

## EL METODO DE LA PERTURBACIÓN Y EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO. APLICACIÓN A PROBLEMAS DE MECÁNICA DE LA FRACTURA.

J. Grasa, J. J. Laguardia, E. Cueto, J. A. Bea y M. Doblaré

Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales. Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A). Universidad de Zaragoza. María de Luna, 3, E-50018. Zaragoza, España.

**Resumen.** El método de los elementos finitos extendido facilita en gran medida la simulación numérica de problemas en el campo de la mecánica de la fractura. Por medio de esta metodología, y a diferencia del método de los elementos finitos convencional, no es necesaria la discretización del dominio con una malla adaptada a la geometría de la discontinuidad. Tradicionalmente, las variables que intervienen en este tipo de problemas han sido consideradas como deterministas, es decir, definidas por un único valor. Es bien sabido que existen numerosas incertidumbres asociadas a estas magnitudes (acciones exteriores, geometría, propiedades de los materiales,...). El presente trabajo, muestra la aplicación del método de la perturbación al método de los elementos finitos extendido considerando las variables que intervienen en el problema como aleatorias. La implementación del método ha sido realizada sobre un software comercial presentando ejemplos de aplicación contrastados con simulaciones de Monte Carlo.

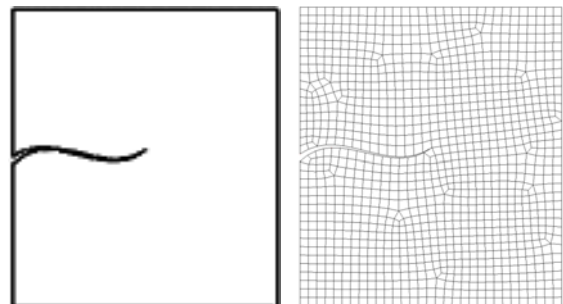
**Abstract.** The extended finite element method allows numerical simulation of problems in fracture mechanics. By mean of this methodology, and unlike conventional finite element method, is not necessary domain discretization with an adaptable mesh to the discontinuity geometry. Until now, variables implied in this kind of problems have been considered as deterministic (defined by a unique value) but is well known that exist great uncertainties associated with these magnitudes (loads, geometry, material properties...). The present work shows the perturbation method application in the extended finite elements considering random input variables. The method implementation has been performed in commercial software and application examples compared with Monte Carlo simulations are presented.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la mecánica de la fractura, el método de los elementos finitos es comúnmente utilizado para estudiar los campos de tensión sobre sólidos en las proximidades de discontinuidades. Para recoger con precisión los elevados gradientes de tensión que aparecen es necesario refinar enormemente la malla en torno a la discontinuidad o utilizar elementos particulares de tipo singular. Cuando lo que se pretende es simular fenómenos de crecimiento de grieta, grietas que intersecan entre sí o con otras discontinuidades,... trabajar con el método de los elementos finitos se convierte en una laboriosa tarea. En estos casos es necesario representar, de una forma precisa, la geometría de la discontinuidad, realizando una discretización adecuada y repetir el proceso para cada nueva configuración que adopte la discontinuidad. La Figura 1 se observa un ejemplo de cómo para modelar una grieta cualquiera con el Método de los Elementos Finitos es necesario adaptar la malla a la geometría de las caras de dicha grieta.

Fue Belytschko y Black [1] quienes introdujeron una nueva técnica para resolver, por medio del método de los elementos finitos, problemas de crecimiento de grieta sin necesidad de remallar. En este trabajo, los nodos cercanos al frente de grieta y a las caras de la

misma son enriquecidos usando el método de la partición de la unidad [2,3], a partir del campo de desplazamientos asintótico en el frente de grieta. Moës y otros [4] introdujeron una nueva formulación y metodología para enriquecer los elementos que no contienen el frente de grieta. Esta discontinuidad presente entre las caras de la grieta se simula a través de la función generalizada de Heaviside. Daux y otros [5] fueron quienes introdujeron el concepto de función de cruce que tiene en cuenta el caso múltiples grietas intersecando entre sí. Además, fueron quienes comenzaron a denominar a esta metodología el Método de los Elementos Finitos Extendido (XFEM).

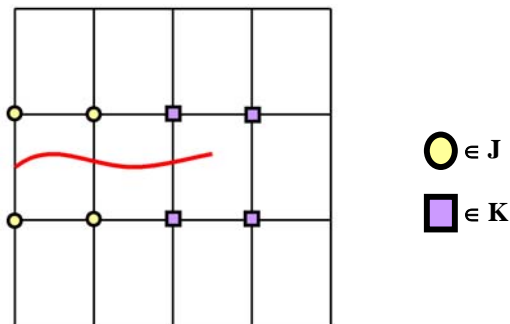


**Fig. 1.** Discretización de un componente agrietado por medio de una malla de elementos finitos.

En el presente trabajo, se muestra la aplicación del método de la perturbación y el XFEM para la resolución de problemas de mecánica de la fractura teniendo en cuenta la aleatoriedad en las variables que intervienen en el problema como cargas exteriores, longitudes de grieta, propiedades del material,...

**2. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO (XFEM)**

El método de los Elementos Finitos Extendidos (XFEM) permite modelar, sobre una malla no adaptada a la geometría de la grieta, el comportamiento de la discontinuidad agregando grados de libertad adicionales a los nodos de los elementos afectados por la grieta.



**Fig. 2.** Nodos enriquecidos con las funciones discontinuas de aproximación (nodos J) y de frente de grieta (nodos K).

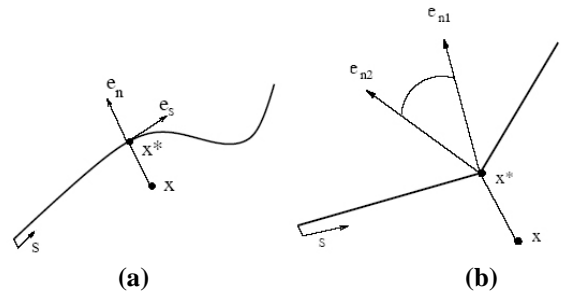
Dependiendo de si la grieta atraviesa por completo al elemento o de si el frente de la misma se encuentra en su interior, las funciones de interpolación del elemento varían. En el caso de que atravesase al elemento se utiliza la función salto definida como (1) en el sistema de coordenadas local de la grieta (Figura 3). En la Figura 3(a) la grieta es considerada como una curva parametrizada por la coordenada curvilínea  $s$ , coincidiendo el origen de la curva con uno de los dos extremos. Si se toma un punto cualquiera  $x$  del dominio, se define  $x^*$  como el punto más cercano sobre la grieta con respecto a  $x$ . En  $x^*$  se construye el vector tangencial y el vector normal a la curva,  $e_s$  y  $e_n$ , de tal forma que  $e_s \wedge e_n = e_z$  salga del papel. Así, la función  $H(x)$  vendrá dada por el signo del producto escalar  $(x - x^*) \cdot e_n$ . En el caso de una grieta con cambios bruscos de dirección (figura 3b) donde para el punto indicado no existe una única normal, se define un cono de normales en el punto  $x^*$ ,  $H(x) = 1$  si el vector  $(x - x^*)$  pertenece al cono y  $H(x) = -1$  en caso contrario.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0 \\ -1 & \text{para } y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

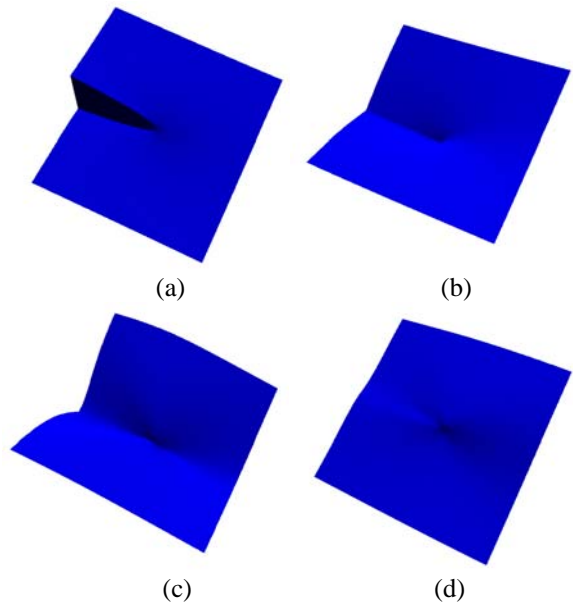
El campo de desplazamientos en el interior del elemento atravesado por la grieta viene expresado como (2):

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i N_i + \sum_{j \in J} b_j N_j H(x) \quad (2)$$

Donde  $u_i$  y  $b_j$  son los grados de libertad del elemento y  $N_j$  son las funciones de forma del elemento utilizado.



**Fig. 3.** (a) Coordenadas normal y tangencial en el sistema de coordenadas de una grieta continua. (b) Haz de coordenadas normales en un vértice de una grieta discontinua.



**Fig. 4.** Funciones de enriquecimiento para el elemento con frente de grieta (a)  $F_1(r, \theta)$  (b)  $F_1(r, \theta)$  (c)  $F_1(r, \theta)$  (d)  $F_1(r, \theta)$ .

Cuando el frente de grieta se encuentra en el interior del elemento, el enriquecimiento se realiza con las cuatro funciones (3) para el caso bidimensional.

$$F_i(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (3)$$

Donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas cilíndricas locales al frente de grieta. La primera de estas funciones  $\sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2})$  como puede observarse en la Figura 5 es discontinua a

lo largo de las caras de la grieta, mientras que el resto son continuas.

Estas funciones provienen del campo asintótico de desplazamientos cerca del frente de una grieta (4) en dos dimensiones.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + 2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) [\kappa + 1 - 2\cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2) [\kappa + 1 + 2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2\sin^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$K_I$  y  $K_{II}$  son los factores de intensidad de tensiones en modo I y modo II respectivamente y  $\mu$  y  $\kappa$  son parámetros del material que vienen dados por (5)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{tensión plana} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{deformación plana} \end{cases} \quad (5)$$

El campo de desplazamientos para el interior del elemento con frente de grieta quedará como (6):

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i N_i + \sum_{j \in J} N_j \left( \sum_{k \in K} c_k^I F_i(x) \right) \quad (6)$$

$u_i$  y  $c_i$  son los grados de libertad del elemento y  $N_i$  son las funciones de forma.

El campo de desplazamientos puede escribirse (7):

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i \in I} u_i N_i + \sum_{j \in J} b_j N_j H(x) \\ &+ \sum_{j \in J} N_j \left( \sum_{k \in K} c_k^I F_i(x) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. EL MÉTODO DE LA PERTURBACIÓN

La ecuación de equilibrio para problemas estáticos puede escribirse de forma general como:

$$K(u, \beta_i) u(\beta_i) = f(\beta_i) \quad (8)$$

Donde  $K$  es la matriz de rigidez tangente,  $f$  son las cargas externas y  $u$  los desplazamientos función de las variables aleatorias  $\beta_i$ . Utilizando el método de la perturbación [6] como medio para llegar a la obtención de los estadísticos de las variables solución del problema es necesario desarrollar en serie de Taylor cada uno de los términos de la ecuación (9).

$$K = K^0 + \sum_{i=1}^N K_i^I (\alpha_i - \alpha_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad K_i^I = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \quad (9)$$

$$u = u^0 + \sum_{i=1}^N u_i^I (\alpha_i - \alpha_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad u_i^I = \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \quad (10)$$

$$f = f^0 + \sum_{i=1}^N f_i^I (\alpha_i - \alpha_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad f_i^I = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \quad (11)$$

siendo:

$$K^0(u^0) u^0 = f^0 \quad \text{o} \quad u^0 = (K^0(u^0))^{-1} f^0 \quad (12)$$

Derivando en la ecuación (8)

$$\frac{\partial K(u)}{\partial \beta_i} u + K(u) \frac{\partial u}{\partial \beta_i} = \frac{\partial f}{\partial \beta_i} \quad (13)$$

Particularizando esta expresión para las variables aleatorias consideradas p.e. cargas exteriores ( $f$ ) y longitud de grieta ( $a$ ):

$$\beta_1 = f \Rightarrow K(u) \frac{\partial u}{\partial f} = 1 \quad (14)$$

$$\beta_2 = a \Rightarrow K(u) \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial K(u)}{\partial a} u = 0$$

Que en el caso de un problema lineal la obtención de las sensibilidades de los desplazamientos con respecto a las variables aleatorias ( $\frac{\partial u}{\partial \beta_i}$ ) pueden obtenerse directamente sin mas que resolver:

$$K^0(u^0) \frac{\partial u}{\partial f} = 1 \quad (15)$$

$$K^0(u^0) \frac{\partial u}{\partial a} = -\frac{\partial K^0(u)}{\partial a} u^0$$

De la resolución de (15) y obtenidas las sensibilidades de manera análoga para la solución en tensiones, puede obtenerse:

$$E[u] = u^0 \quad E[\sigma] = \sigma^0 \quad (16)$$

$$Cov[u_1, u_2] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{1i}^I (u_{2j}^I)^T \{E[\beta_i \beta_j] - E[\beta_i] E[\beta_j]\} \quad (17)$$

$$Cov[\sigma_1, \sigma_2] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{1i}^I (\sigma_{2j}^I)^T \{E[\beta_i \beta_j] - E[\beta_i] E[\beta_j]\} \quad (18)$$

Resultados que aparecen en función de la media y varianza de las variables aleatorias consideradas

## 3. RESULTADOS

Se han evaluado una serie de ejemplos de aplicación de la técnica desarrollada para validar la aplicación del método de la perturbación al método de los Elementos Finitos Extendido.

Los ejemplos han sido contrastados con simulaciones de Monte Carlo en todos los casos con un número de simulaciones igual a 3.000.

La figura 5 muestra la malla de elementos finitos utilizada para la aplicación del método así como los casos de carga que se han considerado y que solicitan a la grieta en modo I y en modo II.

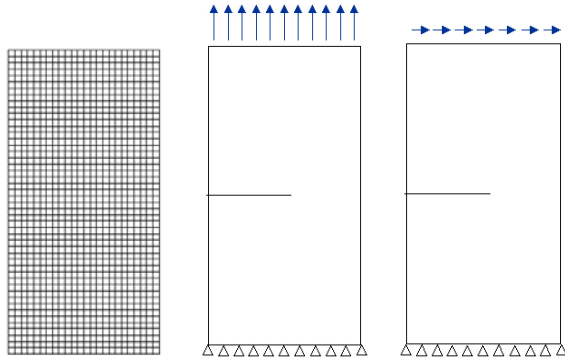


Fig. 5. Malla de elementos finitos y casos de carga considerados.

Las variables aleatorias consideradas en estos ejemplos son la carga y la longitud de grieta, las cuales se han considerado como gaussianas caracterizadas por los parámetros que aparecen en la Tabla 1.

Las figuras 6 y 7 muestran los resultados en valores medios de los desplazamientos obtenidos. Los estadísticos de estos resultados han sido contrastados con una malla de elementos finitos convencional adaptada a la geometría de la grieta con la que se han realizado un elevado número de simulaciones (> 3.000). Los resultados obtenidos por medio de las dos técnicas aparecen contrastados en las tablas siguientes.

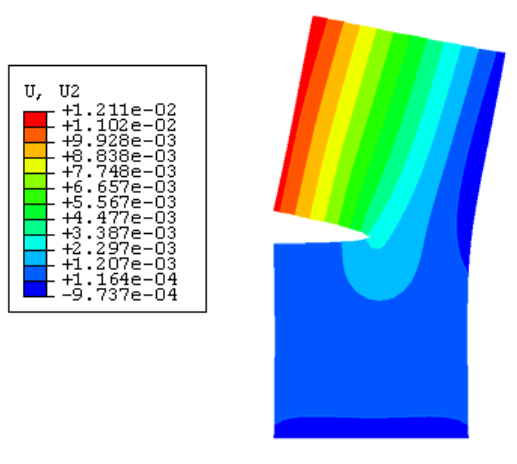


Fig. 6. Media desplazamientos modo I.

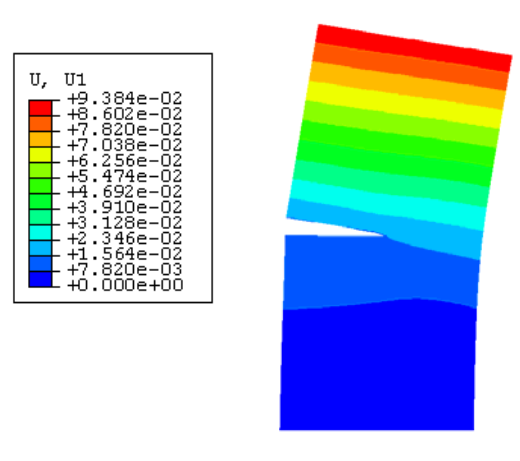


Fig. 7. Media desplazamientos modo II.

Tabla 1. Variables aleatorias consideradas.

	Media	Varianza
Carga	250 N	4
Longitud grieta	40 mm	1

Tabla 2. Carga aleatoria

Mod.I	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{Y\ MAX}$	$1.211 \cdot 10^{-2}$	$2.420 \cdot 10^{-3}$	$1.267 \cdot 10^{-2}$	$2.930 \cdot 10^{-3}$
Mod.II	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{X\ MAX}$	$9.384 \cdot 10^{-2}$	$1.876 \cdot 10^{-2}$	$9.471 \cdot 10^{-2}$	$2.064 \cdot 10^{-2}$

Tabla 3. Longitud de grieta aleatoria

ModI	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{Y\ MAX}$	$1.211 \cdot 10^{-2}$	$8.914 \cdot 10^{-4}$	$1.235 \cdot 10^{-2}$	$9.116 \cdot 10^{-4}$
ModII	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{X\ MAX}$	$9.384 \cdot 10^{-2}$	$4.003 \cdot 10^{-3}$	$9.471 \cdot 10^{-2}$	$3.668 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4. Carga y longitud de grieta aleatoria

Mod.I	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{Y\ MAX}$	$1.211 \cdot 10^{-2}$	$4.314 \cdot 10^{-3}$	$1.267 \cdot 10^{-2}$	$3.579 \cdot 10^{-3}$
Mod.II	XFEM		Monte Carlo	
	Media	Desv.	Media	Desv.
$U_{X\ MAX}$	$9.384 \cdot 10^{-2}$	$2.875 \cdot 10^{-2}$	$9.471 \cdot 10^{-2}$	$2.144 \cdot 10^{-2}$

**REFERENCIAS**

- [1] Belytschko T, Black T. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 45:601-620, 1999.
- [2] Melenk J M, Babuska I. *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 139:289-314, 1996.
- [3] Babuska I, Melenk J M. *The partition of unity method: basic theory and applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40:727-758, 1997.
- [4] Moes N, Dolbow J, Belytschko T. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 46:131-150, 1999.
- [5] Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukuman N, and Belytschko T. *Arbitray branched and intersecting cracks with the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48:1741-1760, 2000.
- [6] Liu W. K., Belytschko T. B., Berterfield G. H. *Probabilistic Finite Element Method*. Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis. 1989
- [7] ABAQUS Version 6.4 Documentation.