

## EXPRESIÓN GENERAL DEL FIT Y DEL CMOD EN PROBETAS DE FLEXIÓN EN UN PUNTO

I. Villa, J. A. Loya y J. Fernández-Sáez

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.  
Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, España.

**Resumen.** En el presente trabajo se presentan expresiones generales del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) y del desplazamiento relativo de los extremos de los labios de la fisura (CMOD), válidas para probetas de flexión en un punto con diferentes longitudes de fisura y distinta esbeltez. Dichas expresiones se obtuvieron aplicando el principio de superposición, descomponiendo el caso general en otros tres. La solución de dos de ellos es conocida y se encuentra en la literatura (flexión en tres puntos con una esbeltez igual a cuatro y flexión pura), mientras que la solución del tercer caso ha sido obtenida en este trabajo mediante una modelización, por el Método de los Elementos Finitos, de un problema de flexión en un punto para una probeta con una esbeltez de referencia y diferentes longitudes de fisura. Las expresiones propuestas han sido comparadas con simulaciones numéricas de problemas de flexión en un punto de probetas de distinta esbeltez y con diferentes longitudes de fisura, habiéndose encontrado una buena correlación en todos los casos analizados.

**Abstract.** This work presents general expressions for the Stress Intensity Factor (SIF) and the Crack Mouth Opening Displacement (CMOD) in one point bending test, for specimens with different crack length and span-to-depth ratio. Those expressions have been obtained as combination of the solution of three cases. The solution of two of them is well known (three point bending, and pure bending). The solution of the third one (one point bending specimen with a span-to-depth ratio fixed and different crack length) is obtained in this work using the Finite Element Method. The results obtained with both expressions agree with those determined with numeric simulations of one point bending test for specimens with different dimensions.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los ensayos de flexión dinámica en un punto fueron introducidos por Kaninen a finales de la década de los 70 [1] y desarrollados posteriormente por Kalthoff y otros [2] y Giovanola [3, 4], como una alternativa a los de flexión dinámica en tres puntos para la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación de los materiales,  $K_{Id}$ . En este tipo de ensayos una masa móvil impacta sobre una probeta fisurada, (ver Fig. 1) pero como la probeta no está apoyada, las tensiones y deformaciones producidas se deben exclusivamente a las fuerzas de inercia. Si como consecuencia del estado de cargas generado se alcanzan las condiciones críticas en el fondo de la fisura, ésta se propagará inestablemente.

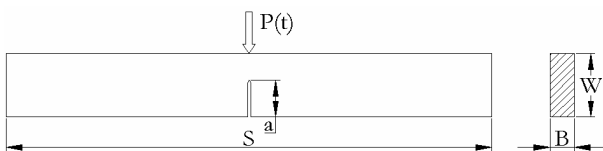


Fig. 1. Configuración del ensayo de flexión en un punto.

Para determinar el valor de  $K_{Id}$  es necesario conocer la variación temporal del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT),  $K_I(t)$ , y detectar el instante en el que comienza la propagación de la fisura,  $t_f$ . La determinación de  $K_I(t)$  en los ensayos de flexión en un punto se puede realizar mediante simulación numérica por el Método de los Elementos Finitos [5-7].

También es posible determinar  $K_I(t)$  mediante la utilización de métodos simplificados, basados en el análisis del comportamiento de una viga fisurada sometida a una carga puntual conocida, aplicada en la sección central. En este caso es necesario recurrir a las herramientas derivadas del análisis modal, que requieren el conocimiento de frecuencias y modos propios de vibración de la probeta fisurada. Usando este método, el FIT se calcula haciendo la hipótesis de que es proporcional al momento flector transmitido a través de la sección fisurada, o a la diferencia entre el desplazamiento del punto de aplicación de la carga y el desplazamiento del punto en el que hubiera estado apoyada la probeta en un ensayo de flexión en tres puntos. Este tipo de análisis ha sido realizado por Kishimoto y otros [8] y por Marur [9], a partir del conocimiento de la carga aplicada, y por Loya y otros [10], a partir del desplazamiento del punto de carga. En todos estos casos se considera la probeta como una viga de Timoshenko fisurada, y se utilizan las constantes de proporcionalidad correspondientes a un caso estático de flexión en tres puntos.

El objetivo del presente trabajo, es obtener expresiones generales del FIT y del CMOD de probetas de flexión estática en un punto, con diferentes longitudes de fisura y distinta esbeltez. El método de solución está basado en el principio de superposición, y consiste en descomponer el caso general analizado en otros tres estados auxiliares.

Dos de las soluciones auxiliares son conocidas mientras que la tercera, al no estar disponible en la literatura, ha sido obtenida en este trabajo mediante modelización numérica por el Método de los Elementos Finitos, de un problema de flexión en un punto para una probeta con una esbeltez de referencia y diferentes longitudes de fisura. Un procedimiento análogo ha sido llevado a cabo por Guinea y otros [11] para la determinación del FIT y del CMOD en el caso de flexión estática en tres puntos.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En general, el FIT en modo I,  $K_I$ , asociado a una fisura contenida en un sólido bidimensional, puede expresarse como una función de su geometría y de una tensión de referencia,  $\sigma$ :

$$K_I = f(\sigma, \text{geometría}) \quad (1)$$

Considérese ahora un caso particular, en el que el sólido en el cual está contenida la fisura es una probeta de longitud  $S$  apoyada en su punto medio, con una fisura en la sección central, y sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de valor  $q$ , como se indica en la Fig. 2a. Esta configuración se denomina flexión estática en un punto, y, en este caso, la Ec. 1 podrá expresarse de la siguiente manera:

$$K_I = f(\sigma, S, W, a) \quad (2)$$

en la que  $W$  es el canto de la probeta y  $a$  es la longitud de la fisura. Si se definen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  como la longitud de la fisura adimensionalizada y la esbeltez, respectivamente, es decir:

$$\alpha = \frac{a}{W} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{S}{W} \quad (4)$$

el FIT puede expresarse como:

$$K_I = \sigma \psi_\beta(\alpha) = \frac{6M}{BW^{3/2}} \psi_\beta(\alpha) \quad (5)$$

En la Ec. 5,  $M$  es el momento flector en la sección central y  $\psi_\beta(\alpha)$  es una función que depende de  $\alpha$  y de  $\beta$  y para la cual se pretende encontrar una expresión general.

## 3. EXPRESIÓN GENERAL DEL FIT

El caso general de flexión en un punto de una probeta de longitud  $S$  como el indicado en la Fig. 2a, se puede descomponer en suma de otros tres estados de carga, Fig. 2b.

El momento flector en la sección central,  $M$ , debido al estado original, será entonces igual a la suma del momento flector  $M_1$  correspondiente a un estado de flexión pura de una probeta de longitud  $S^*$ , más el momento flector  $M_2$  correspondiente a un caso de flexión en tres puntos de una probeta de longitud  $S^*$ , más el momento flector  $M_3$  correspondiente a una probeta de flexión en un punto de longitud  $S^*$ .

Si la sollicitación corresponde a una carga distribuida uniformemente de valor  $q$ , el momento flector  $M$  vale:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \frac{qS^2}{8} \quad (6)$$

y definiendo una esbeltez reducida  $\beta^*$ , tal que:

$$\beta^* = \frac{S^*}{W} \quad (7)$$

las expresiones para los momentos flectores  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son:

$$M_1 = \frac{q}{8}(S-S^*)^2 = \frac{qS^2}{8} \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right)^2 = M \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right)^2 \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{q(S-S^*)}{2} \frac{S^*}{2} = 2M \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right) \frac{\beta^*}{\beta} \quad (9)$$

$$M_3 = \frac{qS^{*2}}{8} = \frac{qS^2}{8} \left(\frac{S^*}{S}\right)^2 = M \left(\frac{\beta^*}{\beta}\right)^2 \quad (10)$$

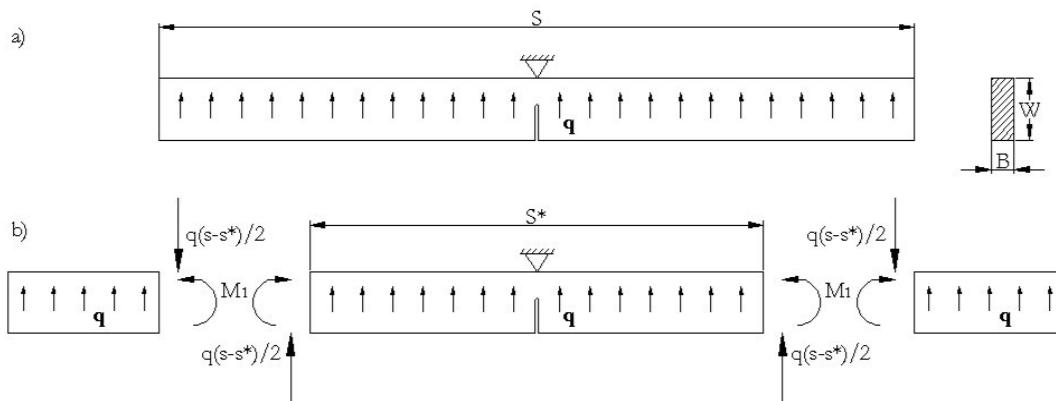


Fig. 2. Descomposición del caso general de flexión en un punto en suma de tres casos auxiliares.

En consecuencia, el FIT debido al estado original indicado en la Fig. 2a será igual a la suma de los debidos a cada uno de los tres casos auxiliares indicados en la Fig. 2b.

Para una esbeltez reducida  $\beta^*$ , la Ec. 5 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$K_I = \frac{6}{BW^{3/2}} \left[ M_1 \psi_\infty(\alpha) + M_2 \psi_{\beta^*}(\alpha) + M_3 \psi_{\beta^*}^*(\alpha) \right] \quad (11)$$

en la que cada uno de los tres sumandos representa la contribución al FIT de los estados auxiliares en los que se dividió el análisis que son, respectivamente, flexión pura, flexión en tres puntos de una probeta de esbeltez  $\beta^*$  y flexión en un punto de una probeta de esbeltez  $\beta^*$ .

Sustituyendo en la Ec. 11 las expresiones 8, 9 y 10, se obtiene la siguiente expresión para  $\psi_\beta(\alpha)$ :

$$\psi_\beta(\alpha) = \psi_\infty(\alpha) \left[ 1 + \left( \frac{\beta^*}{\beta} \right)^2 - 2 \left( \frac{\beta^*}{\beta} \right) \right] + 2\psi_{\beta^*}(\alpha) \left[ \frac{\beta^*}{\beta} - \left( \frac{\beta^*}{\beta} \right)^2 \right] + \psi_{\beta^*}^*(\alpha) \left( \frac{\beta^*}{\beta} \right)^2 \quad (12)$$

Tomando  $\beta^*=4$  y reordenando,

$$\psi_\beta(\alpha) = \psi_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} (2\psi_4(\alpha) - 2\psi_\infty(\alpha)) + \left( \frac{4}{\beta} \right)^2 (\psi_\infty(\alpha) - 2\psi_4(\alpha) + \psi_4^*(\alpha)) \quad (13)$$

Para los casos  $\beta \rightarrow \infty$  (flexión pura) y  $\beta=4$  (flexión en tres puntos de una probeta de esbeltez  $\beta=4$ ) las correspondientes expresiones para  $\psi_\infty(\alpha)$  y  $\psi_4(\alpha)$  son conocidas [11] y se escriben de la siguiente manera:

$$\psi_\beta(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)^{3/2}(1+3\alpha)} p_\beta(\alpha) \quad (14)$$

donde  $p_\infty(\alpha)$  y  $p_4(\alpha)$  corresponden a los siguientes polinomios [11]:

$$p_\infty(\alpha) = 1,99 + 0,83\alpha - 0,31\alpha^2 - 0,14\alpha^3 \quad (15)$$

$$p_4(\alpha) = 1,90 + 0,41\alpha + 0,51\alpha^2 - 0,17\alpha^3 \quad (16)$$

Si para  $\psi_4^*(\alpha)$  se adopta una expresión análoga a la de la Ec. 14, se debe utilizar un polinomio  $p_4^*(\alpha)$  que corresponde a una probeta de flexión en un punto de esbeltez igual a 4 cuya expresión no se ha encontrado en la literatura.

#### 4. DETERMINACIÓN DE $p_4^*$

En el caso de una probeta de flexión en un punto con una esbeltez  $\beta=4$ , el FIT puede expresarse, igual que en el caso general indicado en la Ec. 5 como:

$$K_I = \frac{6M}{BW^{3/2}} \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)^{3/2}(1+3\alpha)} p_4^*(\alpha) \quad (17)$$

Para obtener  $p_4^*(\alpha)$  se calculó por el Método de los Elementos Finitos, implementado en el código comercial ABAQUS [13], el FIT para diferentes valores de  $\alpha$ . Aprovechando la condición de simetría que presenta el problema, se simuló solo la mitad de la probeta, utilizando para la discretización del dominio elementos cuadriláteros de 4 nodos.

De esta manera se resolvieron 18 casos diferentes, uno por cada valor de  $\alpha$ , desde  $\alpha=0,10$  hasta  $\alpha=0,95$ , con incrementos  $\Delta\alpha=0,05$ , considerando en todos los casos un estado de deformación plana, y teniendo especial cuidado en la discretización de las proximidades del fondo de la fisura para recoger los gradientes de tensión y deformación que existen en esa región. Esta zona de concentración de elementos fue desplazada con la fisura sin modificar sus dimensiones en cada uno de los 18 casos analizados. De esta forma se procuró que no hubiera una diferencia importante en la resolución de cada caso como consecuencia del mallado.

Los valores de  $K_I$  fueron determinados a partir de la integral  $J$ , proporcionada directamente por el código de cálculo utilizado que, en un caso elástico lineal en condiciones de deformación plana, está relacionada con el valor de  $K_I$  mediante la siguiente expresión:

$$K_I^2 = \frac{E}{1-\nu^2} J \quad (18)$$

en la cual  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson del material.

Mediante el Método de los Elementos Finitos, se han obtenido, para distintos valores de  $\alpha$  con  $\beta$  constante, resultados de  $K_I$  empleando la Ec. 18. A partir de estos resultados se ha determinado mediante la Ec. 17 el valor de  $p_4^*(\alpha)$ . Tras realizar un ajuste polinómico por el método de los mínimos cuadrados de los resultados obtenidos se obtuvo la siguiente expresión para  $p_4^*(\alpha)$ :

$$p_4^*(\alpha) = 1,7238 + 0,2262\alpha + 1,0438\alpha^2 - 0,3852\alpha^3 \quad (19)$$

Como puede observarse en la Fig. 3, el acuerdo entre los valores numéricos y la expresión propuesta es excelente, habiéndose obtenido diferencias inferiores al 0,2% en todos los casos.

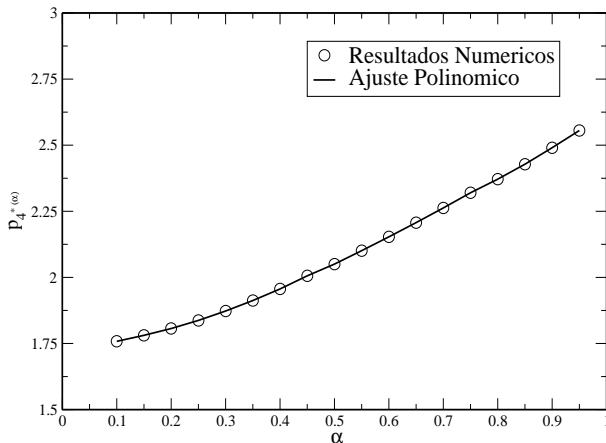


Fig. 3. Resultado del ajuste polinómico de  $p_4^*(\alpha)$ .

## 5. EXPRESIÓN GENERAL DEL CMOD

El desplazamiento relativo de los extremos de los labios de la fisura (CMOD) para un caso general de flexión en un punto, puede obtenerse de manera análoga mediante el proceso de descomposición empleado en el apartado 3. En este caso, la expresión general del CMOD, referido como  $w$ , es la siguiente:

$$w = \frac{4\sigma a}{E'} v_\beta(\alpha) = \frac{24Ma}{BW^2 E'} v_\beta(\alpha) \quad (20)$$

donde  $v_\beta(\alpha)$  es una función que depende de  $\alpha$  y de  $\beta$ .

Siguiendo el mismo razonamiento descrito en la sección 3 para el FIT, se obtiene para  $v_\beta(\alpha)$  la siguiente expresión, semejante a la de la Ec. 14:

$$v_\beta(\alpha) = v_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} (2v_4(\alpha) - 2v_\infty(\alpha)) + \left(\frac{4}{\beta}\right)^2 (v_\infty(\alpha) - 2v_4(\alpha) + v_4^*(\alpha)) \quad (21)$$

donde  $v_4(\alpha)$  y  $v_\infty(\alpha)$  se pueden encontrar en el libro de Tada y otros [12], mientras que  $v_4^*(\alpha)$  se ha determinado en este trabajo, a partir del estudio de una probeta de flexión en un punto con una esbeltez  $\beta=4$ . En este caso, el CMOD puede expresarse, de acuerdo a la Ec.20, como:

$$w = \frac{24Ma}{BW^2 E'} v_4^*(\alpha) \quad (22)$$

siendo  $v_4^*(\alpha)$  un polinomio que se pretende obtener.

Los valores de CMOD fueron determinados a partir del desplazamiento del punto de la malla que determina el extremo del labio de la fisura, proporcionado directamente por el código de cálculo utilizado, y, para cada uno de los valores de  $\alpha$ , se representó el valor de  $v_4^*(\alpha)$  obtenido a partir de la expresión 22.

La función  $v_4^*(\alpha)$  se puede definir de manera semejante a  $v_4(\alpha)$  y  $v_\infty(\alpha)$  [12], relacionándola con un polinomio  $q_4^*(\alpha)$  de la siguiente manera:

$$v_4^*(\alpha) = q_4^*(\alpha) + \frac{0,66}{1 - \alpha^2} \quad (23)$$

Tras realizar un ajuste polinómico por el método de los mínimos cuadrados de los resultados obtenidos, se obtiene la siguiente expresión para  $q_4^*(\alpha)$ :

$$q_4^*(\alpha) = 0,603 - 1,870\alpha + 3,155\alpha^2 - 2,974\alpha^3 \quad (24)$$

Nuevamente, como puede observarse en la Fig. 4, el acuerdo entre los valores numéricos y la expresión propuesta es excelente.

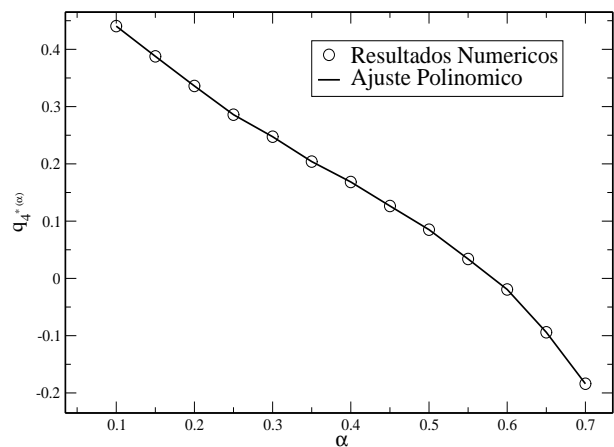


Fig. 4. Resultado del ajuste polinómico de  $q_4^*(\alpha)$ .

## 6. VALIDACIÓN DE LAS EXPRESIONES OBTENIDAS

Con el objeto de validar las expresiones obtenidas, se han analizado casos de flexión en un punto de probetas de diferente esbeltez y con distintas longitudes de fisura mediante el Método de los Elementos Finitos, empleando el código comercial ABAQUS [13]. Los resultados obtenidos en las simulaciones han sido comparados con los que se obtuvieron mediante el empleo de las expresiones propuestas.

Para el FIT se llevaron a cabo 16 simulaciones numéricas, correspondientes a 4 valores diferentes de esbeltez,  $\beta= 8; 16; 48$  y  $96$ , y 4 valores de longitud de fisura, tales que  $\alpha= 0,2; 0,4; 0,6$  y  $0,8$ .

Los resultados obtenidos pueden observarse en las Figuras 5 a 8, donde se compara el correspondiente valor de  $\psi_\beta(\alpha)$  con el obtenido mediante la expresión analítica propuesta (Ec. 12), para los cuatro valores de  $\beta$  considerados.

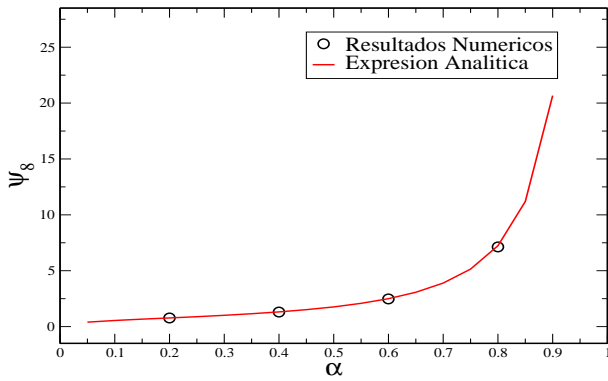


Fig. 5. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $\psi_8(\alpha)$ .

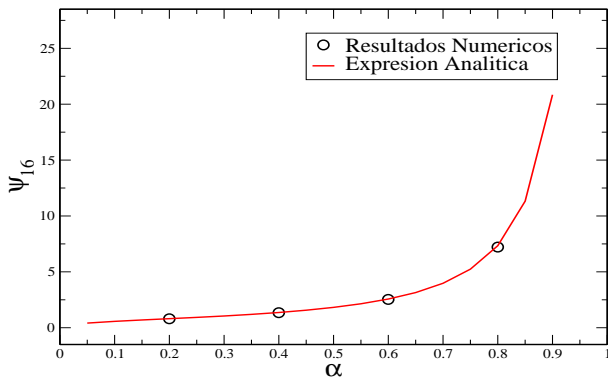


Fig. 6. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $\psi_{16}(\alpha)$ .

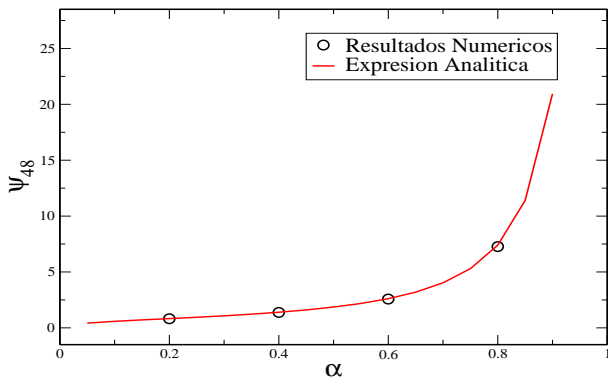


Fig. 7. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $\psi_{48}(\alpha)$ .

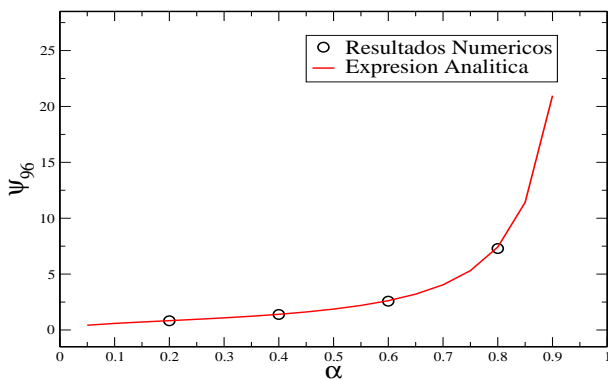


Fig. 8. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $\psi_{96}(\alpha)$ .

Para el CMOD se han llevado a cabo 12 simulaciones, correspondientes a 4 valores diferentes de esbeltez,  $\beta=8; 16; 48$  y  $96$ , y 3 valores de longitud de fisura,  $\alpha=0,2; 0,4$  y  $0,6$ .

En las Figuras 9 a 12 se compara el correspondiente valor de  $v_\beta(\alpha)$  con el obtenido mediante la expresión analítica propuesta (Ec. 21), para los cuatro valores de  $\beta$  considerados.

Como se puede observar, el resultado de la comparación es muy bueno, tanto para el FIT como para el CMOD, habiéndose encontrado en todos los casos diferencias inferiores al 2%.

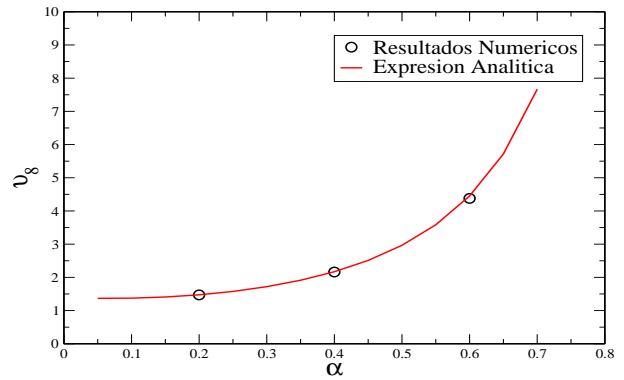


Fig. 9. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $v_8(\alpha)$ .

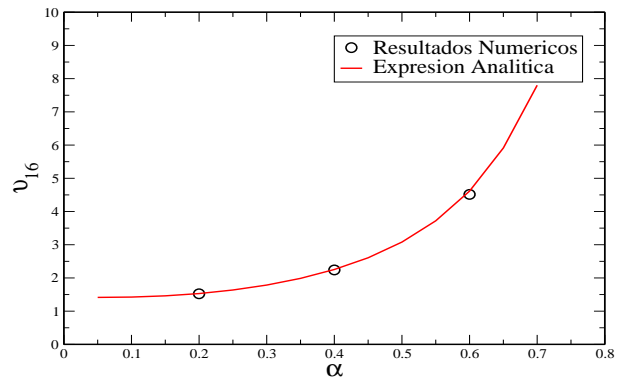


Fig. 10. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $v_{16}(\alpha)$ .

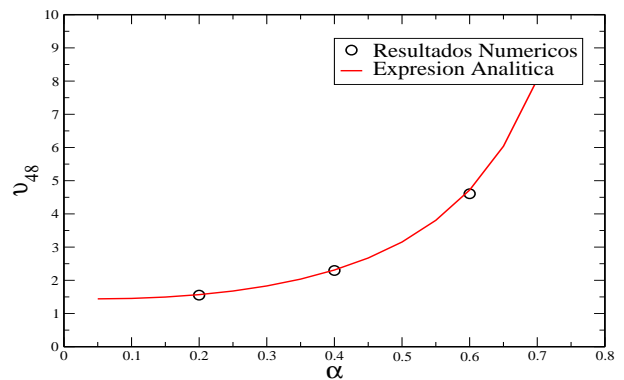


Fig. 11. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $v_{48}(\alpha)$ .

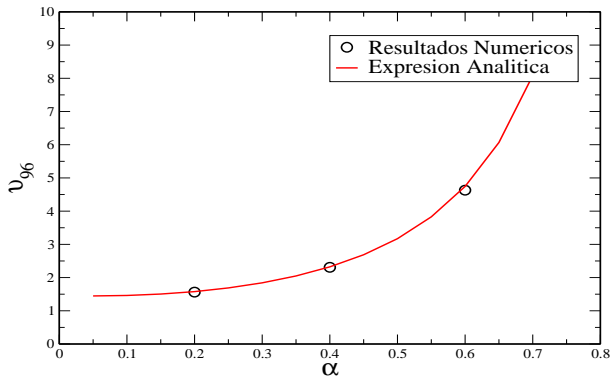


Fig. 12. Comparación entre los resultados numéricos y la expresión propuesta –  $v_{96}(\alpha)$ .

## 7. CONCLUSIONES

- Se han obtenido expresiones generales para el FIT y el CMOD de probetas de flexión en un punto, válidas para cualquier esbeltez y longitud de fisura.
- Dichas expresiones se obtuvieron descomponiendo el caso general en suma de otros tres correspondientes a flexión pura, flexión en tres puntos y flexión en un punto para una esbeltez de referencia. Las soluciones para los dos primeros casos han sido obtenidas por otros autores, y la correspondiente al tercer caso se ha obtenido en el presente trabajo a partir del estudio detallado por elementos finitos de un caso de flexión en un punto de una probeta de esbeltez  $\beta=4$ .
- Las expresiones generales obtenidas en este trabajo han sido validadas mediante la comparación con simulaciones numéricas de problemas de flexión en un punto de probetas de distinta esbeltez y con distintas longitudes de fisura, habiéndose encontrado una buena correlación en todos los casos.
- Estas expresiones permiten analizar con mayor rigor los ensayos de flexión en un punto en condiciones dinámicas, para diferentes longitudes de fisura y distinta esbeltez.

## REFERENCIAS

- [1] Gehlen, P.C., Barnes, C.R., Hoagland, R.G., Hahn, G.T., Popelar, C.H. y Kanninen, M.F. Dynamic crack propagation under impact loading. *Non-linear and dynamic fracture mechanics*, pg. 185-200, 1979.
- [2] Kalthoff, J.F., Winkler, S., Böhme, W. y Shockey, D.A. Mechanical response of cracks to impact loading. *International Conference on Dynamical Properties and Fracture Dynamics of Engineering Materials*, 1983.
- [3] Giovanola, J.H. The one-point-bend impact test. *ASM. Metals Handbook Mechanical Testing*, Vol. 8. American Society for Metals, pg. 271-276, 1985.
- [4] Giovanola, J.H. Investigation and application of the one-point-bend impact test. *American Society of Testing and Materials. ASTM STP 905*, pg. 307-328, 1986.
- [5] Wada, H., Seika, M., Calder, C.A. y Kennedy, T.C. Measurement of impact fracture toughness for PMMA with single point bending test using an air gun. *Engineering Fracture Mechanics*, 46 (4), pg.715-719, 1993.
- [6] Rubio, L., Fernández-Sáez, J. y Navarro, C. Factor de intensidad de tensiones dinámico en probetas de flexión en tres puntos y de flexión en un punto sometidas a pulsos de carga de corta duración. *Anales de Mecánica de la Fractura*, 15, pg. 97-101, 1998.
- [7] Rubio, L. Determinación de parámetros de fractura dinámica a alta velocidad de deformación. Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, 1999.
- [8] Kishimoto, K., Fujino, Y., Aoki, S. y Sakata, M. A simple formula for the dynamic stress intensity factor of an impacted freely-supported bend specimen. *JSME International Journal*, 33, pg. 51-56, 1990.
- [9] Marur, P.R. Dynamic analysis of one-point bend impact test. *Engineering Fracture Mechanics*, 67, pg. 41-53, 2000.
- [10] Loya, J.A., Fernández-Sáez, J. y Navarro, C. Análisis simplificado de los ensayos de flexión en un punto. *Anales de Mecánica de la Fractura*, 20, pg. 101-106, 2003.
- [11] Guinea, G.V., Pastor, J.Y., Planas J., y Elices, M. Stress intensity factor, compliance and CMOD for a general three-point-bend beam. *International Journal of Fracture*, 89 (3), pg. 103-116, 1998.
- [12] Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R. *The stress analysis of cracks handbook*. Paris Productions Incorporated, St. Louis, Missouri, EE.UU., 1985.
- [13] ABAQUS. *Users Manual Version 6.4*. Karlsson and Sorensen Inc, 2003.