

**PROBLEMAS NUMÉRICOS EN LA REPRESENTACIÓN DE GRIETAS Y ZONAS  
PLÁSTICAS MEDIANTE DISLOCACIONES**

V. Chaves y A. Navarro

Dpto. Ing. Mecánica y de los Materiales. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Avda. Camino de los Descubrimientos, s/n. 41092. Sevilla, España.

**Resumen.** En el estudio de crecimiento de grietas pequeñas mediante la teoría de dislocaciones aparecen ecuaciones integrales singulares tipo Cauchy, de las que no se conocen soluciones analíticas salvo en problemas sencillos. El método numérico creado por *Erdogan, Gupta y Cook*, que se basa en la cuadratura de Gauss, permite resolver una ecuación integral singular del tipo citado. Se ha analizado el método para el caso más sencillo posible, el de una grieta en un medio infinito cargada en modo I. El método presenta algunas inconsistencias en su aplicación a problemas acotados, que son los de interés en el estudio de crecimiento de microgrietas. Proporciona una ecuación de más, lo que obliga a quitar una ecuación para resolver el sistema, de modo que la solución depende de la ecuación quitada. Además la solución numérica presenta un salto inexistente en la solución teórica.

**Abstract.** In the study of short crack growth through the theory of dislocations, singular integral equations of the Cauchy type are generated, which are impossible to solve analytically, except for a few simple cases. The numerical method created by *Erdogan, Gupta y Cook*, based on Gauss quadrature, can be effectively used to solve the problem of a singular integral equation of this kind. The method has been analyzed for the most simple case, a rectilinear crack in an infinite medium subjected to Mode I loading. For the bounded problems which is of interest in the study of growth of microcracks, the method shows some inconsistencies. It provides an extra equation, so one equation must be ignored. It means that the solution depends on the ignored equation. Besides the numerical solution presents a jump that does not appear in the theoretical solution.

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de crecimiento de grietas pequeñas mediante teoría de dislocaciones lleva al planteamiento de una ecuación integral singular tipo Cauchy de la que no se conocen soluciones analíticas salvo en casos muy sencillos [1, 2].

Considérese una grieta en un sólido elástico que se encuentra sometido a una cierta carga externa. La grieta y su zona plástica asociada se representa mediante una distribución de dislocaciones. El establecimiento del equilibrio de dislocaciones conduce a una ecuación integral singular tipo Cauchy cuya incógnita es la función de distribución de dislocaciones  $f(x)$ . La forma general de esta ecuación normalizada al intervalo  $(-1, 1)$  es la siguiente [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f^*(x) dx}{x_0 - x} + \int_{-1}^1 h(x, x_0) f^*(x) dx = P(x_0),$$

$$(-1 < x_0 < 1) \quad (1)$$

donde  $P(x_0)$  y  $h(x, x_0)$  son funciones conocidas y normalmente continuas (al menos a trozos) en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Por ello, la segunda integral es siempre acotada. La primera integral, por el contrario, presenta la singularidad y constituye el término dominante de la ecuación. El comportamiento de la solución puede ser entendido a partir de la solución de la ecuación con sólo la parte dominante de (1), es decir, analizando:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x_0 - x} = P(x_0), \quad (-1 < x_0 < 1) \quad (2)$$

La ecuación (2) admite dos soluciones posibles dependiendo de que se considere que la función de distribución de dislocaciones  $f(x)$  esté acotada en los puntos extremos del dominio o no [4]. Existen en la literatura métodos numéricos para la resolución de ecuaciones integrales singulares, pero éstos han sido desarrollados principalmente para la resolución de problemas en los que  $f(x)$  es no acotada en los extremos, como son los problemas de obtención del factor de intensidad de tensiones en Mecánica de fractura [3, 5]. Sin embargo el análisis de crecimiento de grietas pequeñas requiere soluciones en las que  $f(x)$  sea acotada en los extremos. Esto es necesario para representar adecuadamente la zona plástica del vértice de grieta y su interacción con la microestructura. Un problema similar aparece al estudiar la

clásica grieta de Dugdale en la Mecánica de fractura.

Este documento estudia la aplicación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones integrales singulares cuya solución sea una función de distribución acotada en los extremos. En concreto se analiza la aplicación del método de *Erdogan, Gupta y Cook* (1972) [3]. Se utiliza como ejemplo el más sencillo posible, que es el de una grieta en un medio infinito cargada en modo I, cuya solución teórica es sobradamente conocida. Este análisis permitirá precisar la aplicabilidad de estos métodos numéricos para problemas más complicados cuya solución teórica se desconozca.

## 2. ESTUDIO DE UNA GRIETA SOMETIDA A MODO I

Considérese un cuerpo infinito con una grieta de longitud  $2a$  cargada en Modo I. Delante de la grieta se prolonga la zona plástica hasta una longitud total de  $2c$ , representada como una zona lineal. La grieta y la zona plástica se modelan mediante un conjunto de dislocaciones de cuña con vectores de Burgers en la dirección  $y$  (Fig. 1).

Sobre una dislocación situada en  $x_0$  actúan la fuerza debida a la tensión aplicada ( $\sigma_y^\infty(x_0)$ ), las fuerzas ejercidas por el resto de dislocaciones y una componente de fricción ( $\sigma_1(x_0)$ ) que representa una posible resistencia al movimiento de dislocaciones a través del material. La ecuación, adimensionalizada mediante el cambio  $t = \frac{x_0}{c}$ ,  $s = \frac{x}{c}$ ,  $n = \frac{a}{c}$ , que establece el equilibrio de fuerzas sobre una dislocación genérica en  $x_0$  se escribe:

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu}[\sigma_y(t) - \sigma_1(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 B(s) \frac{1}{t-s} ds, \quad |t| \leq 1 \quad (3)$$

donde  $B(s)$  es la función de distribución de dislocaciones, es decir el número de dislocaciones que hay entre  $s$  y  $s+ds$ . Se estudia la solución acotada en los extremos.

## 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA

El problema objeto de estudio tiene una solución analítica que se obtiene mediante el teorema de inversión de Muskhelishvili. En el caso de que la tensión aplicada sea uniforme ( $\sigma_y^\infty(t) = \sigma_y^\infty$ ) y la tensión de fricción en la zona plástica sea constante la solución resulta ser la siguiente [2, 4, 6]:

$$B(s) = \frac{\sigma_{ys}}{\pi^2 A} \left[ \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1-n s}{n-s} \right| \right) - \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1+n s}{n+s} \right| \right) \right] \quad (4)$$

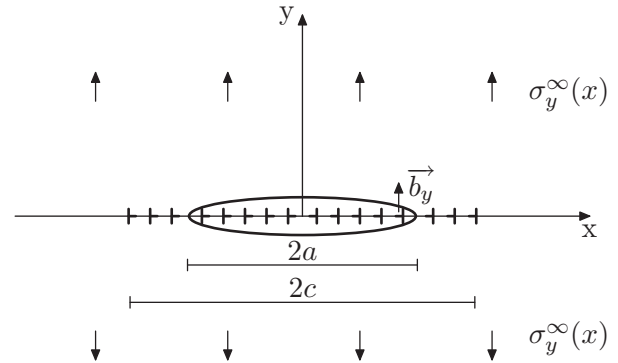


Figura 1: Grieta sometida a Modo I en un medio infinito.

$$\text{Con: } A = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}$$

$\sigma_1$ : tensión de fricción, con los valores:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 & |t| < n \\ \sigma_1 &= \sigma_{ys} & n < |t| < 1 \end{aligned}$$

Puede demostrarse que la solución acotada existe si y sólo si se verifica cierta *condición de existencia*, que para este caso concreto es la conocida relación de Dugdale, expresión que da el tamaño relativo de la zona plástica respecto al tamaño de grieta en función de la carga externa aplicada:

$$\frac{a}{c} = \cos \left( \frac{\pi \sigma_y^\infty}{2 \sigma_{ys}} \right) \quad (5)$$

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

A continuación se describe el método desarrollado por *Erdogan, Gupta y Cook* para la resolución numérica de este tipo de problemas [3, 7].

### 4.1. Cuadratura de Gauss y polinomios de Jacobi

Los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones integrales se basan en las fórmulas de cuadratura para el cálculo de integrales [8, 9, 10]. Las fórmulas de cuadratura permiten aproximar una integral definida por un sumatorio de términos. En el caso de la cuadratura de Gauss tiene la forma siguiente:

$$\int_{-1}^1 \phi(s) \omega(s) ds \simeq \sum_{i=1}^n W_i \phi(s_i) \quad (6)$$

Siendo  $\phi(s)$  una función continua suave y  $\omega(s)$  la función peso:

$$\omega(s) = (1-s)^\alpha (1+t)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta \quad (7)$$

Es decir la función  $\phi(s)$  se evalúa en ciertos puntos del intervalo de integración y la integral se aproxima por el sumatorio de los valores en esos puntos

multiplicados por unos ciertos factores de peso. Los puntos son justamente las raíces de los polinomios ortogonales de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$  respecto a la función  $\omega(s)$  elegida.

Considérese a continuación la aplicación a una ecuación integral ordinaria cuya incógnita es la función  $\phi(s)$ :

$$\int_{-1}^1 \omega(s)h(s,t)\phi(s)ds = P(t) \quad , \quad (-1 < t < 1) \quad (8)$$

Aplicando la fórmula de la cuadratura para una serie de valores  $t_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) se transforma el problema en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con las incógnitas discretas  $\phi(s_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\sum_{i=1}^n W_i h(s_i, t_k) \phi(s_i) = P(t_k) \quad , \quad (-1 < t_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

La principal hipótesis de la cuadratura de Gauss es que  $\phi(s)$  puede ser aproximada con precisión mediante un polinomio de grado  $2n - 1$ . Pero si  $\phi(s)$  tiene una singularidad en el intervalo de integración esto no es posible. El método de *Erdogan, Gupta y Cook*, haciendo uso de diversas propiedades de polinomios ortogonales logra que se pueda aplicar la fórmula de cuadratura a una ecuación integral con singularidad.

#### 4.2. Método de Erdogan, Gupta y Cook

Para el problema acotado en ambos extremos objeto de este estudio, la función de peso adecuada tiene la siguiente forma:

$$\omega(s) = \sqrt{1 - s^2} \quad (10)$$

Siendo:  $\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$

Considérese la ecuación integral singular tipo Cauchy en su forma general:

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(s) \omega(s) \frac{ds}{s - t} \quad , \quad (-1 < t < 1) \quad (11)$$

donde la función  $\phi(s)$  es desconocida. Dado que los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(s) = P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(s)$  constituyen un sistema ortogonal completo, la función  $\phi(s)$  se puede aproximar por el siguiente desarrollo en serie:

$$\phi(s) \simeq \sum_{j=0}^p B_j P_j^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(s) \simeq \sum_{j=0}^p B_j U_j(s) \quad (12)$$

Sustituyendo en la ecuación integral queda:

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^p B_j U_j(s) \omega(s) \frac{ds}{s - t} =$$

$$= \sum_{j=0}^p \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 B_j U_j(s) \omega(s) \frac{ds}{s - t} \right] \quad (13)$$

*Erdogan, Gupta y Cook* proporcionan una ecuación que, mediante propiedades de polinomios ortogonales, permite eliminar la singularidad de la ecuación integral. Es la siguiente:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(s) \omega(s) \frac{ds}{s - t} = \frac{-\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\pi} \cdot 2^{-\kappa} P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t) \quad (14)$$

Siendo  $\kappa = -(\alpha + \beta)$ . Si se aplica esta ecuación anterior a la ecuación integral queda ( $\kappa = -1$ ):

$$S(t) = \sum_{j=0}^p B_j \left[ -\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1 - (\frac{1}{2}))}{\pi} 2 T_{j+1}(t) \right] \quad (15)$$

Donde se ha denominado  $T_{j+1}(s)$  al polinomio de Jacobi  $P_{j+1}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(s)$ . La expresión se puede simplificar utilizando propiedades de la función gamma  $\Gamma$ :

$$S(t) = - \sum_{j=0}^p B_j T_{j+1}(t) \quad (16)$$

De modo que se ha eliminado la singularidad de la ecuación integral. Las incógnitas pasan a ser los coeficientes  $B_j$ . *Erdogan, Gupta y Cook* utilizan aún otra propiedad de los polinomios de Jacobi para volver a la forma del problema en que la incógnita es la función  $\phi$ :

$$T_{j+1}(t_k) = - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - s_i^2)}{(n + 1)(s_i - t_k)} U_j(s_i) \quad (17)$$

Finalmente se introduce la ecuación anterior en la ecuación general quedando una ecuación integral que sólo se cumple en un conjunto discreto de puntos  $t_k$  y cuyas incógnitas son las  $\phi(s_i)$ :

$$\begin{aligned} S(t_k) &= \sum_{j=0}^p B_j \sum_{i=1}^n \frac{(1 - s_i^2)}{(n + 1)(s_i - t_k)} U_j(s_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^p B_j U_j(s_i) \frac{(1 - s_i^2)}{(n + 1)(s_i - t_k)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \phi(s_i) \frac{(1 - s_i^2)}{(n + 1)(s_i - t_k)} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

#### 4.3. Sistema de ecuaciones final

El resultado anterior (18) se puede aplicar al problema objeto de estudio, transformándose la ecuación integral singular (3) en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y^\infty(t_k) - \sigma_1(t_k)] = \sum_{i=1}^N W_i \frac{\phi(s_i)}{t_k - s_i} \quad ,$$

$$k = 1, \dots, N + 1. \tag{19}$$

Siendo:

$$s_i = \cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right) \quad (\text{ceros pol. Jac.: } U_N(s_i) = 0)$$

$$t_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(N+1)}\right) \quad (\text{ceros pol. Jac.: } T_{N+1}(t_k) = 0)$$

$$W_i = \frac{1 - s_i^2}{N+1}$$

$$i = 1, \dots, N. \quad k = 1, \dots, N + 1.$$

$$\sigma_1(t_k) = 0 \quad \text{si } |t_k| < \frac{a}{c}$$

$$\sigma_1(t_k) = \sigma_{ys} \quad \text{si } \frac{a}{c} < |t_k| < 1 \tag{20}$$

Por tanto se obtiene un sistema de N+2 ecuaciones (ecuaciones (19) y (5)) y solamente N+1 incógnitas (los N términos  $\phi(s_i)$  y la relación  $\frac{a}{c}$ ). Y es que al aplicar la ecuación (14) para el caso acotado ( $\kappa = -1$ ) se producen N + 1 ecuaciones.

#### 4.4. Resolución del sistema de ecuaciones

*Erdogan, Gupta y Cook* recomiendan simplemente ignorar una de las N+1 ecuaciones, para que el sistema quede con las mismas ecuaciones e incógnitas. En concreto recomiendan eliminar la ecuación central por tratarse del punto con menos información (ya que debe pasar por 0 al ser un problema antisimétrico).

Se ha seguido la recomendación de *Erdogan, Gupta y Cook* de eliminar la ecuación central, quedando N+1 ecuaciones y N+1 incógnitas. Pero en las N ecuaciones provenientes de la ecuación integral singular el término independiente depende del tamaño de grieta relativo ( $\frac{a}{c}$ ), que se conoce a través de la ecuación de existencia. Por tanto es necesario resolver en primer lugar la ecuación de existencia (5), y con el tamaño de grieta relativo obtenido a partir de ella construir los términos independientes de las N ecuaciones. Y finalmente resolver el sistema de N ecuaciones y N incógnitas que proporcionan las  $\phi(s_i)$ . A partir los  $\phi(s_i)$  se obtiene la solución de la función de distribución de dislocaciones de forma discreta:

$$B(s_i) = \omega(s_i)\phi(s_i), \quad i = 1, \dots, N. \tag{21}$$

Este proceso ha sido programado en “Mathematica” para un valor de N=1000. En la Fig. 2 se muestra la solución numérica obtenida. Ésta es igual que la solución teórica (4) salvo en la zona central (lugar en el que se ha quitado la ecuación) en la que se produce un salto que lógicamente no existe en la solución teórica. En la figura 3 se muestra con más detalle la zona del salto.

Este salto se va estrechando a medida que aumenta N pero prácticamente no varía en módulo. En la Fig.

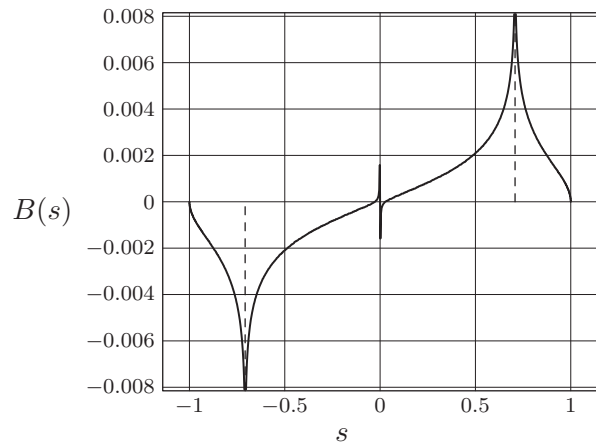


Figura 2: Solución numérica de la función de distribución de dislocaciones adimensional  $B(s)$  para  $N = 1000$ .

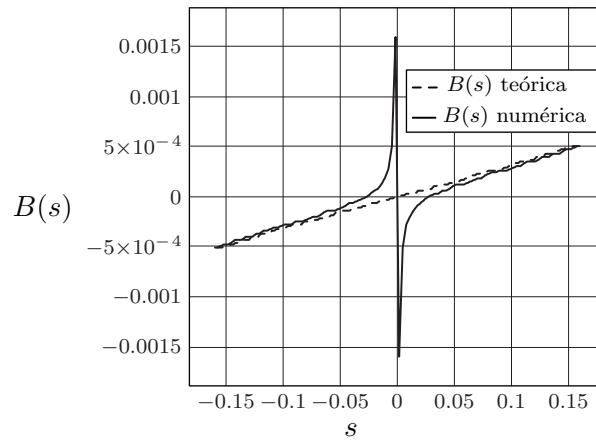


Figura 3: Detalle de la solución teórica y numérica ( $N = 1000$ ) de  $B(s)$  en la zona del salto.

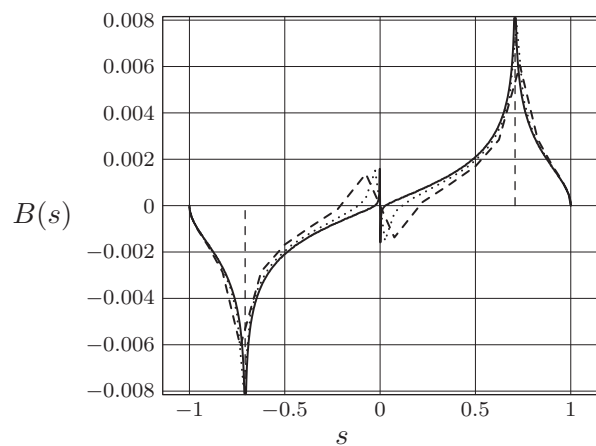


Figura 4: Solución numérica de  $B(s)$  para diversos valores de N.

4 se han representado las soluciones para  $N=20, 60$  y  $1000$ .

Si se elimina otra ecuación diferente a la central el salto no desaparece sino que se traslada al punto correspondiente a la ecuación quitada. En la Fig. 5 se ha quitado la ecuación 350 en vez de la 501.

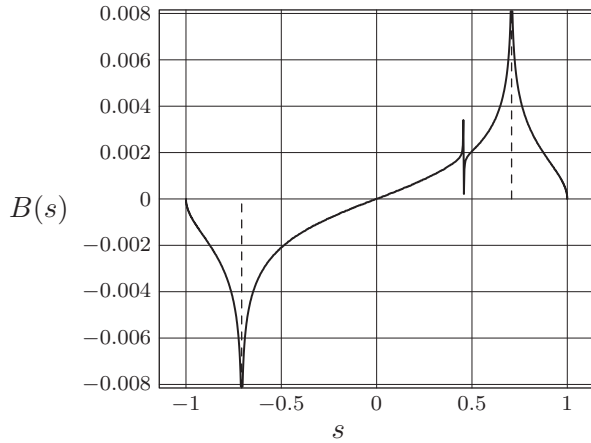


Figura 5: Solución numérica de  $B(s)$  para  $N = 1000$  con ecuación quitada distinta de la central (350).

Eliminando los valores discretos de  $\phi(s_i)$  que se encuentran alrededor de la ecuación quitada se obvia el salto y por tanto queda una solución numérica prácticamente similar a la teórica. En la Fig. 6 se han quitado alrededor de la ecuación quitada, que es la 350, 16 de los 1000 puntos totales.

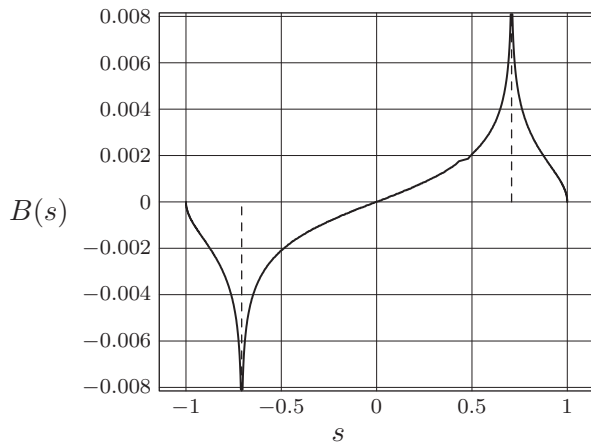


Figura 6: Solución numérica de  $B(s)$  eliminando los puntos del salto (350).

**4.5. Relación entre ec. de existencia y quitada**

*Erdogan, Gupta y Cook* indican que usando su método numérico para resolver la ecuación integral singular se satisface automáticamente la condición de existencia. Sin embargo la condición de existencia depende directamente de la carga aplicada y no se cumple para todas las cargas. Por tanto no se puede

cumplir automáticamente al usar su método.

Una vez resuelto el sistema de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas se ha comprobado que no se cumple la ecuación central quitada, es decir que no es linealmente dependiente. Ha de ser así ya que se ha observado anteriormente que en función de la ecuación quitada cambia la posición del salto y por tanto la solución del sistema de ecuaciones, luego no puede ser linealmente dependiente.

Es interesante comparar la ecuación de condición de existencia con la ecuación central quitada del sistema de  $N+1$  ecuaciones. Esta comparación se realiza a través de las funciones  $F_1$  y  $F_2$ , que se definen a continuación.

Ecuación existencia.

$$F_1\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} - \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_y^\infty}{\sigma_{ys}}\right) \tag{22}$$

Ecuación quitada.

$$F_2\left(\frac{a}{c}\right) = \sum_{i=1}^N W_i \frac{\phi(s_i)}{t_k - s_i} + \frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_y^\infty(t_k) - \sigma_1(t_k)]$$

$$k = \frac{N}{2} + 1 = \text{Ec. central} \tag{23}$$

La función  $F_2$  se obtiene de forma discreta en función de  $\frac{a}{c}$ . Para cada valor de  $\frac{a}{c}$  se ha de resolver el sistema de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas y a continuación con los  $\phi_i$  obtenidos calcular el valor de  $F_2$ . El número de valores para construir la función  $F_2$  es controlado con el parámetro  $m$ .

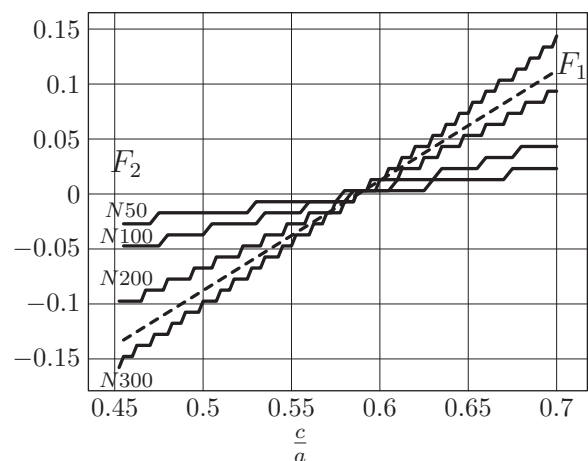


Figura 7: Comparación entre la función  $F_1$  y varias funciones  $F_2$ .

En la Fig. 7 se representa gráficamente la función  $F_1$  y varias funciones  $F_2$  correspondientes a diversos valores de  $N$ . Se estudia el caso de carga  $\frac{\sigma_y^\infty}{\sigma_{ys}} = \frac{180}{300}$ . A la vista de la gráfica se observa que:

- La función  $F_1$  de la ecuación de existencia es una función continua que corta al eje  $\frac{a}{c}$  en la solución de la ecuación de existencia, que para este caso es 0,5878. Sin embargo la función  $F_2$  de la *ecuación quitada* no es una función continua sino que es una función escalón. En concreto tiene  $\frac{N}{2}$  escalones, ya que se pueden formar  $\frac{N}{2}$  términos independientes diferentes en el sistema de ecuaciones (19) y por tanto obtenerse  $\frac{N}{2}$  soluciones diferentes para los diversos valores de  $\frac{a}{c}$  entre 0 y 1.
- A medida que aumenta N los escalones de  $F_2$  se van haciendo más estrechos observándose que el cambio de signo de esta función va tendiendo al punto en que  $F_1$  corta al eje  $\frac{a}{c}$ .
- Sin embargo el valor del salto vertical entre dos escalones no cambia con N, es constante, es una constante del sistema de ecuaciones. Tampoco varía este salto aumentando el parámetro  $m$ , que sólo logra que la transición entre dos escalones sea más vertical. Por tanto no es posible lograr que la función  $F_2$  tienda a la  $F_1$  ni que corte al eje  $\frac{a}{c}$  dónde lo corta  $F_1$ .
- Si se podría entender que la función  $F_2$  (*ecuación quitada*) a través del límite en su cambio de signo tiende a proporcionar la misma solución que la función  $F_1$  (*ecuación existencia*), que es el tamaño relativo grieta-zona plástica.

## 5. CONCLUSIONES

El método numérico creado por *Erdogan, Gupta y Cook* permite resolver una ecuación integral singular mediante un sistema de ecuaciones lineales, de forma relativamente sencilla. Este método es muy apropiado para problemas cuya solución sea no acotada en los extremos, sin embargo presenta algunas inconsistencias para problemas cuya solución sea acotada en los extremos (de interés en el estudio de crecimiento de grietas pequeñas): proporciona una ecuación de más, lo que obliga a quitar una ecuación para resolver el sistema, de modo que la solución depende de la ecuación quitada ya que no son linealmente dependientes; presenta un salto justo alrededor de la ecuación quitada que no existe en la solución teórica.

Si se analizan la ecuación de existencia y la ecuación quitada en función de  $\frac{a}{c}$  se observa que ambas son diferentes, la ecuación de existencia proporciona una función continua mientras que la ecuación quitada proporciona una función escalón. El corte de la función de la ecuación de existencia con el eje  $\frac{a}{c}$  da la relación grieta-zona plástica. La función de la ecuación quitada no corta al eje  $\frac{a}{c}$  por ser una función escalón, pero el cambio de signo tiende a dar la misma solución que la ecuación de existencia.

El salto en la solución numérica se encuentra en una zona muy pequeña. Si se eliminan los puntos que se encuentran en el salto la solución queda muy parecida a la teórica.

Se podría pensar en modificar el método numérico de *Erdogan, Gupta y Cook* para que quedaran las mismas ecuaciones que incógnitas, pero realmente el proceso de obtención de las ecuaciones es bastante complejo y de gran nivel matemático, por lo que no parece un camino sencillo. Existen otros métodos numéricos realizados por autores posteriores. Sería muy conveniente analizar estos métodos y ver si solucionan los problemas del método de *Erdogan, Gupta y Cook*.

## Referencias

- [1] Head, A. K. and Louat, N., 1955, *The distribution of dislocations in linear arrays*, Aust. J. Phys. 8, pp. 1-7.
- [2] Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., 1963, *The spread of plastic yield from a notch*, Proc. R. Soc. A272, pp. 304-314.
- [3] Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T. S., 1973, *Mechanics of fracture. Methods of analysis and solutions of crack problems. Capítulo 7: Numerical solution of singular integral equations*, editado por G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden.
- [4] Vallellano, C., Navarro, A. y Domínguez, J., 2002, *Compact solution for modelling cracks in infinite solids using distributed dislocations*, Philosophical magazine A, volumen 2, No 1, 81-92.
- [5] Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N. and Korsunsky, A. M., 1996, *Solution of cracks problems*, Kluwer academic publishers.
- [6] Muskhelishvili, N. I., 1953, *Singular integral equations*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands.
- [7] Erdogan, F. and Gupta, G. D., 1972, *On the numerical solution of singular integral equations.*, Artículo de "Quarterly of applied mathematics".
- [8] Hildebrand, F. B., 1974, *Introduction to numerical analysis*, Dover publications, Inc, New York, biblioteca:519.6-HIL.
- [9] Szegő, G., 1939, *Orthogonal polynomials*, published by the American Mathematical Society.
- [10] Erdelyi, A., 1953, *Higher transcendental functions, Volumen II*, Krieger publishing company, Malabar, Florida.