

ANÁLISIS POR SIMULACIÓN DE UN MODELO DE FATIGA COMO MEDIO PARA REDEFINIR ESTRATEGIAS DE ENSAYOS

López Aenlle M.*, Ramos A.*, Fernández Canteli A.*, Castillo E.**

* Escuela Técnica Superior Ingenieros Industriales. Universidad de Oviedo
Campus de Viesques, Bloque 7, 33203, Gijón, España.

Tel: 985 18 20 57 Fax: 985 18 20 55, e-mail: aelle@charpy.edv.uniovi.es

** Escuela Técnica Superior de Caminos. Universidad de Cantabria. Santander.

Resumen. En programas experimentales de fatiga, la estrategia a seguir en los ensayos es, a menudo, fruto de la intuición, ingenio e inspiración de los analistas, por lo que resulta necesario establecer otros criterios objetivos que permitan optimizar la planificación de los ensayos. Una buena elección del modelo analítico de fatiga que se va a utilizar posteriormente en el ajuste de los resultados es fundamental para poder definir la estrategia a seguir. A partir del modelo estadístico de fatiga de Castillo et al. y utilizando técnicas de simulación, en este trabajo se estudia la influencia del número de niveles de ensayo y del número de ensayos por nivel, en la fiabilidad del ajuste y del coste de los ensayos.

Abstract. The strategy to follow in experimental programs of fatigue is usually a matter of intuition, ingenuity and inspiration of the analysts; as a consequence, other objective criteria are needed to optimize the test planning. A good choice of the analytical fatigue model to be used later in the adjustment of the results is essential to select the test strategy. In this work, the statistical fatigue model of Castillo et al. together with simulation techniques are used to investigate the influence of the number of test levels and of the number of tests per level on the reliability and the cost of the tests.

1. INTRODUCCIÓN.

Los modelos de fatiga utilizados para la predicción de vida de estructuras y componentes mecánicos bajo cargas de amplitud variable, utilizan el campo S-N como información básica, de lo que se deduce la importancia de una evaluación fiable del mismo.

Los elevados costes de los programas experimentales de fatiga son el resultado, tanto del alto número de ensayos requerido, como del largo periodo de ocupación de las máquinas de ensayo, que se incrementa sustancialmente a medida que el nivel de tensión del ensayo decrece. Esto suele ser debido a una estrategia de ensayos errónea que repercute, generalmente, en un mayor coste y en un menoscabo de la fiabilidad de los valores de los parámetros del modelo de fatiga, debido a un incremento de los datos censurados (run-outs), así como a la presencia de datos anómalos que no deben ser incluidos en el análisis.

Por el contrario, la definición de una adecuada estrategia de ensayos permitiría disminuir los costes del programa global, al reducir el número de ensayos y/o su duración para una fiabilidad dada, o, alternativamente, incrementar la fiabilidad para un número dado de ensayos, o coste probable del programa de ensayos. Sin embargo, disponer de un modelo que permita definir adecuadamente el campo S-N, es un prerrequisito para no depender en primera

instancia de la intuición, ingenio o inspiración de los analistas, sino de criterios objetivos, basados en procedimientos estadísticos y análisis de sensibilidad.

La estrategia de ensayos óptima se podría definir como un aceptable compromiso entre la duración del programa de ensayos y la fiabilidad que se desea obtener. En este trabajo, se ofrece una metodología para alcanzar ese objetivo, aplicando un modelo de fatiga para la evaluación estadística de resultados a carga constante, a partir del cual se definen criterios que permiten optimizar el programa de ensayos al conducir a una minimización de tiempo de ensayo y de costes.

2. EVALUACIÓN ESTADÍSTICA DEL CAMPO S-N

En el campo de Wöhler, se definen dos variables aleatorias relacionadas entre sí: la vida a fatiga N y el rango de tensiones $\Delta\sigma$. El problema consiste, pues, en encontrar un modelo de regresión no-lineal que permita definir el campo S-N de fatiga, y evaluar los parámetros del modelo.

Esto representa un problema estadístico de envergadura, debido al limitado número de resultados experimentales del que se dispone generalmente, distribuidos además en diversos niveles de tensión.

Castillo et al. [1, 2], han desarrollado un modelo estadístico para el análisis de resultados de fatiga, derivado de una ecuación funcional y tiene en cuenta aspectos físicos y estadísticos (consistencia, estabilidad y compatibilidad). De acuerdo con este modelo (figura 1), el campo S-N para un elemento sometido a carga de amplitud constante viene definido como:

$$(\log N - B)(\log \Delta\sigma - C) = D \left[-\log(1 - P) \right]^{1/A} - E, \quad (1)$$

donde N es la vida a fatiga medida en ciclos, $\Delta\sigma$ es el rango de tensión, P es la probabilidad de fallo; y A, B, C, D y E son los parámetros a estimar, con el siguiente significado:

- A= Parámetro de forma de la distribución de Weibull.
- B= Valor umbral o número de ciclos límite.
- C= Límite de endurancia.
- D= Parámetro de escala.
- E= Parámetro que fija la posición de la curva límite, o de probabilidad nula.

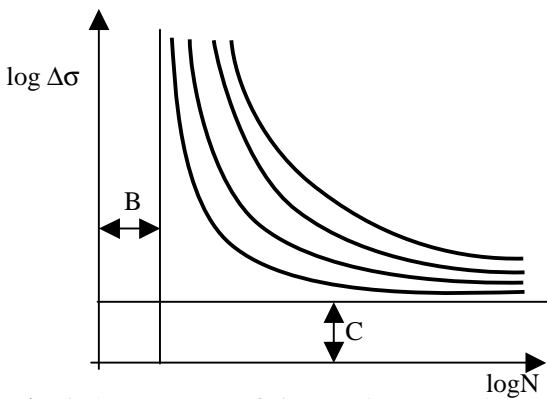


Fig. 1. Campo S-N en fatiga con las curvas de isoprobabilidad.

Una vez estimados los 5 parámetros, la expresión analítica del campo S-N está plenamente determinada, permitiendo así la predicción probabilística del fallo a fatiga bajo carga de amplitud constante. La función de distribución para la vida N, en el rango de tensión $\Delta\sigma_i$ resulta ser:

$$F(\log N_i; \Delta\sigma_i) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{(\log N - B)(\log \Delta\sigma_i - C) + E}{D} \right)^A \right] \quad (2)$$

expresión que permite identificar los parámetros de Weibull para el rango de tensiones $\Delta\sigma_i$ con los parámetros de Weibull del modelo, A, B, C, D y E:

$$\lambda(\Delta\sigma_i) = B - \frac{ED}{\log \Delta\sigma_i - C}, \quad \delta(\Delta\sigma_i) = \frac{D}{\log \Delta\sigma_i - C}, \quad (3)$$

$$\beta(\Delta\sigma_i) = \beta = A.$$

Como puede observarse, las curvas de isoprobabilidad son hipérbolas equiláteras.

Debido a que los resultados proceden de diferentes niveles de tensión, es preciso definir el campo S-N de fatiga mediante un modelo de regresión no-lineal, que no presente incoherencias internas y/o externas, y evaluar los parámetros del modelo.

La estimación de los parámetros del modelo puede realizarse en dos fases. Inicialmente se determinan los parámetros B y C (asíntotas del modelo), cuyos valores se pueden obtener minimizando la función:

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \left[(\log N_{ij} - B) - \frac{K_1}{\log \Delta\sigma_i - C} \right], \quad (4)$$

respecto a B, C y K_1 . Indirectamente se obtiene el parámetro K_1 , que junto con B y C define la hipérbola de probabilidad asociada al valor medio.

A continuación se estiman el resto de los parámetros, es decir, A, D y E, que definen la distribución de Weibull del modelo. Para ello se agrupan los resultados de los distintos niveles en una única muestra, mediante un proceso de normalización, procediendo a continuación a realizar una estimación estándar de los parámetros de la distribución triparamétrica de Weibull resultante [2].

En efecto, la expresión (1) muestra que una vez que los parámetros B y C son conocidos, se puede definir una nueva variable:

$$V = (\log N - B) (\log \Delta\sigma - C) \quad (5)$$

que sigue una distribución de Weibull, dependiente de tres parámetros λ' , δ' y β' :

$$F(V; \lambda', \delta', \beta') = 1 - \exp \left[- \left(\frac{V - \lambda'}{\delta'} \right)^{\beta'} \right] \quad (6)$$

Éstos pueden estimarse gráficamente sobre papel probabilístico, o mediante procedimientos analíticos. A partir de λ' , δ' y β' se obtienen los restantes parámetros del modelo:

$$A = \beta', \quad D = \delta', \quad E = -\frac{\lambda'}{\delta'}. \quad (7)$$

3. ESTRATEGIA DE ENSAYOS.

Previamente a la realización de ensayos de fatiga, es necesario definir la estrategia que se va a seguir [3], entendiendo como tal la definición de:

1. El rango de tensión mínimo $\Delta\sigma_{\min}$ (o nivel mínimo de tensión, σ_{\min} , para ciertos

materiales, tales como hormigón).

2. El rango de tensión máximo $\Delta\sigma_{\max}$ (o nivel máximo de tensión, acorde con el apartado anterior). Este valor suele determinarse como una fracción de la resistencia estática.
3. El número total de niveles (entre σ_{\min} y σ_{\max}) sobre los que se deben realizar los ensayos.
4. El número de ensayos por nivel que, junto con la información del apartado 3 anterior, definen el número total de ensayos.
5. El número límite de ciclos, para el que se interrumpen los ensayos cuando no se ha producido rotura. En gran parte de los programas experimentales suele adoptarse como valor límite 2×10^6 .

En función de cómo se distribuyen los ensayos y los niveles de tensión en el campo S-N se pueden distinguir tres tipos de planificación:

- Ensayos en cascada. En este caso se trata de dispersar los ensayos, realizando un número reducido de ensayos por nivel, a costa de considerar un elevado número de niveles.
- Ensayos en grupos. Los ensayos se concentran en un número reducido de niveles en los que se realizan, como contrapartida, un número considerable de ensayos.
- Modalidad mixta. Se trata de un compromiso entre los ensayos en cascada y en grupos.

La estrategia a seguir en el programa de ensayos no debe considerarse inamovible a lo largo de toda la realización del mismo, sino que podrá (y deberá) adaptarse en cada momento a los objetivos que se persiguen a partir de los resultados que se vayan obteniendo. En la estrategia de ensayos se distinguen principalmente dos etapas, en consonancia con el método a seguir en la estimación de los parámetros.

Inicialmente, los ensayos deben enfocarse a la determinación de unos valores aproximados de los parámetros B, C y K_1 , que definen las asíntotas de las curvas de percentiles y la curva de probabilidad media. Como en esta primera etapa se trata de ajustar una hipérbola, lo más adecuado se diría que es realizar los ensayos en cascada (figura 2).

En esta etapa debe tenerse presente que, desde el punto de vista de la estimación de B, C y K_1 , interesa que todos los resultados se traduzcan en roturas, por lo que debería evitarse ensayar en niveles de tensión próximos al límite de endurancia, que es inicialmente desconocido. Además, los ensayos a niveles bajos por su larga duración, en principio, no parecen deseables, si

bien son los que tienen una mayor influencia en la estimación de los parámetros del modelo. Por lo tanto, se debe llegar a una solución de compromiso razonable entre la fiabilidad de la evaluación y la duración de los ensayos.

En el siguiente apartado se lleva a cabo un estudio sobre el número de niveles y el número de ensayos necesario.

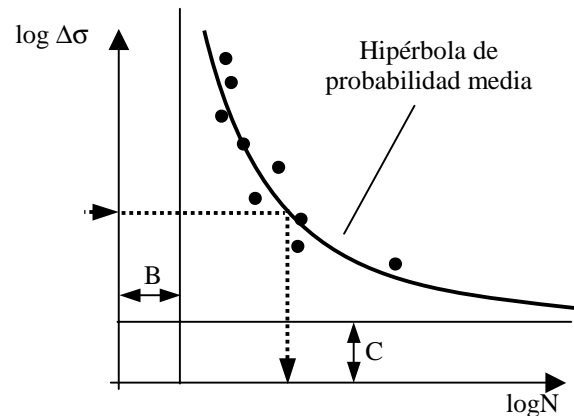


Fig. 2. Estrategia a seguir para determinar los parámetros B, C y K_1 .

Al finalizar esta primera etapa, se dispone de una estimación de los parámetros B, C y K_1 , que permiten definir la curva de probabilidad asociada al valor medio.

En la segunda etapa se trata de mejorar la estimación de B, C y K_1 y de determinar los parámetros restantes, A, D y E. Con los cinco parámetros se pueden ya calcular los percentiles correspondientes a las probabilidades de interés (por ejemplo $P = 0$ y 0.05). Se recuerda que en el cálculo a fatiga, el interés del calculista radica en conocer el número de ciclos asociado al valor de una probabilidad baja.

La estrategia a seguir en esta segunda etapa es más sencilla de establecer. Así, la elección del número de niveles y de ensayos por nivel tiene ahora sólo una influencia en el resultado final, en tanto que los nuevos resultados modifiquen el valor de B y C. Esto es debido a que en el proceso de normalización el nivel de procedencia resulta irrelevante. En consecuencia, se puede optar tanto por una estrategia en cascada como por una estrategia en grupos, reduciendo el número de niveles pero incrementando el número de ensayos por nivel.

En la práctica, los programas de ensayos suelen realizarse con un número reducido de niveles (entre otras razones por comodidad y por el general desconocimiento del modelo de regresión) lo que permite una estimación más simple de la curva S-N. Por otro lado, existe un número óptimo de ensayos por nivel (ver apartado 4) a partir del cual, los ensayos

adicionales no mejoran ostensiblemente el ajuste ni, consecuentemente, la fiabilidad de los resultados

Por lo tanto, para esta etapa se propone una solución de compromiso entre los dos métodos anteriores (en cascada y en grupos), es decir un número razonable de niveles, con un número de ensayos por nivel cercano al óptimo. En la figura 3 se muestra cómo a los ensayos de la primera etapa realizados en cascada, se añaden los realizados en la segunda etapa, con un número más reducido de niveles.

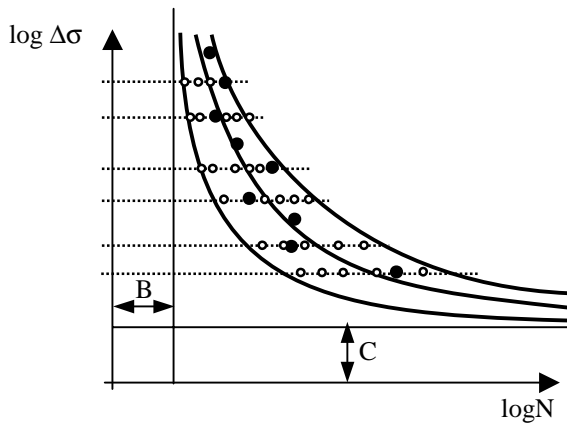


Fig. 3. Estrategia a seguir en la segunda etapa.

4. SIMULACIÓN.

Tanto en la primera etapa (ensayos en cascada) como en la segunda etapa, en la que se combinan los ensayos en cascada con los ensayos en grupo, el punto central es la estimación del número óptimo de ensayos a realizar, para lo cual se propone aquí aplicar técnicas de simulación, en las dos etapas mencionadas. Para este fin se partió de un programa experimental de fatiga [4] realizado en probetas cúbicas de hormigón en masa que constaba de 75 resultados uniformemente distribuidos en 5 niveles. Los niveles de tensión de ensayo, así como los parámetros obtenidos después de ajustar el modelo de Castillo quedan indicados en la figura 4.

En la simulación se analizó la influencia del número de niveles y la del número de ensayos por nivel. De este modo, una vez fijados el nivel de tensión máxima como $\sigma_{max} = 42.75$ MPa y el nivel de tensión mínima como $\sigma_{min} = 30.37$ Mpa, se distribuyeron los niveles de forma uniforme. En este programa de ensayos no resultaron datos censurados.

En cuanto al número de niveles se simularon desde un mínimo de 3 (número mínimo para el ajuste de los parámetros del modelo elegido) hasta un máximo de 20. En cuanto al número de ensayos por nivel, se simularon desde un mínimo de 1 ensayo por nivel hasta un máximo de 30.

Para cada pareja número de niveles-número de ensayos por nivel, se realizaron un total de 1000 simulaciones, a

partir de las cuales se determinaron los parámetros del modelo.

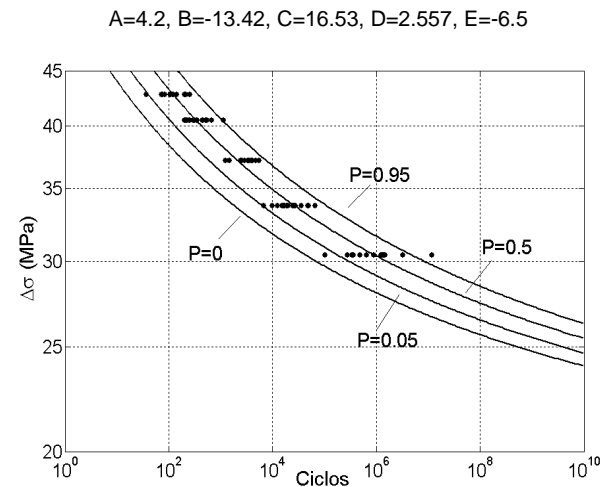


Fig 4. Ajuste del programa de ensayos.

Los parámetros del modelo de Castillo et al. están restringidos, por lo que alguna de las simulaciones puede dar lugar a parámetros que no cumplen las restricciones (especialmente cuando el número total de ensayos es reducido), lo que no tiene sentido físico [5]. En este caso se procede a la repetición de la simulación, que se considera fallida. De este modo se obtienen curvas similares a la representada en la figura 5, que corresponde a una simulación con 5 niveles de tensión. Se destaca el hecho de que la ocurrencia de valores de parámetros A, B, C, D y E sin sentido físico, puede suceder también en un caso de ajuste real de resultados de ensayos.

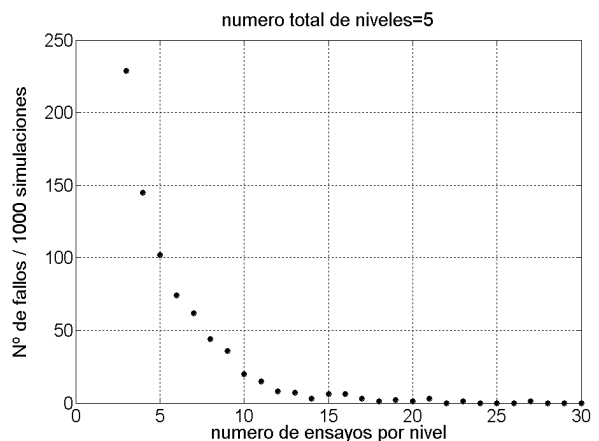


Fig 5. Número de evaluaciones fallidas para el caso de 5 niveles de tensión.

No obstante, hay que señalar, que en todas las simulaciones los valores obtenidos de los parámetros B y C cumplieron las restricciones, por lo que la causa de las repeticiones se debió indefectiblemente a que alguno de los parámetros A, D o E quedaban fuera de

los márgenes. Cualitativamente se deduce que el número mínimo de ensayos necesario para proceder a la evaluación de B y C es menor que el que se precisa para realizar la de A, D y E.

Del análisis de las curvas se ha determinado que para que el número de fallos sea menor del 1%, se debe cumplir que el número total de ensayos sea aproximadamente 65, observándose que la distribución de los ensayos por niveles no tiene importancia en el resultado final.

Por cada número de niveles se obtienen curvas similares a las que se muestran en las figuras 6 y 7 para los distintos parámetros. En ambos casos se muestra el valor de partida del parámetro objeto de estudio así como la mediana y los intervalos de confianza al 95%, obtenidos mediante simulación.

En la figura 6 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros C (límite de endurencia del modelo), en el caso de realizar ensayos en 5 niveles de tensión. La dispersión obtenida disminuye de forma asintótica a medida que el número de resultados por nivel aumenta. Curvas similares se obtienen para los parámetros A, D y E. En la figura 7 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros D y E.

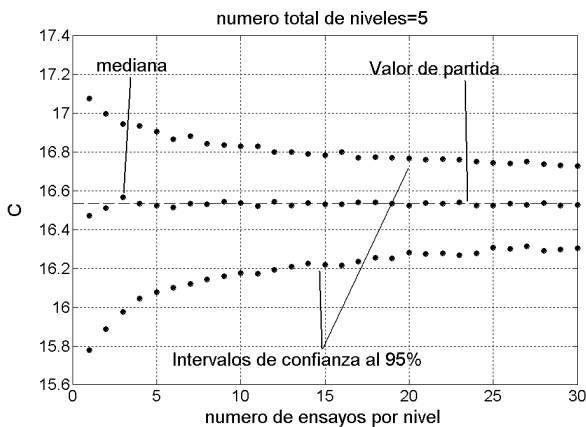


Fig 6. Valores obtenidos para los parámetros B y C del modelo de Castillo con 5 niveles de tensión

Tomando como referencia la variación de C obtenida para el caso de 20 niveles y 30 ensayos por nivel, $\Delta C_{ref} = 0.2723$, lo que representa 600 ensayos en total, en la tabla 1 se indica el número mínimo de ensayos por nivel que sería necesario realizar para que el error cometido en la estimación del parámetro C fuese menor que $2\Delta C_{ref} = 0.5446$, $3\Delta C_{ref} = 0.8169$, $4\Delta C_{ref} = 1.0892$, respectivamente. También se muestra el coste asociado a cada caso, para lo cual se ha tomado como precio de referencia 15 € por hora de ensayo a una frecuencia de 5 Hz, considerando además 1 hora para la preparación del ensayo, el montaje y

desmontaje de cada probeta. Resultados análogos se obtienen para el parámetro B.

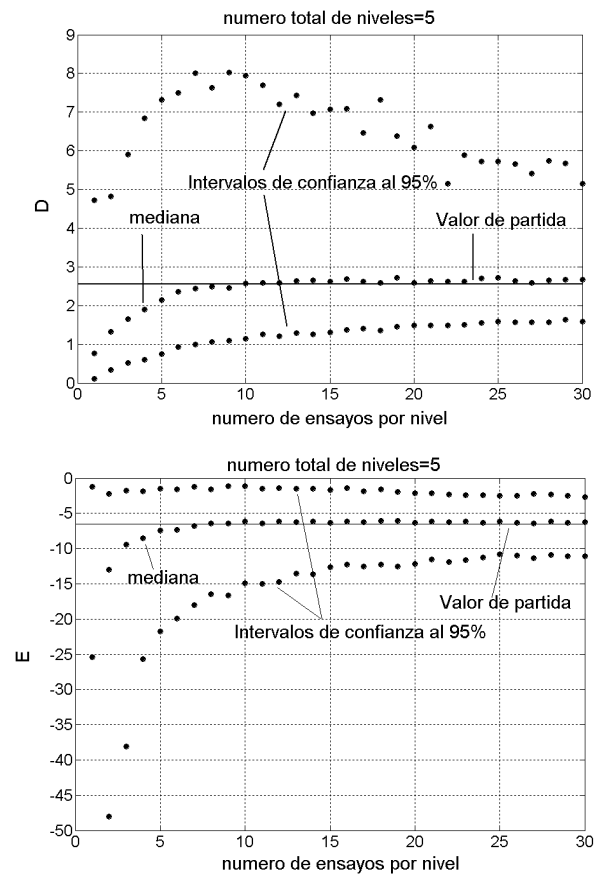


Fig 7. Valores de los parámetros D y E del modelo de Castillo et al. , para el caso de 5 niveles de tensión

El mismo proceso se ha seguido para el resto de los parámetros. En la tabla 2 se muestra el número mínimo de ensayos necesario para determinar el parámetro A, cuyos resultados son extrapolables para el parámetro D, y en la tabla 3 los correspondientes al parámetro E. Los valores de referencia, obtenidos para el caso de 20 niveles y 30 ensayos por nivel son $\Delta A_{ref} = 3.2756$, $\Delta D_{ref} = 1.72$ y $\Delta E_{ref} = 4.5520$.

Los resultados obtenidos muestran que para el mismo número de ensayos total, el nivel mayor de fiabilidad se obtiene en los parámetros B y C, correspondiendo a los parámetros A y D el menor nivel de fiabilidad. El parámetro E se sitúa en un valor intermedio.

En la tabla 1 se puede observar que con un número reducido de ensayos por nivel, se pueden obtener unos valores razonables de C. Para B se han deducido las mismas conclusiones.

Se constata también que, independientemente de la estrategia seguida, el número total de ensayos necesario

para alcanzar un mismo valor de fiabilidad se mantiene aproximadamente constante.

Tabla 1. Coste y número mínimo de ensayos por nivel para el parámetro C.

Nº de niveles	$\Delta C < 2\Delta C_{ref}$		$\Delta C < 3\Delta C_{ref}$		$\Delta C < 4\Delta C_{ref}$	
	Ensay por nivel	Coste €	Ensay. por nivel	Coste €	Ensay. por nivel	Coste €
3	21	35302	6	10086	3	5043
4	19	32554	6	10280	3	5140
5	17	29965	5	8813	3	5288
6	14	25583	4	7310	2	3655
7	12	22584	4	7618	2	3809
8	11	21901	4	7964	2	3982
9	11	22932	4	8339	2	4169
10	10	21838	4	8735	2	4368
15	8	21818	3	8182	2	5454
20	6	19853	3	9917	2	6618

Tabla 2. Coste y número mínimo de ensayos por nivel para el parámetro A.

Nº de niveles	$\Delta A < 2\Delta A_{ref}$		$\Delta A < 3\Delta A_{ref}$		$\Delta A < 4\Delta A_{ref}$	
	Ensay por nivel	Coste €	Ensay. por nivel	Coste €	Ensay. por nivel	Coste €
3	>30		29	48750	16	26896
4	>30		22	37694	14	23987
5	>30		19	33490	11	19389
6	29	52994	16	29238	8	14619
7	22	41899	14	26663	8	15236
8	21	41811	11	21901	6	11946
9	19	39609	9	18762	6	12508
10	16	34941	9	19655	6	13103
15	10	27272	7	19091	4	10909
20	9	19780	5	16544	2	6618

Tabla 3. Coste y número mínimo de ensayos por nivel para el parámetro E.

Nº de niveles	$\Delta E < 2\Delta E_{ref}$		$\Delta E < 3\Delta E_{ref}$		$\Delta E < 4\Delta E_{ref}$	
	Ensay por nivel	Coste €	Ensay por nivel	Coste €	Ensay por nivel	Coste €
3	>30		16	26896	9	15129
4	28	47974	15	25700	7	11993
5	23	40541	11	19389	6	10576
6	21	38375	9	16556	5	9137
7	18	34281	8	15236	5	9522
8	15	29865	7	13937	4	7964
9	13	27101	6	12508	4	8339
10	12	26206	6	13103	4	8753
15	8	21818	4	10909	3	8182
20	7	23162	4	13236	2	6618

Sin embargo, el coste total del programa de ensayos es siempre menor en el caso de la estrategia en cascada, que además presenta unas ventajas adicionales durante la realización de los ensayos, ya que permite definir los niveles de tensión correspondientes a la zona de fatiga de bajos ciclos, así como los niveles en los que presumiblemente cabe esperar que se vayan a obtener datos censurados (run-outs), debido a la proximidad del límite de durancia.

5. CONCLUSIONES

1. El modelo de Castillo, permite elaborar una estrategia de ensayos para la optimización en la planificación de programas experimentales.
2. Mediante técnicas de simulación se puede explorar la estrategia más adecuada a seguir en los ensayos.
3. Para el mismo número de ensayos, se obtiene una mayor fiabilidad en los parámetros B y C que en los parámetros A, D y E.
4. Se propone una estrategia en cascada para la determinación de los parámetros B y C (asíntotas del modelo) y una estrategia mixta para determinar A, D y E.
5. Para el mismo nivel de fiabilidad, el menor coste corresponde siempre a una estrategia en cascada.
6. El salto discreto en el número de niveles y de ensayos por nivel considerados conlleva una falta de tendencia clara en el coste total de los programas de ensayos (tablas 1 a 3), por lo que sería deseable un estudio más detallado de costes.

REFERENCIAS

[1] E. Castillo, A. Fernández Canteli, V. Esslinger, B.Thürlimann. "Statistical Model for Fatigue Analysis of Wires, Strands and Cables". IABSE Proceedings P-82/85, 1985.

[2] E. Castillo, A. Fernández Canteli. "A General Regression Model for Lifetime Evaluation and Prediction". Int. Journal of Fracture, Nº 107, pp. 117-137, 2001.

[3] M. López Aenlle, "Caracterización a fatiga de materiales compuestos bajo carga aleatoria y carga por bloques". Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 2000.

[4] Holmen, J.O., Fatigue of concrete by constant amplitude loading, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Doctoral Thesis, 1979.

[5] Castillo, E. and Hadi, A.S., J. of American Statistical Assoc., Vol 90, pp. 1041-1054, 1995.