

# UNA NUEVA HERRAMIENTA DE FIABILIDAD, EN FATIGA DE METALES, ANTE ESPECTROS DE CARGA A TRAVÉS DE ELEMENTOS FINITOS PROBABILISTAS

Jorge Grasa, Rafael Ferrer, José A. Bea.

Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales (GEMM). Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A), Universidad de Zaragoza, María de Luna, 3, CP-50018, España

**Resumen.** En el presente artículo se muestra una nueva herramienta de fiabilidad ante espectros de carga. Se considera el proceso de acumulación de daño como una cadena de Markov, donde tanto el tiempo (ciclos) como el daño se consideran discretos. Así pues la solución del problema consiste en determinar la MPT (matriz de probabilidad de transición) asociada con la fatiga ante el espectro de cargas considerado. Se parte de la obtención de la matriz rainflow del espectro. Con cada ciclo individual que se obtiene se determina la MPT que originaría tal carga considerada aisladamente. La combinación final del espectro total se obtiene multiplicando todas las MPT, donde el orden es tenido en cuenta de manera natural a través del producto de matrices. De esta forma se puede obtener vida frente a probabilidad de fallo. Cada MPT individual se obtiene usando como herramienta el método de los elementos finitos probabilistas. Esta última fase es idéntica a la descrita en otros artículos de los autores de este trabajo.

**Abstract.** In the present work a new tool of reliability related to the load spectrum is shown. The cumulative damage process is modeled as a Markov's chain, where time (cycles) as damage is considered discreet. Therefore the solution of the problem consists of determining the PTM (Probability Transition Matrix) associated with the fatigue induced by the spectrum used. We start obtaining the rainflow matrix of the spectrum. With each individual cycle that is obtained it is determined the PTM that would originate such load separately. The final combination of the total spectrum is obtained multiplying all the PTM, where the order is taken into account in a natural way via matrix multiplication. In that way life vs. failure probability can be obtained. Each individual PTM is calculated using the probabilistic finite elements method. This last phase is identical to the described in other articles of the authors of this work.

## 1. INTRODUCCIÓN

Es bien sabida la influencia que sobre la vida a fatiga tienen los efectos de secuencia en las cargas [1, 6, 7].

Este trabajo se encuadra en el estudio de la fatiga ante espectros de carga, si bien se soslayan sus posibles efectos de multiaxialidad. Se plantea simular el proceso de acumulación de daño en fatiga como una cadena de Markov. Así pues, usando como herramienta un conteo de ciclos tipo rainflow [8, 9] se determinan las oscilaciones simples de carga determinadas por su nivel medio, amplitud y frecuencia relativa de aparición, las cuales constituyen el espectro considerado. Como se verá en el artículo, para cada oscilación simple de carga se determina una matriz de probabilidad de transición (MPT) asociada, para cuya obtención es preciso utilizar el método de los elementos finitos probabilistas. Este último procedimiento no es cubierto en este artículo, siendo los detalles similares a los descritos en trabajos de Bea et al. [2, 3, 4, 5, 11]. Por último indicar que los efectos de secuencia se obtienen de manera natural a través del producto matricial entre las citadas matrices de probabilidad de transición.

Es importante destacar que, dado un espectro, se determina su contenido en oscilaciones simples (conteo tipo rainflow), y que posteriormente se deben obtener todas las combinaciones posibles de tales oscilaciones,

respetando su frecuencia relativa de aparición. Este hecho conlleva el que para cada ordenación particular de estas oscilaciones (que se repiten hasta conseguir la frecuencia relativa del espectro), va a generar una secuencia de multiplicaciones de las matrices de probabilidad de transición asociadas (ver epígrafe 2), las cuales conducirán a la obtención de una determinada función de distribución del fallo a fatiga del componente considerado. En definitiva, dado que la secuencia particular que se obtiene, fruto de la materialización particular del espectro considerado, es aleatoria, esto implica que la función de distribución que se obtiene es aleatoria también, y por tanto es necesario tener en cuenta su dispersión.

La exposición del artículo es la siguiente: en el epígrafe 2 se indican los fundamentos del modelo de daño acumulado que se ha utilizado en este trabajo. En el siguiente epígrafe se describen las bases del método de los elementos finitos probabilistas. A continuación se presentan resultados obtenidos con el modelo, para finalizar con el capítulo de conclusiones.

## 2. MODELO B DE ACUMULACIÓN DE DAÑO.

El modelo aquí presentado está basado en los modelos estadísticos de daño acumulado propuestos inicialmente Bogdanoff y Kozin [1], para la caracterización estadística de series de ensayos correspondientes a

distintos problemas de daño acumulado entre ellos el problema de fatiga. Estos modelos (en adelante, modelos B) están basados en cadenas de Markov y se caracterizan por una serie de hipótesis básicas a las que pueden añadirse otras para definir un determinado tipo de modelo B. Las hipótesis básicas de estos modelos son las siguientes:

1. Los “ciclos de daño” considerados (en adelante CD) son de severidad constante, lo que significa que durante la vida del componente suceden una serie de procesos de "ataque", de tal forma que cualquier acción que suceda durante uno de ellos ocurre igualmente en todos.
2. Los niveles de daño son discretos  $1, 2, \dots, j, \dots, b$ , lo que implica que la vida del componente finaliza cuando se alcanza el nivel  $b$ , que significa físicamente, por tanto, el fallo de la pieza o el fin de la fase de daño considerado (por ejemplo el fin de la nucleación y comienzo de la propagación).
3. La acumulación de daño en un CD depende sólo del propio CD y del nivel de daño en el inicio del CD.
4. Se considerarán tan solo modelos B de los denominados de salto unidad, lo que implica que de un CD solamente puede pasarse a lo sumo al nivel inmediatamente superior, siendo los diferentes niveles a lo largo del proceso estados de transición, mientras que el nivel final  $b$  de fallo es un estado de absorción, ya que desde él no se produce transición alguna a cualquier otro estado.

Estas hipótesis conducen a un modelo de daño acumulado de tipo proceso de Markov estacionario, discreto en el tiempo y de estados finitos [1]. Con ello, utilizando los resultados de las cadenas de Markov, se puede escribir inmediatamente

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^t = \mathbf{p}_{t-1} \mathbf{P} \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

con

$$\mathbf{p}_t = \{p_t(1), \dots, p_t(b)\} \quad (2)$$

el vector de probabilidad de alcanzar cada uno de los estados  $1, 2, \dots, b$  en un tiempo  $t$ ,  $\mathbf{p}_0$  la distribución inicial de los niveles de daño para  $t=0$  y  $\mathbf{P}$  la denominada matriz de probabilidad de transición que, por la primera hipótesis es constante para todos los ciclos al tener éstos la misma severidad y, puesto que sólo puede irse de un nivel de daño al inmediato superior, debe ser de la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo  $p_j$  la probabilidad de permanecer en el nivel  $j$  durante un CD, y  $q_j$  la probabilidad de que en un CD el daño avance del nivel  $j$  al  $j+1$ , cumpliéndose, por tanto que  $1 > p_j > 0$ ,  $p_j + q_j = 1$ .

Denotaremos por  $W_b$  la variable aleatoria “tiempo necesario para alcanzar el estado  $b$ ”, siendo  $F_W(t; b)$  su función de distribución, que cumple

$$F_W(x; b) = P\{W_b \leq x\} = p_x(b), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

La esperanza y los primeros momentos centrales de  $W_b$  se pueden obtener en función de  $p_j$ ,  $r_j$  tal como se plantea, por ejemplo en [1]. Asimismo, a partir de los valores de las medias y varianzas de la variable  $W_b$  para una serie de niveles de daño es posible calcular los valores de  $p_j$ ,  $q_j$  para cada uno de dichos estados. En definitiva, para la construcción de la matriz de transición que define el modelo B será necesario evaluar los estadísticos (media y varianza) de la vida a fatiga para una serie de niveles de daño. Su obtención se plantea mediante un análisis por elementos finitos probabilistas (método de la perturbación, epígrafe 3).

## 2.1 Tratamiento estocástico de los espectros de carga.

La variación temporal de la sollicitación mecánica se descompone en un conjunto de niveles de carga, cada uno de los cuales se corresponde con una oscilación simple. Esto es, cada uno de los niveles considerados tiene el tratamiento de un CD simple, ya descrito. Dado el enfoque orientado a fatiga en metales de este trabajo, una forma de obtener esta discretización es obteniendo la matriz rainflow del espectro de cargas considerado, a partir de la cual conocemos el valor medio, la amplitud y la frecuencia relativa dentro del espectro de cada una de las oscilaciones simples que lo integran.

Tal y como se describe en [2, 3, 4, 5, 11], utilizando el método de los elementos finitos probabilistas y los modelos B, se estiman los estadísticos (medias y varianzas) de la vida a fatiga, para cada una de las oscilaciones simples en las que se ha descompuesto el espectro de cargas considerado, lo que permite obtener las matrices de probabilidad de transición  $\mathbf{P}_i$  asociadas a cada oscilación simple. Una vez obtenidas es necesario ordenarlas de una determinada forma para obtener una matriz de probabilidad total, que será el producto de las

$P_i$  siguiendo el citado orden, repitiéndose cada una de ellas las veces necesarias para que su frecuencia de aparición coincida con la del espectro. Esto refleja el orden de actuación de las oscilaciones que integran el espectro. Sin embargo, para reproducir el espectro aleatorio es necesario considerar todas las ordenaciones posibles, respetando la frecuencia relativa de aparición de cada oscilación. Para tener en cuenta todas las posibles permutaciones de cada  $P_i$ , dado que se tienen que repetir para que su frecuencia relativa de aparición coincida con la del espectro, ello conlleva la obtención de un número ingente de secuencias de  $P_i$ . Es por ello que se pensó, que si fuera suficiente unas cuantas de tales permutaciones para obtener resultados aceptables, no se necesitaría semejante capacidad computacional. Así pues se planteó un algoritmo alternativo al de las permutaciones implementadas en el programa mathematica, para generar un número parcial de muestras del total de las  $n!$ , donde  $n$  es el número total de matrices  $P_i$ , incluyendo las veces que se repiten para reproducir su frecuencia relativa. En el apartado 4 se obtienen resultados con uno y otro algoritmo, con objeto de determinar si se obtiene algún sesgo en la muestra de menor tamaño generada.

### 3. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PROBABILISTAS

Bajo este epígrafe se describe brevemente el método de la perturbación (expresado en primer lugar por Hisada y Nakagiri, 1981) [10], del Método de los Elementos Finitos Probabilistas. Este método plantea desarrollos en serie de Taylor del problema elastostático genérico, con el fin de obtener las sensibilidades de las variables aleatorias resultado respecto a las variables aleatorias introducidas como datos.

En general, la obtención de las sensibilidades de un problema como el que se plantea en la elastostática lineal (5) es muy interesante puesto que permite evaluar la magnitud y el sentido de las variaciones que tendrán lugar en una variable objetivo ( $S$ ) cuando varían en un determinado sentido ciertas variables independientes que la “controlan” ( $x$ ). No obstante, este interés se transforma en necesidad cuando se plantea el problema de los elementos finitos de una manera probabilista.

$$Ku = f \quad (5)$$

en la que la matriz de rigidez  $K$  depende de las variables aleatorias  $\alpha_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ). Es posible desarrollar  $K$  alrededor de la media de cada  $\alpha_i$  mediante series de Taylor, como se muestra en (6)

$$K = K^0 + \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (6)$$

donde  $K^0$  es la matriz de rigidez evaluada en  $\alpha=0^*$ ,  $K_i^I$  es la primera derivada parcial de  $K$  con respecto a  $\alpha_i$  y evaluada en  $\alpha=0$  y,  $K_{ij}^{II}$  es la segunda derivada parcial de  $K$  con respecto a  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$ , evaluada en  $\alpha=0$ , es decir

$$K_i^I = \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad K_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad \text{con } \alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N]^T \quad (7)$$

Análogamente, el vector de fuerzas exteriores  $f$  también puede depender de las variables aleatorias  $\alpha_i$ . De esta forma,  $f$  admite un desarrollo en serie de Taylor (aquí mostrado hasta orden 1 simplemente) de la forma

$$f = f^0 + \sum_{i=1}^N f_i^I \alpha_i + \dots \quad (8)$$

$$\text{siendo } f_i^I = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad (9)$$

El vector de desplazamientos incógnita  $u$  también puede desarrollarse de una forma similar (de nuevo tan solo hasta orden 1)

$$u = u^0 + \sum_{i=1}^N u_i^I \alpha_i + \dots \quad (10)$$

donde nuevamente el vector de derivadas parciales es

$$u_i^I = \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad (11)$$

En cada una de las expresiones anteriormente mostradas (6, 8 y 10), los valores con superíndice 0 ( $K^0$ ,  $f^0$  y  $u^0$  respectivamente) corresponden a los valores medios de las variables (o, lo que es lo mismo, a las funciones evaluadas en los valores medios de sus variables). El resto de las expresiones (aquí truncadas en orden de desarrollo 1 por simplicidad en la exposición, excepto para la variable  $K$ ) se corresponderán, cuando se realice el análisis estadístico de las mismas, a las varianzas de las variables aleatorias consideradas ( $\text{var}(\alpha_i)$ ).

Con el presente planteamiento y, debido a la aparición en las expresiones anteriores de las derivadas de  $u$ ,  $K$  y  $f$  respecto a las variables aleatorias  $\alpha_i$ , es necesario obtener dichos valores de  $\partial u / \partial \alpha_i$ ,  $\partial K / \partial \alpha_i$  y  $\partial f / \partial \alpha_i$  para resolver el problema elastostático probabilista. Para obtener estas sensibilidades, se parte de la ecuación de equilibrio (5). Derivando ambos miembros respecto a las variables consideradas como aleatorias  $\alpha_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) se tiene la expresión (12)

\* Se ha tomado como media de  $\alpha_i$  el valor de 0, opción que no resta generalidad al planteamiento del problema.

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} u + K \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \quad (12)$$

De la resolución de la anterior expresión (12) para cada una de las variables aleatorias utilizadas, se obtendrán las sensibilidades tanto de  $u$  como de  $K$  ó  $f$  para el sistema en cuestión.

En todos los pasos anteriormente expuestos, las derivadas de la matriz de rigidez  $K$  respecto a cada variable aleatoria se reducen a calcular la expresión (13), ya que únicamente la matriz constitutiva  $D$  depende de dichas variables (la matriz  $B$  es una matriz operadora cinemática)

$$\int \int B^T \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} B dA \quad (13)$$

#### 4. RESULTADOS

Se han utilizado los modelos B descritos por Bogdanoff y Kozin para el tratamiento de carga espectral y así poder obtener las matrices de probabilidad de transición (PTM). Para ello se ha considerado una señal espectral con 5 niveles de carga. Cada uno de estos niveles de carga posee una frecuencia de aparición, considerada en tanto por uno, y además esa aparición de los niveles de carga es aleatoria, es decir no se sabe con certeza qué orden de aparición tienen.

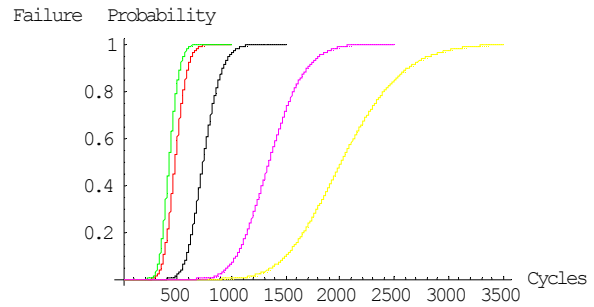
Lo primero es la obtención de esas cinco matrices de probabilidad de transición ( $P_i$ ). Se han considerado matrices de dimensión  $38 \times 38$ , donde para su obtención se utiliza el método de los elementos finitos probabilistas y modelos B, siguiendo para ello el mismo planteamiento que los trabajos de Bea et al [2, 3, 4, 5, 11]. Su obtención sale fuera del alcance de este trabajo, dada su extensión, remitiendo al lector a las referencias citadas para los detalles de su construcción. En la tabla 1 se muestran las esperanzas y varianzas obtenidas para cada uno de los cinco niveles de carga considerados, los cuales dan lugar a otras tantas matrices de probabilidad de transición.

En la Fig. 1 se muestran las funciones de distribución de la probabilidad de fallo, obtenidas directamente de cada una de las cinco matrices de probabilidad de transición citadas. Es decir, indicarían la probabilidad de fallo si tan solo actuara como carga la oscilación simple que ha dado lugar a la matriz de probabilidad de transición considerada.

**Tabla 1.** Esperanza y varianza de la vida para cada  $P_i$

| $P_i$ | E       | Var     |
|-------|---------|---------|
| P1    | 485.895 | 7649.21 |
| P2    | 749.999 | 17620.8 |
| P3    | 430.654 | 5414.59 |

|    |         |         |
|----|---------|---------|
| P4 | 2048.02 | 198088  |
| P5 | 1364.68 | 66156.9 |



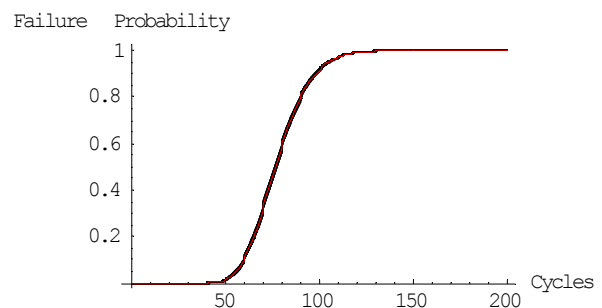
**Fig. 1.** Curvas de probabilidad de fallo para cada una de las  $P_i$  consideradas aisladamente.

Una vez obtenidas dichas matrices es necesario ordenarlas tal y como se ha indicado en el apartado 2.1. Para ello se parte de un espectro donde la frecuencia relativa de aparición de cada oscilación es la misma, por lo que  $n=5$ , es decir, se tienen  $5!$  (120) permutaciones posibles. En el caso de la muestra incompleta se toman 60 permutaciones de las 120 posibles.

A continuación se mostrarán los resultados de medias y varianzas obtenidos para el caso de la muestra sin sesgo y la incompleta.

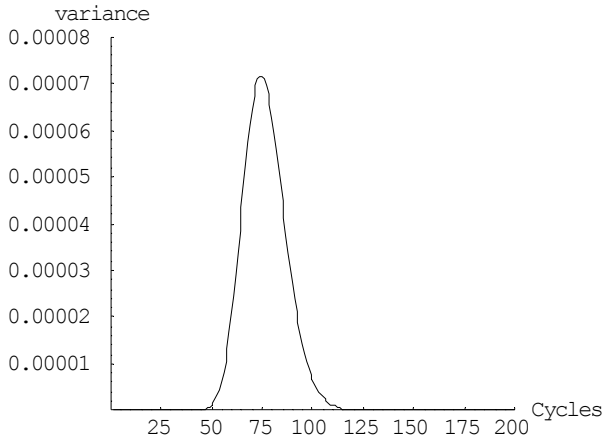
#### Muestra no sesgada:

Se han calculado cada una de las 120 matrices consecuencia de la ordenación citada, mostrándose cada función de distribución así obtenida en la Fig. 2, así como su valor medio (en rojo).



**Fig.2.** Funciones de distribución para la muestra sin sesgo (ver texto).

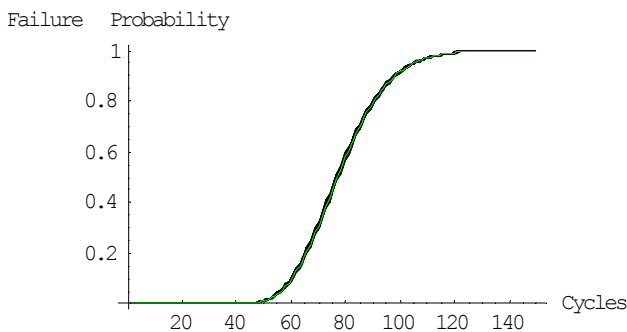
En la Fig. 3 se muestra la dispersión de las funciones de distribución obtenidas.



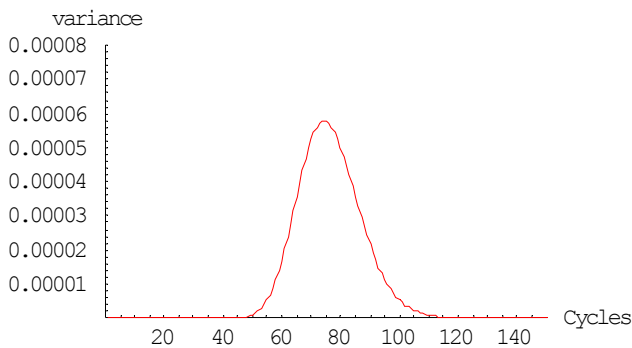
**Fig.3.** Varianza de las curvas de distribución de la muestra no sesgada (ver texto).

### Muestra incompleta

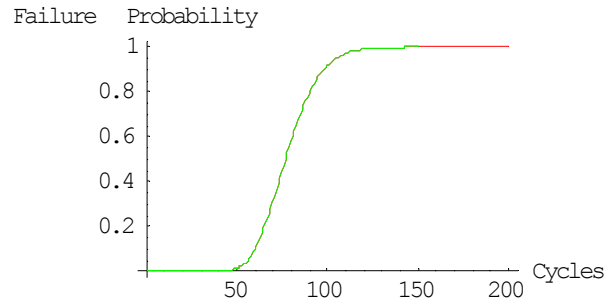
En este caso se seleccionaron 60 permutaciones de las 120 posibles, obteniéndose al igual que antes las funciones de distribución correspondientes a cada ordenación, y la función de distribución media.



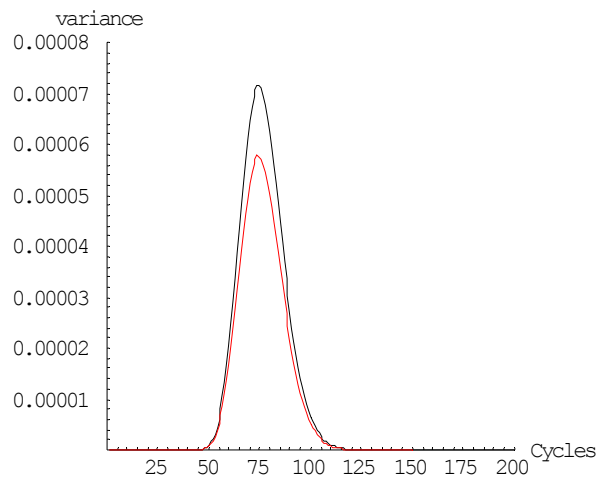
**Fig.4.** Funciones de distribución para la muestra incompleta (ver texto).



**Fig.5.** Varianza de las funciones de distribución de la muestra incompleta (ver texto).



**Fig.6.** Comparación entre la media para la muestra completa (en rojo) y la parcial (verde).



**Fig.6.** Comparación entre la varianza para la muestra con todas las permutaciones posibles (en negro) y caso incompleto (rojo).

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra cómo se puede tener en cuenta el orden de aplicación de las oscilaciones presentes en un espectro de carga, simplemente a través de un producto matricial. Así pues, una vez obtenidas las matrices de probabilidad de transición adscritas a cada oscilación simple, es muy sencillo tratar cada una de las posibles combinaciones de dichas oscilaciones, cada una de las cuales da origen a una materialización temporal particular del espectro de cargas considerado. Si se comparan los resultados obtenidos con la muestra completa (con todas las permutaciones posibles), y con aquella en la que se ha considerado tan solo la mitad de la muestra, podemos ver que las curvas de las medias están solapadas perfectamente, mientras que las varianzas difieren ligeramente. Este hecho indica que el algoritmo utilizado para truncar las permutaciones no incorpora sesgo en la muestra generada. También se ha observado en este ejemplo que la convergencia a la curva de distribución media de todas las obtenidas es muy rápida, ya que con tan sólo la mitad de las citadas

curvas se obtiene la misma función de distribución media. Este hecho concuerda con los ejemplos propuestos por Bogdanoff y Kozin, [1], si bien éstos eran obtenidos a partir de datos experimentales.

## REFERENCIAS

- [1] Bogdanoff, J.L. and Kozin, F., *Probabilistic models of cumulative damage*, (Wiley, New York, 1985).
- [2] Bea, J.A., *Simulación del crecimiento de grietas por fatiga aleatoria mediante elementos finitos probabilistas*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza (1997)
- [3] Bea, J.A., Doblaré, M., Gracia, L., *A Evaluation of the Probability Distribution of Crack Propagation Life in Metals Fatigue by means of P.F.E.M. and B-Models*. Int. J. Engineering Fracture Mechanics. Vol 63, pp. 675-711 (1999)
- [4] Bea, J.A., Doblaré, M., *Enhanced B-PFEM model for fatigue life prediction of metals during crack propagation*. Computational Materials Science , Vol. 25, pp. 14-33 (2002).
- [5] J. Grasa, M. A. Pérez, R. Ferrer, J. A. Bea, J. M. Aznar, M. Doblaré, *Probabilistic damage model for acrylic cements. Application to the life prediction of cemented hip implants*. International Journal of Fatigue (enviado)
- [6] J.A. Bannantine, J.J. Comer, J.L. Handrock, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Prentice Hall (1990).
- [7] H.O. Fuchs, R.I. Stephens, *Metal fatigue in engineering*. wiley (1980).
- [8] T. Endo, K. Mitsunaga, H. Nakagawa, *Fatigue of metals subjected to varying stress-prediction of fatigue lives*. In Preliminary Proceeding of The Chugoku-Shikoku District Meeting, pp. 41-44. The Japan Society of Mechanical Engineers, November 1967. (En japonés)
- [9] T. Endo, K. Mitsunaga, H. Nakagawa, K. Ikeda, *Fatigue of metals subjected to varying stress-low cycle, middle cycle fatigue*. In Preliminary Proceeding of The Chugoku-Shikoku District Meeting, pp. 45-48. The Japan Society of Mechanical Engineers, November 1967. (En japonés)
- [10] Hisada T., Nakagiri S., "Role of the stochastic finite element method in stochastic analysis of structures". Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. Structural Safety and Reliability., ICOSSAR '81, Trondheim, Norway, 395-408, (1981)
- [11] Bea, J.A., Doblaré, M., Villanueva, I., Gracia, L., "Corrections to B-Models for Fatigue Life Prediction of Metals during Crack Propagation", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, pp. 1405-1420 (1999)

