la teoría de la fisura cohesiva a la Mecánica de Fractura Elástica y Lineal y calcular G_F a partir del valor de la tenacidad K_{IC} usando la conocida relación de Irwin:

$$G_F = \frac{K_{IC}^2}{E} \tag{6}$$

Dicha relación es válida siempre que las dimensiones del sólido y el tamaño de la grieta sean mucho mayores que la región autónoma existente en el fondo de la fisura, cuyo comportamiento está gobernado por el factor de intensidad de tensiones K_I , y no se produzcan otros fenómenos de disipación de energía [13]. Aplicando la expresión 6 se obtiene:

$$G_F = 290 \text{ N/m} \tag{7}$$

En PMMA no es posible realizar ensayos de compresión diametral. Algunos intentos llevados a cabo para realizar este ensayo muestran que el PMMA puede adquirir grandes deformaciones sin llegar a la rotura y la grieta no se inicia en el centro de la probeta, sino en la zona de aplicación de la carga [14]. Para obtener la resistencia a tracción es necesario buscar un nuevo tipo de ensayo o seguir el siguiente procedimiento.

Cuando en carga máxima sólo se ha desarrollado la parte inicial de la curva de ablandamiento, esta sólo depende de la resistencia cohesiva y de la pendiente inicial (3). Si se utilizan dos geometrías entalladas en U como las que aparecen en la figura 3 sometidas a flexión en tres puntos se dispone de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{\sigma_{N1}}{f_t} = g_1 \left(\frac{2D_1 f_t}{E w_1} \right) \tag{8}$$

$$\frac{\sigma_{N2}}{f_t} = g_2 \left(\frac{2D_2 f_t}{E w_1} \right) \tag{9}$$

A partir de las cargas máximas de las dos geometrías, resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones (8,9) se determinan los valores de w_1 y f_t .

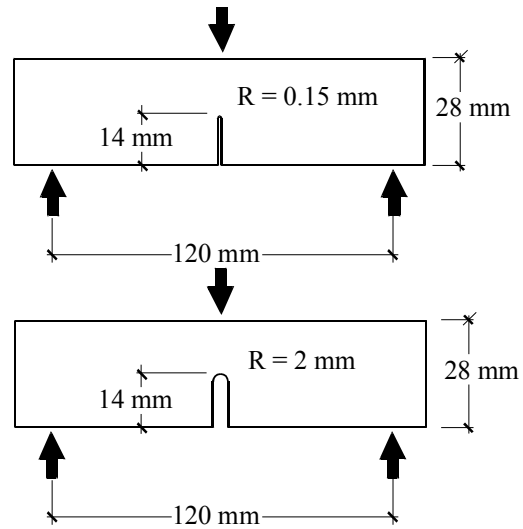


Fig. 3. Geometrías empleadas para obtener f_t y w_1 .

La figura 4 muestra el lugar geométrico de parejas de puntos (w_1, f_t) que cumplen las ecuaciones 8 y 9. El punto de corte permite obtener los valores de w_1 y f_t en este material.

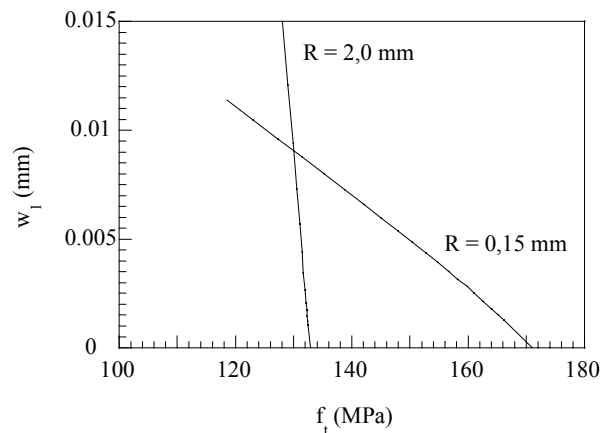


Fig. 4. Solución de las ecuaciones 8 y 9.

Este procedimiento de cálculo se basa en que la carga máxima se alcanza cuando se ha desarrollado la parte inicial de la curva de ablandamiento y es necesario verificar esta hipótesis una vez conocidos los dos parámetros de la curva de ablandamiento. Para comprobar esta condición, con cada pareja de valores w_1-f_t y el valor del desplazamiento del nodo cohesivo en la raíz de la entalla en carga máxima se puede calcular la energía desarrollada, que tiene que ser inferior a la energía de fractura G_F . En la figura 5 se han representado en línea discontinua los puntos en los que la energía desarrollada en carga máxima es superior al valor límite de la energía de fractura. Se observa que el punto de intersección está fuera de la zona válida.

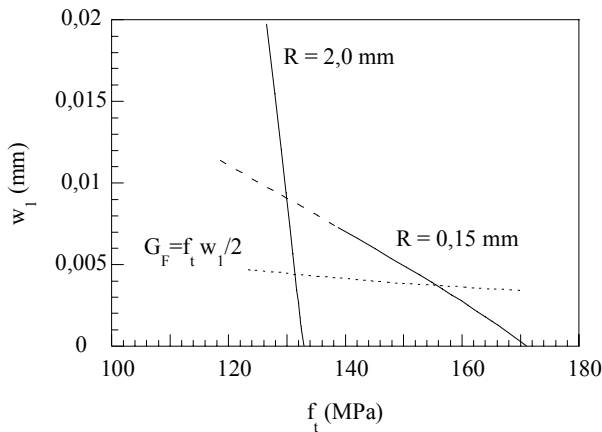


Fig. 5. Validez de la solución de las ecuaciones 8 y 9.

La expresión 9 no es válida. En el valor de la carga máxima de la probeta de 0,15 mm de radio influyen todos los parámetros de la curva de ablandamiento.

$$\frac{\sigma_N}{f_t} = g \left(\frac{2D f_t}{E w_1}, \frac{f_t w_1}{G_F}, \frac{f_t w_k}{G_F} \right) \quad (10)$$

La figura 5 no determina el valor de la intersección, puesto que el corte se produce fuera de la zona válida, pero permite acotarlo. En la gráfica se ha representado los valores correspondientes a una curva lineal donde

$$G_F = \frac{1}{2} w_1 f_t = 290 \text{ N/m} \quad (11)$$

Si la intersección se produce por encima de esta línea, la curva de ablandamiento es convexa y mientras que si se produce por debajo es cóncava. Se observa que la intersección no se produce en la zona de las curvas concavas, sino en la zona convexa.

Cuando las curvas son convexas la dependencia del valor de la carga máxima con el valor de \$w_k\$ es pequeña según muestra la figura 6. Manteniendo constante el valor de \$G_F\$, \$f_t\$, \$w_1\$ y el valor del tamaño de la probeta \$D\$, se ha calculado el valor de la carga máxima en función de \$w_k\$ para tres radios de entalla. Se observan pequeñas diferencias en carga máxima, menores que 3% entre los valores correspondientes a la curva bilineal truncada, el último punto dibujado y el resto. Los cálculos se han realizada con \$G_F = 290\text{N/m}\$, \$f_t = 139\text{MPa}\$, \$w_1 = 0.0081\$ mm y \$D = 28\$ mm. Teniendo en cuenta estos resultados se puede fijar a priori el valor del cuarto parámetro de la curva de ablandamiento, sin introducir un error importante en los valores de carga máxima, y reducir la curva bilineal general a la curva bilineal truncada (figura 7) donde la carga máxima depende de:

$$\frac{\sigma_N}{f_t} = g \left(\frac{2D f_t}{E w_1}, \frac{f_t w_1}{G_F} \right) \quad (11)$$

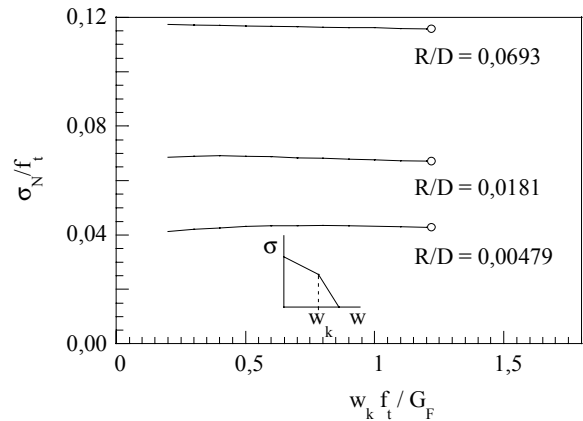


Fig. 6. Cargas máximas para distintos valores de \$w_k\$ en probetas entalladas

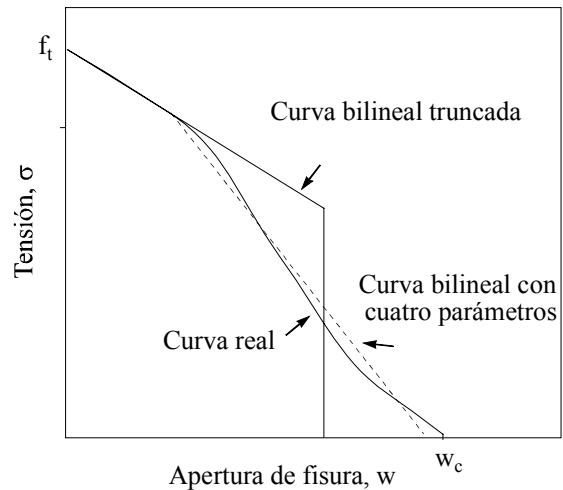


Fig. 7. Curva bilineal truncada.

El sistema de ecuaciones anterior pasa a ser

$$\frac{\sigma_{N1}}{f_t} = g_1 \left(\frac{2D_1 f_t}{E w_1} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_{N2}}{f_t} = g_2 \left(\frac{2D_2 f_t}{E w_1}, \frac{f_t w_1}{G_F} \right) \quad (13)$$

Si se conocen \$D\$, \$E\$, \$G_F\$, \$\sigma_{N1}\$ y \$\sigma_{N2}\$ el sistema de ecuaciones se puede resolver numéricamente. En la figura 8 aparece el lugar geométrico de los puntos que verifican las ecuaciones 12 y 13 cuya intersección permite obtener el valor de la resistencia a tracción y la pendiente del primer tramo de la curva de ablandamiento.

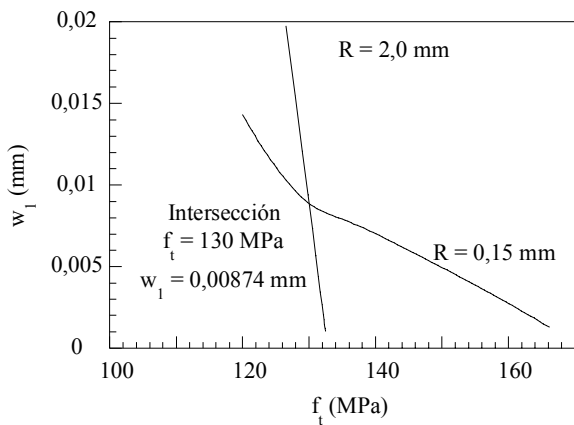


Fig. 8. Determinación de los parámetros de la curva de ablandamiento.

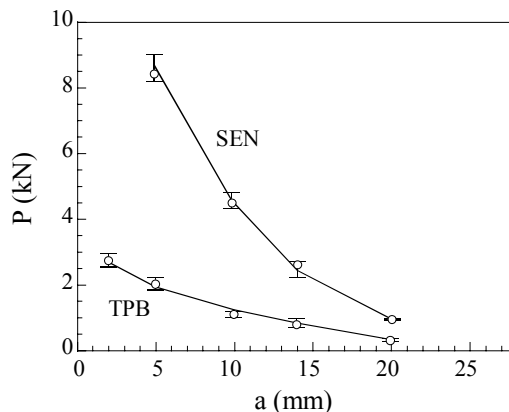


Fig. 10. Predicciones numéricas y resultados experimentales en probetas entalladas para distintos valores de la profundidad de entalla

5. PREDICCIONES DEL MODELO

Con la curva de ablandamiento obtenida se pueden predecir los valores de las cargas máximas de los sólidos entallados descritos en el apartado experimental. En las siguientes figuras se comparan las predicciones del modelo, línea continua, con los valores experimentales, puntos con dispersión experimental.

En la figura 9 se ha analizado la influencia del radio de curvatura de la entalla en la carga de rotura, y se han representado los resultados correspondientes a dos tipos distintos de sollicitación: flexión en tres puntos (TPB) y tracción (SEN). La profundidad de la entalla es 14 mm en tracción y 2,7 mm y 14 mm en flexión.

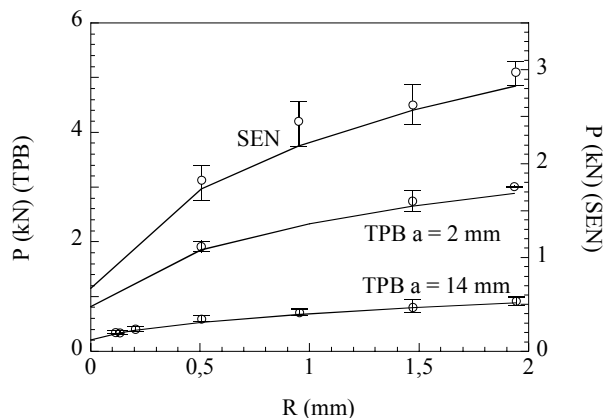


Fig. 9. Predicciones numéricas y resultados experimentales en probetas entalladas para distintos valores del radio de entalla

En la figura 10 se ha estudiado la influencia de la profundidad de entalla en el valor de la carga de rotura. De nuevo se han representado los resultados correspondientes a los dos tipos de sollicitación: flexión en tres puntos (TPB) y tracción (SEN). El radio de entalla 1 mm en tracción y 1,5 en flexión.

En la figura 11 se ha estudiado el efecto de tamaño en la carga de rotura. Se han analizado cuatro geometrías homotéticas con distinto valor del canto.

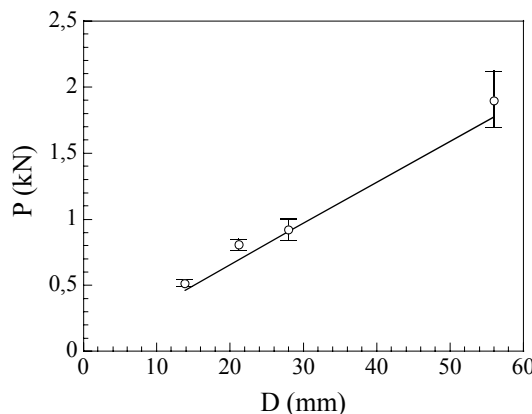


Fig. 11. . Predicciones numéricas y resultados experimentales en probetas entalladas homotéticas.

Se observa una buena concordancia entre los resultados numéricos y los experimentales en todas las geometrías analizadas.

6. CONCLUSIONES

La teoría de la fisura cohesiva permite predecir la carga de rotura de un amplio número de geometrías de PMMA entalladas en forma de U, en donde se ha variado el radio, la profundidad y el tamaño de la entalla.

El modelo empleado depende de tres parámetros: La energía de fractura, la resistencia cohesiva y la pendiente inicial de la curva de ablandamiento. Estos tres parámetros han sido determinados experimentalmente empleando tres ensayos independientes, un ensayo de tenacidad y dos geometrías entalladas en U con distinto radio de entalla, sometidas a flexión en tres puntos.

El procedimiento propuesto es similar al empleado en hormigón, un método indirecto que aproxima la curva real a una bilineal, aunque el número de parámetros es distinto.

7. AGRADECIMIENTOS

El trabajo presentado en este artículo ha sido financiado por la CICYT (Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología) en el marco del proyecto 95-0091-OP-02-01 y MAT99-0921

8. REFERENCIAS

- [1] Elices, M., Planas J y Guinea G.V. "Modelling cracking in rocks and cementitious materials", *Fracture and Damage of Concrete and Rock*. FDCR-2, 3-33 (1993).
- [2] Gómez F.J., Elices M. y Valiente A. "Cracking in PMMA containing U-shaped notches", *Fatigue Fracture Engineering Material and Structures*. **23**, 795-803 (2000).
- [3] Guinea G.V., Planas J. y Elices M., "A general bilinear fit for the softening curve of concrete", *Materials and Structures*. **27**, 99-105 (1994).
- [4] Reinhardt H.W., Cornelissen H.A.W. y Hordijk D.A., "Tensile tests and failure analysis of concrete", *Journal Structures Engineering*. **112**, 2462-2477 (1986).
- [5] Van Mier J., "Fracture of concrete under complex stress", *Heron*. **31**, 2-90 (1986).
- [6] Wittmann, F.H., Rokugo K., Bruhwiler E., Mishashi H. and Simoni P., "Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens", *Materials and Structures*. **21**, 21-32 (1988).
- [7] Wittmann, F.H., Roelfstra P.E., Mishashi H., Huang Y.Y., Zhang X.H. and Nomura N., "Influence of age of loading, water-cement ratio, and rate of loading on fracture energy of concrete", *Materials and Structures*. **20**, 103-110 (1987).
- [8] Guinea G.V., Planas J. y Elices M., "Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: 1. Influence of experimental procedures", *Materials and Structures*. **25**, 212-218 (1992).
- [9] Rocco C.G., "Influencia del tamaño y mecanismos de rotura del ensayo de compresión diametral", Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de Materiales, UPM (1996).
- [10] Petersson P.E., "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", Report TVBM-1006, Division of Building Materials, University of Lund, Institute of Technology, Sweden (1981).
- [11] Planas J. y Elices M., "Nonlinear fracture of cohesive materials", *International Journal of Fracture*. **51**, 139-157 (1991).
- [12] Elices M., Guinea G.V. y Planas J., "Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3. Influence of cutting the P- δ tail", *Materials and Structures*. **25**, 327-334 (1992).
- [13] Planas J. y Elices M., "Asymptotic analysis of a cohesive crack: 1. Theoretical background", *International Journal of Fracture*. **55**, 153-177 (1992).
- [14] Gómez F.J., "Un criterio de rotura en sólidos entallados", Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de Materiales, UPM (1998).