

# METODOLOGÍA NUMÉRICA PARA EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE LAS TÉCNICAS DE CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES EN MECÁNICA DE LA FRACTURA

J.J. Ródenas, E. Giner, A. Vercher y A. Pedrosa

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales,  
Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera, s/n, 46022-Valencia

**Resumen.** El campo de velocidades ( $\mathbf{q}$ ) utilizado en la extracción numérica del factor de intensidad de tensiones (FIT) mediante métodos indirectos (energéticos), aunque debe cumplir ciertos requisitos teóricos y prácticos, no está unívocamente definido. Debido al error de discretización asociado al método de los elementos finitos (MEF) el valor del FIT evaluado a través de este método es función del campo de velocidades seleccionado. Los requisitos prácticos mencionados pueden ser utilizados para comparar los métodos de cálculo del campo de velocidades pero solo en términos cualitativos. En este artículo se presenta una metodología numérica que permite cuantificar la calidad de los distintos métodos de construcción del campo de velocidades utilizado en las técnicas energéticas de extracción del FIT. Esta metodología ha sido utilizada para comparar seis técnicas de construcción del campo de velocidades.

**Abstract.** The velocity field ( $\mathbf{q}$ ) used in the numerical evaluation of the stress intensity factor (SIF) when using indirect methods is not uniquely defined although it must satisfy certain theoretical and practical criteria. Due to the discretization error associated to the Finite Element Method (FEM) the value of the SIF evaluated through the FEM is a function of the selected velocity field. The practical criteria aforementioned can be used to compare the techniques used to evaluate the velocity field, but only in qualitative terms. This paper presents a numerical methodology for quality evaluation in quantitative terms of velocity field computation methods used in the indirect methods for SIF extraction. The proposed numerical methodology has been used to compare six velocity field computation methods.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los métodos más eficaces de extracción del FIT son los métodos energéticos, también llamados indirectos, como el método de la derivada de rigidez o el método EDI. Estos métodos están basados en la idea de extensión virtual de grieta, que está estrechamente relacionada con el concepto de campo de velocidades propio del análisis de sensibilidades de forma. La elección de campo de velocidades ha de cumplir ciertas restricciones teóricas (Choi y Chang [1]) aunque la forma concreta de esta función vectorial ha de ser determinada por el analista. Teóricamente los resultados del análisis de sensibilidades son totalmente independientes del campo de velocidades seleccionado, siempre que este cumpla las restricciones comentadas. Sin embargo, cuando el análisis de sensibilidades se realiza a través del MEF, los resultados son función del método de construcción del campo de velocidades utilizado. Esta dependencia es debida a que los resultados de análisis de EF (que serán utilizados en el cálculo de sensibilidades) están afectados por el error de discretización inherente al MEF.

## 2. EVALUACIÓN DEL FIT MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDADES

El FIT se puede relacionar con la norma energética de la solución de elementos finitos utilizando un enfoque energético del problema.

La tasa de liberación de energía  $\mathcal{G}$  para un problema bidimensional en mecánica de la fractura elástica lineal puede ser definida como:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi_p}{da} = \frac{d\Pi}{da} \quad (1)$$

donde  $\Pi_p$  es la energía potencial total que, en el caso de que la carga permanezca constante, es igual a la energía de deformación ( $\Pi$ ) cambiada de signo ( $\Pi_p = -\Pi$ ), y  $a$  es la longitud de la grieta.

Puesto que el cuadrado de la norma energética de la solución,  $\|\mathbf{u}\|$ , es igual al doble de la energía de deformación ( $\|\mathbf{u}\|^2 = 2\Pi$ ) se tendrá que:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{d\|\mathbf{u}\|^2}{da} = \frac{1}{2} \chi \quad (2)$$

donde  $\chi$  representa la derivada del cuadrado de la norma energética con respecto a la longitud de grieta.

Por otro lado, la velocidad de relajación de energía  $G$  y el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$K_I = \sqrt{E'G} \quad (3)$$

siendo  $E'=E$  en tensión plana y  $E'=E/(1-\nu^2)$  para deformación plana, donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. Así pues los valores de  $K_I$  y  $\chi$  estarán relacionados mediante

$$K_I = \sqrt{\frac{1}{2}E'\chi} \quad (4)$$

### 3. CUANTIFICACIÓN DEL ERROR EN EL CÁLCULO DE SENSIBILIDADES DE FORMA

El campo de desplazamientos ( $\mathbf{u}$ ) obtenido mediante el MEF es tan solo una aproximación al campo de desplazamientos exacto debido a la naturaleza aproximada del método. El error de la solución asociado a la discretización mediante EF es llamado **error de discretización**. La siguiente expresión, basada en la norma energética de la solución ( $\|\mathbf{u}\|$ ), es habitualmente utilizada en su cuantificación:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) d\Omega \\ &\approx \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2$  representa el error exacto en norma energética,  $\mathbf{u}_{ex}$  y  $\mathbf{u}_{ef}$  son los campos de desplazamientos exacto y de elementos finitos,  $\boldsymbol{\sigma}_{ex}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$  son las tensiones exacta y de elementos finitos,  $\mathbf{D}$  es la matriz que relaciona tensiones con deformaciones y  $\Omega$  es el dominio del problema.

Los resultados del análisis de sensibilidades, y por lo tanto del FIT, evaluados a través del MEF también están afectados del error de discretización asociado al modelo de EF.

Tomando como referencia el método de cuantificación del error utilizado con los resultados del análisis de elementos finitos se ha considerado conveniente utilizar la **sensibilidad del cuadrado de la norma energética** con respecto a la variable de diseño considerada, que en el caso particular de extracción del FIT resulta ser la longitud de la grieta  $a$  considerada ( $\partial\|\mathbf{u}\|^2/\partial a = \chi$ ) como magnitud para la cuantificación del error de discretización en sensibilidades:

$$\chi = \frac{\partial\|\mathbf{u}\|^2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right) = \frac{\partial 2\Pi}{\partial a} \quad (6)$$

El error en la sensibilidad del cuadrado de la norma energética ( $e(\chi)_{ex}$ ), se prodrá evaluar mediante la expresión:

$$e(\chi)_{ex} = \chi_{ex} - \chi_{ef} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \right) \quad (7)$$

Esta magnitud y la definición de error correspondiente han sido utilizadas con anterioridad en [2,3,4] en el desarrollo de un estimador para la evaluación de un estimador de error y en [5] en el desarrollo de un estimador de error del factor de intensidad de tensiones obtenido a través del análisis de sensibilidades y el MEF.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (7) se tendrá:

$$e(G)_{ex} = \frac{1}{2}(\chi_{ex} - \chi_{ef}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \right) = \frac{1}{2} e(\chi)_{ex} \quad (8)$$

### 4. RELACIÓN ENTRE ERROR EN NORMA ENERGÉTICA Y ERROR EN SENSIBILIDADES.

El método utilizado para cuantificar el error de discretización en el análisis de sensibilidades se ha basado en el método utilizado para determinar el error de discretización de la solución de EF. Resulta importante investigar la relación entre estos errores.

Considérese en primer lugar la expresión (5) en (7)

$$e(\chi_m)_{ex} = \frac{\partial}{\partial a_m} \left( \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial a_m} \left( \|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2 \right) \quad (9)$$

Considerando la versión  $h$  del método de los elementos finitos, en el problema elástico 2-D, el error de discretización en norma energética es según [6]:

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\| \approx CN^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)} = CN^{-\frac{1}{2}c} \quad (10)$$

donde  $N$  es el número de grados de libertad,  $p$  es el grado de los polinomios usados en la interpolación de desplazamientos,  $\lambda$  es la constante que caracteriza la intensidad de la singularidad,  $C$  es constante y positiva para un dominio y grado  $p$  determinados y por lo tanto no depende del tamaño de los elementos utilizados ni, por tanto, de  $N$  y  $c$  es el valor mínimo entre  $p$  y  $\lambda$ . Considerando (10) en (9):

$$\begin{aligned} e(\chi)_{ex} &\approx \frac{\partial\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2}{\partial a} \approx \frac{\partial(C^2 N^{-c})}{\partial a} \\ &= 2C \frac{\partial C}{\partial a} N^{-c} = 2CC_a N^{-c} \end{aligned} \quad (11)$$

Siendo  $C_a$  la derivada de  $C$  con respecto a la longitud de la grieta  $a$ , que es la variable de diseño considerada, que por lo tanto será, al igual que  $C$ , una constante que

no depende del tamaño de elemento utilizado en la discretización. Considerando ahora las ecuaciones (10) y (11) se obtiene:

$$\frac{e(\chi)_{ex}}{\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2} \approx \frac{2CC_a N^{-c}}{C^2 N^{-c}} = \frac{2C_a}{C} = R \quad (12)$$

Esta expresión muestra que, en ausencia de errores distintos al de discretización, el error en la sensibilidad de la norma energética (error de discretización en sensibilidades) y el cuadrado del error en norma energética están relacionados a través de la constante  $R$ . Puesto que  $R$  no es función del número de grados de libertad  $N$ , el valor de  $e(\chi)/\|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|^2$  debería, teóricamente, permanecer constante en una secuencia de mallas  $h$ -refinadas.

### 5. METODOLOGÍA PARA EVALUAR LA CALIDAD DE LAS TÉCNICAS DE CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES

Debido a la discretización del MEF los resultados del análisis de sensibilidades dependen del campo de velocidades considerado. Por tanto, cuando se evalúa en una secuencia de mallas  $h$ -refinadas su valor variará con la malla considerada. Así pues, la evolución de  $e(\chi)/\|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|^2$  en una secuencia de mallas  $h$ -refinadas puede ser utilizada como indicador para evaluar la calidad del campo de velocidades utilizado. Los mejores campos de velocidades sería aquellos que proporcionan los valores más estables de  $e(\chi)/\|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|^2$  en la secuencia de mallas utilizada.

Si en un problema singular se conocen los valores exactos de  $\|\mathbf{u}\|$  y  $\chi$  (y por lo tanto de  $\mathcal{G}$ ), y se dispone de una secuencia  $h$ -refinada de mallas para el mismo, la siguiente metodología podrá ser utilizada para evaluar la calidad de los distintos métodos de computación del campo de velocidades:

1. Evaluación de  $\|\mathbf{u}_{ef}\|$  y  $\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2 = \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2$  para cada malla de la secuencia.
2. Evaluación de  $\chi_{ef}$  y  $e(\chi)_{ex} = \chi_{ex} - \chi_{ef}$  para cada malla de la secuencia con cada uno de los métodos de construcción del campo de velocidades considerados.
3. Representación de la evolución de  $e(\chi_{ex})/\|\mathbf{e}(\mathbf{u})_{ex}\|^2$  para cada uno de los métodos de construcción del campo de velocidades considerados.
4. Selección del método con los resultados más estables.

Se ha de tener en cuenta que la ecuación (12) solamente es cierta en ausencia de errores distintos al de discretización. La introducción de otro tipo de errores durante el proceso de análisis de sensibilidades, como por ejemplo los asociados a cálculos mediante

diferencias finitas, podría distorsionar los resultados. Para evitar este tipo de problemas, en este artículo se ha utilizado el Método Discreto Analítico [7,8,9], que no introduce errores distintos al de discretización.

### 6. MÉTODOS DE CÁLCULO DEL CAMPO DE VELOCIDADES

En este artículo, mediante la metodología propuesta en la sección anterior, se han comparado 6 técnicas de construcción del campo de velocidades. Las técnicas *Plateau*, *Adyacente*, *Piramidal* y *Anular* analizadas en este artículo pueden encontrarse descritas en [10]. La descripción de la técnica *Malla de Contorno*, también llamada de *Triangulación de Contorno*, puede encontrarse en [4 y 10], mientras que la técnica *Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales* es descrita en [4].

Los campos de velocidades se han definido especificando los valores nodales del campo de velocidades y posteriormente interpolando mediante la funciones de forma estándar del MEF a los puntos del interior de cada elemento.

Respetando las condiciones de  $q_x = 1$  en el extremo de grieta y  $q_x = 0$  en el resto del contorno (salvo en las caras de grieta), los campos de velocidades analizados se definen con arreglo a los siguientes criterios:

**Plateau:** Distribución tipo meseta ( $q_x = 1$  en todos los nodos salvo aquellos del contorno exterior).

**Adyacente:** El campo de velocidades se distribuye únicamente en el interior de elementos adyacentes al extremo de grieta ( $q_x = 1$  en el nodo de extremo de grieta y  $q_x = 0$  en los demás nodos).

**Piramidal:** Distribución tipo piramidal con el *vértice de la pirámide* en el nodo del extremo de grieta ( $q_x = 1$  en el nodo de extremo de grieta,  $q_x = 0$  en el contorno exterior y evolución lineal entre ambos valores para el resto de nodos).

**Anular:** Distribución anular para un anillo de elementos en las cercanías del extremo de la grieta. Es una distribución tipo *plateau* en dicho entorno.

**Malla de contorno:** Se trata de una distribución calculada a partir de la llamada malla de contorno, que es una triangulación del dominio analizado donde los vértices de los triángulos están siempre situados en el contorno del modelo. El valor del campo de velocidades en los nodos del interior del dominio se evalúa por interpolación a partir de los valores conocidos del campo de velocidades en el contorno una vez que se ha identificado el triángulo de la malla de contorno que contiene al nodo.

**Diferenciación Exacta de coordenadas nodales:** Sea cual sea el método utilizado para mallar el dominio, la localización de los nodos del interior del mismo

siempre puede ser expresada como función de la localización de los nodos del contorno. Por lo tanto, derivando todas las expresiones utilizadas para definir la situación de los nodos del interior y utilizando la regla de la cadena, el campo de velocidades en los nodos interiores siempre podrá ser expresado como una función del campo de velocidades en los nodos del contorno. Esta técnica puede ser considerada como un límite del método de las diferencias finitas para la obtención del campo de velocidades en la que la diferenciación se realiza analíticamente.

7. EJEMPLO DE VERIFICACIÓN NUMÉRICA.

El problema considerado para realizar los análisis corresponde al de una secuencia infinita de grietas colineales sometidas a tracción constante  $\sigma$ . Según Kanninen y Popelar [11], en este problema el valor exacto del factor de intensidad de tensiones  $K_I$  (ver Fig. 1) viene dado por la expresión:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \tag{13}$$

En la Fig. 1 se representa la secuencia de grietas junto con el modelo y datos utilizados en el análisis.

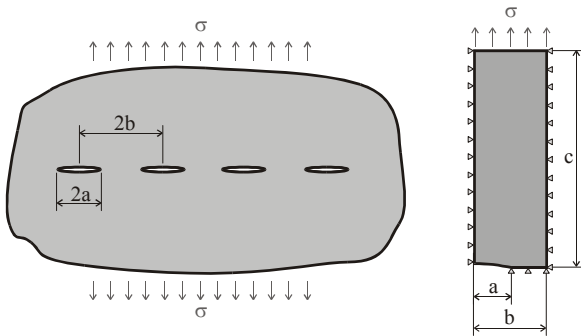


Fig. 1. Secuencia infinita de grietas y modelo para análisis. Datos:  $E=10^7$ ,  $\nu=0.333$ ,  $\sigma=200$ ,  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=6$ , Deformación plana.

La placa, de dimensiones infinitas, está sujeta a una tensión  $\sigma$  constante en sus extremos. Para modelar esta condición de contorno en el modelo de elementos finitos ha sido necesario utilizar una dimensión  $c$  (altura del modelo) suficientemente grande. Se considera que para altura seleccionada el efecto de la grieta es despreciable en el contorno superior pudiéndose suponer sobre éste una distribución de tensiones uniforme.

Para los datos utilizados en el modelo se tendrá que:

$$K_I = 200$$

$$G = 0.003556444 \rightarrow \chi = 2G = 0.007112888$$

Puesto que la grieta tiene una parte superior y una parte inferior, el valor de  $\chi$  expuesto sería el que se obtendría al modelizar ambas partes. Sin embargo, el modelo utilizado en los análisis numéricos solamente

utiliza la parte superior de la grieta, por lo que los valores de  $\chi$  obtenidos directamente del cálculo se aproximarán a la mitad del valor expuesto. Así pues el valor de  $\chi$  con que se compararán los resultados numéricos es de:

$$\chi = 0.003556444$$

Puesto que en este problema no existe una expresión que proporcione el valor exacto de  $\|u\|$ , para determinar el error en energía de deformación se ha tomado el resultado obtenido en una malla muy refinada (23811 GDL, 12059 nodos, 5918 elementos) obtenida a través de un proceso  $h$ -adaptativo con elementos triangulares cuadráticos, con un error estimado de un 0.0753%, evaluado mediante el estimador de error de Zienkiewicz-Zhu [12] utilizando la técnica SPR [13]. En esta malla, que se utilizará como malla de referencia, el valor de  $\|u\|^2$  que será considerado como el exacto en este problema es de:

$$\|u_{ex}\|^2 = 2 \cdot \Pi = 0.00958$$

7.1. Secuencias de mallas

En los análisis numéricos se han utilizado las 2 secuencias de mallas que se muestran en las figuras siguientes, y que han sido obtenidas mediante un proceso  $h$ -adaptativo que utiliza el estimador de error de Zienkiewicz-Zhu [12]. Para la obtención de los campos alisados de tensiones se ha utilizado la técnica de promediado directo en nodos para la secuencia de elementos lineales y la técnica SPR (Superconvergen Match Recovery) [13] para la secuencia de elementos cuadráticos.

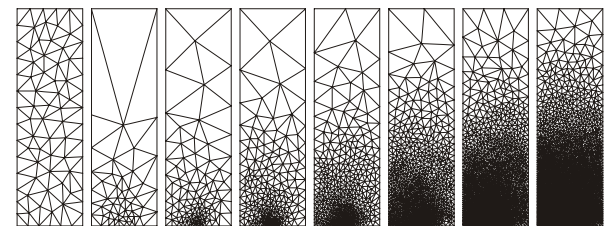


Fig. 2. Elementos lineales. Secuencia de 8 mallas.

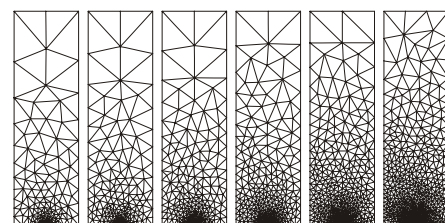
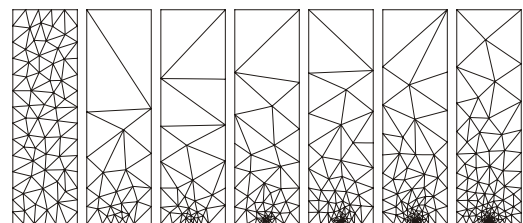


Fig. 3. Elementos cuadráticos. Secuencia de 13 mallas.

8. RESULTADOS NUMÉRICOS

8.1. Representación de los campos de velocidades

En la figura siguiente se muestran los campos de velocidades correspondientes a la primera malla de la secuencia análisis con elementos lineales analizados en este artículo según la metodología propuesta en la sección anterior. En las figuras se representa el módulo del campo de velocidades  $|q|$  en el dominio analizado.

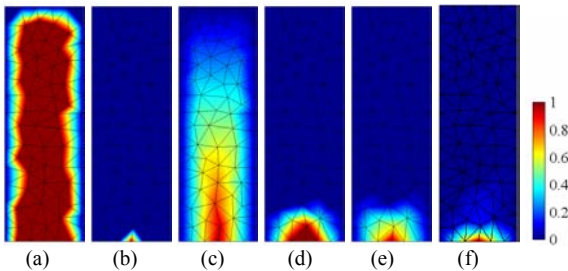


Fig. 4. Módulo de los campos de velocidades. (a)Plateau, (b)Adyacente, (c)Piramidal, (d)Anular, (e)Malla de Contorno, (f)Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales.

Las técnicas de evaluación del campo de velocidades descritas en la Sección 6 han sido comparadas mediante la metodología expuesta en la Sección 5 utilizando el problema presentado en la Sección 7. En las figuras siguientes se muestra la evolución de  $R$ , ec. (12) en cada una de las secuencias de mallas.

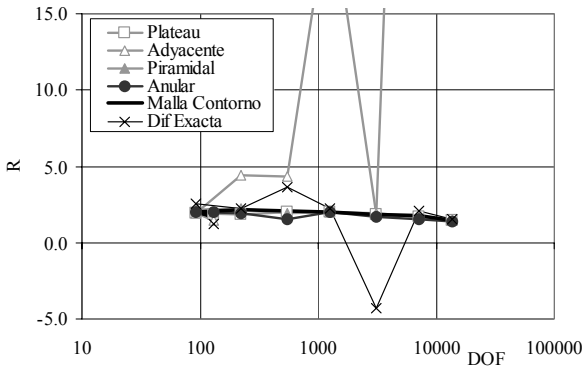


Fig. 5. Evolución de  $R = e(\chi_{ex})/\|e(\mathbf{u})_{ex}\|^2$  para la secuencia de mallas con elementos lineales.

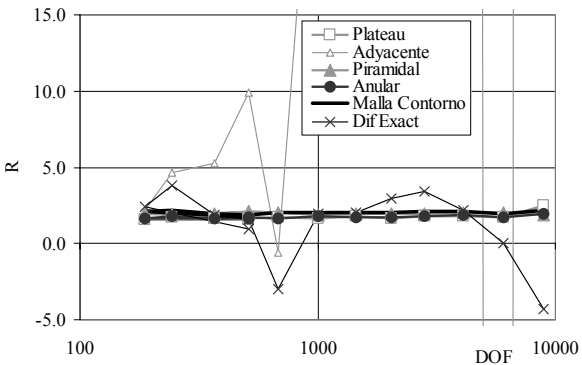


Fig. 6. Evolución de  $R = e(\chi_{ex})/\|e(\mathbf{u})_{ex}\|^2$  para la secuencia de mallas con elementos cuadráticos.

Otra forma de observar los resultados es evaluar la desviación estándar  $\sigma$  de los valores de  $R$  en cada una de las secuencias de mallas analizadas y utilizar este parámetro como medida de la estabilidad de los resultados de  $R$ . Los resultados obtenidos podrán considerarse tanto más estables cuanto menor sea el valor de  $\sigma(R)$  obtenido. La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos con cada uno de las técnicas analizadas.

Tabla 1. Desviación estándar de los valores de  $R$ .  $\sigma(R)$

Método	Elem.	Elem.
	Lineales	Cuadráticos
Plató	0.1835	0.2308
Adyacente	31.0403	843.4015
Piramidal	0.2387	0.0724
Anular	0.2571	0.0982
Malla Contorno	0.2193	0.1276
Diferenciación Exacta	2.4077	2.3933

Los resultados mostrados tanto en las Figs. 5 y 6 como en la Tabla 1 muestran claramente que dos de los métodos comparados, el *Adyacente* y el de *Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales*, presentan evoluciones de  $R$  claramente inestables. Mientras que el resto de métodos presentan comportamientos muy similares en ambos problemas no destacando ninguno de ellos sobre los demás.

No resulta extraño que los resultados obtenidos mediante el método *Adyacente* sean peores que los obtenidos con el resto de métodos ya que con esta técnica el campo de velocidades obtenido es no-nulo únicamente en los elementos conectados al nodo del extremo de grieta, donde los resultados son poco precisos por tratarse de un punto singular.

Sin embargo, los malos resultados obtenidos mediante la técnica de *Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales* resultan en, cierta forma, sorprendentes. En principio se esperaría obtener buenos resultados ya que la evaluación del campo de velocidades (derivada de las posiciones de los nodos con respecto a la variación de las variables que definen la geometría, que en el caso que nos ocupa es la longitud de grieta) se realiza analíticamente. El mal comportamiento de esta técnica queda justificado observando por ejemplo el detalle del campo de velocidades que se representa en la Fig. 7.

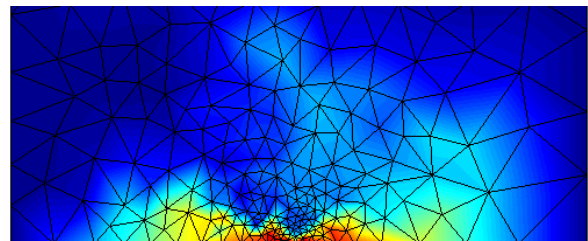


Fig. 7. Detalle del campo de velocidades en las inmediaciones del extremo de grieta obtenido mediante la técnica de Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales. Malla 4 de la secuencia de elementos lineales.

En la figura se observa que el campo de velocidades obtenido presenta un aspecto muy irregular. Esto es debido a que en el generador de mallas utilizado, basado en triangulación de Delaunay, la posición de los nodos resulta muy sensible a las variaciones del contorno exterior. Es de esperar que en caso de utilizar un generador de mallas distinto los resultados obtenidos serían muy diferentes a los obtenidos en este artículo. Por ejemplo, en el caso de utilizar un generador de mallas estructuradas, previsiblemente los resultados serían mucho mejores. Esto es debido a que, en este tipo de generadores de malla, la localización de los nodos no es tan sensible a las variaciones del contorno exterior como en los malladores basados en triangulación de Delaunay.

## 9. CONCLUSIONES

Se ha expuesto una metodología numérica que permite evaluar la calidad de las técnicas de construcción del campo de velocidades utilizado en mecánica de la fractura.

La metodología planteada ha sido utilizada para comparar seis técnicas de construcción del campo de velocidades.

Los resultados de los análisis muestran que, para el generador de mallas utilizado, los mejores métodos de construcción del campo de velocidades son las técnicas *Plateau*, *Piramidal*, *Anular* y *Malla de Contorno*, con las que se obtienen resultados de calidad similar. Así mismo los resultados de los análisis realizados desaconsejan la utilización de los métodos *Adyacente* y de *Diferenciación Exacta de Coordenadas Nodales* con el generador de mallas utilizado.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto de investigación DPI2001-2400-C02-02.

## REFERENCIAS

- [1] Choi, K. y Chag, K.H. "A study of design velocity field computation for shape optimal design". *Finite Elements in Analysis and Design*, 15, 317-341 (1994).
- [2] Fuenmayor, J.; Oliver, J.L.; Ródenas, J.J. y Tarancón, J.E. "Extensión del estimador de Zienkiewicz-Zhu al análisis de sensibilidades de Forma. Estudio de efectividad y Convergencia" *Métodos Numéricos en Ingeniería*. Vol.2 1756-1755. Semni, Barcelona (1996).
- [3] Fuenmayor, F.J.; Oliver, J.L. y Ródenas, J.J. "Extensión of the Zienkiewicz-Zhy error estimator to shape sensitivity analysis". *Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1413-1433 (1997)
- [4] Ródenas, J.J. "Error de discretización en el cálculo de sensibilidades mediante el método de los elementos finitos". Tesis Doctoral. Dep. Ingeniería Mecánica y de Materiales. Univ. Politécnica de Valencia. (2001)
- [5] Fuenmayor, J.; Domínguez, J.; Giner, E. y Oliver, J.L. "Calculation of stress intensity factor and estimation of its error by a shape sensitivity analysis". *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 20, 813-828 (1997).
- [6] Craig, A.V.; Ainsworth, M.; Zhu, J.Z y Zienkiewicz, O.C. "h and h-p version error estimation and adaptive procedures from theory to practice". *Engineering with Computers*, 5, 221-234 (1989).
- [7] El-Sayed, M.E.M. y Zumwalt, K.W. "Efficient Design sensitivity Derivatives for Multi-Load Case Structures as an Integrated Part of Finite Element Analysis". *Computers and Structures*, 40, 1461-1467 (1991)
- [8] Fuenmayor, F.J.; Cuadrado, J.I. y Nieto, J. "Un Método Eficiente de Cálculo de Derivadas de la Matriz de Rigidez en Optimización de Forma Bidimensional". AIMETA (1984).
- [9] Wang, S.H.; Sun, Y. y Gallagher, R.H. "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures". *Computers and Structures*, 33, 1089-1093 (1985).
- [10] Giner, E. "Estimación del error de discretización en el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos". Tesis Doctoral. Dep. Ingeniería Mecánica y de Materiales. Univ. Politécnica de Valencia. (2001).
- [11] Kanninen, M.F. y Popelar, C.H. "Advanced Fracture Mechanics". Oxford Engineering Science Series. Oxford University Pres, p 152.
- [12] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. "A simple Error Estimation and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*", 24, 337-357 (1987).
- [13] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. "The Superconvergent Match Recovery and a-posteriori Error Estimates. Part I: The Recovery Technique". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*", 33, 1331-1364 (1992).