

CAMPOS DE TENSIÓN SINGULARES Y CONDICIONES DE INESTABILIDAD EN MODO-II

D. Fernández Zúñiga*, A. Blázquez**, J.K. Kalthoff***, A. Fernández Canteli*

* Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación
Universidad de Oviedo. afc@uniovi.es

**Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y de Fabricación
Universidad de Málaga. abg@uma.es.

***Experimentelle Mechanik
Ruhr-Universität Bochum. Joerg.F.Kalthoff@ruhr-uni-bochum.de

Resumen. En este trabajo se estudian los campos de tensión que aparecen en el proceso de iniciación de una grieta acodada (grieta hija), originada a partir de una grieta generada bajo condiciones de carga en modo-II (grieta madre) y su influencia sobre la condición de estabilidad de grieta. Para ello, se analizan los cambios que experimentan los campos de tensión en el proceso de transición desde *antes* hasta *después* de la formación de la grieta acodada. Asimismo se estudia la situación para longitudes crecientes de la grieta hija, desde longitudes muy pequeñas, tendiendo a cero, hasta longitudes medias de grieta. Debido a su alta resolución espacial se ha elegido el método de los elementos de contorno para llevar a cabo este estudio numérico. La validez de los resultados numéricos ha sido confirmada experimentalmente.

Summary. The stress fields at initiation of a kinked (daughter) crack starting from a (mother) crack subjected to mode-II loading conditions and the influence of these stress fields on the instability condition is investigated. With this aim, the changes experienced by the stress fields in the transition phase from *before* to *after* the kinked daughter crack is initiated are analyzed; in addition, the situation is studied for growing lengths of the daughter crack, from very small crack lengths approaching zero till medium sized crack lengths. The BEM, due to its inherent high spatial resolution, is used as an adequate technique for this kind of numerical investigation. The validity of the numerical data is confirmed by experimental results.

1. INTRODUCCIÓN.

En materiales frágiles, una grieta sometida a condiciones de carga en modo-II (denominada grieta madre) rompe bajo modo-I por aparición de una grieta acodada (denominada grieta hija) que se propaga bajo un ángulo de -70.5° con respecto a la dirección de la grieta madre original. Entre la grieta madre y grieta hija se forma una entalla.

En este trabajo se investiga la transición que se presenta desde la singularidad de tensiones de la grieta madre, previa a la inestabilidad, hasta la singularidad en modo-I de la grieta hija. Se consideran longitudes de la grieta hija desde muy pequeñas hasta valores relativamente grandes.

Al objeto de aclarar contradicciones en algunos de los modelos existentes sobre la inestabilidad en modo-II, se hace una clara distinción entre los estados *antes* y *después* de la aparición de la grieta hija acodada. El primero, representado por la distribución de tensiones de la grieta madre original, considerando sólo la previsible dirección de propagación de la grieta hija. El segundo, representado por el campo de tensión en el

frente de la grieta hija tras su aparición, pero para una longitud extrapolada a cero. La condición de inestabilidad en el frente de la grieta hija de longitud pequeña, extrapolada hasta el caso límite de longitud despreciable, no coincide con la condición de inestabilidad de la grieta original madre antes de que aparezca la grieta hija. Para clarificar este problema se estudian los campos de tensión antes y después de que se produzca el acodamiento de la grieta inicial. El conocimiento de los campos de tensión y la caracterización de los factores de intensidad de tensiones para los estados *antes* y *después* del acodamiento de la grieta hija es un requisito importante, si bien parcial, para garantizar un análisis correcto de rotura de grietas bajo modo-II de carga. En una etapa posterior es preciso establecer un criterio de rotura para la predicción de la inestabilidad la grieta.

En los cálculos numéricos realizados se aplicó el método de los elementos de contorno, debido a su alta capacidad de resolución para definir a pequeña escala los campos de tensión en las inmediaciones del frente de grieta o de la entalla. La validez de los cálculos realizados con el MEC ha sido contrastada analítica y experimentalmente.

2. MODELOS PARA LA PREDICCIÓN DE INESTABILIDAD DE GRIETAS EN MODO-II.

La predicción de inestabilidad de grietas bajo carga en modo-II es motivo de controversia en la bibliografía, contrariamente a la situación de grietas en modo-I, para las que existe un concepto generalmente aceptado por la comunidad de fractura. Erdogan- Sih [1] sugieren que las grietas cargadas en modo-II se vuelven inestables cuando la tensión circunferencial en el frente de grieta alcanza un valor crítico. La grieta se propagaría en una dirección perpendicular a la de la máxima tensión circunferencial, es decir, bajo un ángulo ϑ_{cr} , que resulta ser de -70.5° . La distribución de tensiones a lo largo de esta dirección muestra una singularidad con un factor de intensidad de tensiones y, consecuentemente, este criterio sugiere que la inestabilidad ocurre cuando el factor de intensidad de tensiones alcanza su valor crítico, es decir:

$$K_I^{Db} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma_{\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right) \Big|_{\vartheta = \vartheta_{cr} = -70.5^\circ} \Rightarrow (K_I^{Db})_{cr} \quad (1)$$

en la que los superíndices M y Db se refieren, respectivamente, a la grieta madre y a la grieta hija *antes (before)* de su formación. El superíndice Da se utilizará en referencia a la grieta hija *después (after)* de su formación a partir de la grieta madre y N para caracterizar la entalla creada. La condición (1) puede generalizarse a todas las posibles condiciones de modo mixto para una orientación crítica ϑ_{cr} , determinada por la condición de que la correspondiente tensión circunferencial alcance un máximo en esta dirección. En lo que sigue, solamente se considerarán condiciones de carga en modo-II puro.

Si se supone que la distribución de tensiones en el frente de una grieta cargada en modo-II en la orientación $\vartheta_{cr} = -70.5^\circ$ es equivalente a la del regular modo-I típico para $\vartheta_{cr} = 0^\circ$, el valor crítico del factor de intensidad de tensiones (f.i.t.) para la orientación $\vartheta_{cr} = -70.5^\circ$ del campo tensional de la grieta madre se puede identificar con el f.i.t. para el modo-I, es decir, con la tenacidad a fractura K_{Ic} :

$$(K_I^{Db})_{cr} = K_{Ic} \quad (2)$$

con lo que de la ecuación (1) resulta:

$$K_I^{Db} = 1.155 K_{II}^M \quad (3)$$

donde
$$K_{II}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\tau_{IIr\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta = 0^\circ} \quad (4)$$

deduciéndose de ahí la siguiente relación entre la tenacidad a fractura en modo-II y en modo-I:

$$K_{IIc} = 0.866 K_{Ic} \quad (5)$$

Aunque la orientación de la grieta hija en modo-II (e incluso en el caso general de modo mixto) ha sido confirmada por una serie de autores para diferentes materiales, el criterio de rotura propuesto por Erdogan-Sih no ha sido corroborado, habiéndose obtenido experimentalmente valores de K_{IIc} entre $0.9K_{Ic}$ y $3K_{Ic}$

[1,2,3]. Dado que la validez de la distribución de tensiones a lo largo de la orientación crítica $\vartheta_{cr} = -70.5^\circ$ para el campo de tensión de la grieta madre bajo modo-II, ha quedado demostrada analítica, numérica y experimentalmente, el error en el criterio de rotura debe proceder de igualar el f.i.t. circunferencial crítico, $(K_I^{Db})_{cr}$ con el f.i.t. del modo-I típico, K_{Ic} . Y efectivamente, la distribución singular de tensiones para $\vartheta_{cr} = -70.5^\circ$ en modo-II, contrariamente a la opinión general, sólo coincide parcialmente con la del modo-I, tal como se demostrará en el siguiente apartado.

En el denominado modelo del “factor de intensidad de tensiones equivalente” propuesto por Richard [3], se propone un modelo flexible para modo mixto mediante la introducción de un parámetro α_I en la expresión

$$K_V = 0.5 K_I + 0.5 \sqrt{K_I^2 + 4 (\alpha_I K_{II}^2)} \quad (6)$$

en la que K_V es el factor de intensidad de tensiones equivalente. Para $\alpha_I = 1.155$, valor considerado habitualmente por Richard [4], este modelo coincide con el de Erdogan- Sih, presentando, por tanto, los mismos problemas que éste.

Otros autores, como Nuismer [4] y Hussain et al. [5], consideran grietas hija de pequeña longitud y extrapolan a cero esas longitudes para deducir la relación K_{IIc}/K_{Ic} . Estos modelos, basados en diferentes interpretaciones energéticas, plantean la estabilidad de una grieta hija ya existente. Nuismer encuentra la misma relación $K_{IIc} = 0.866 K_{Ic}$, en consonancia con la propuesta de Erdogan- Sih. El criterio de rotura de Hussain et al., basado en la integral J alrededor del frente de la grieta hija, conduce a una relación $K_{IIc} = 0.63 K_{Ic}$, que difiere aún más de los resultados experimentales. En consecuencia, estos modelos, basados en el estado de la grieta hija *después* de su formación, no contribuyen a establecer *a priori* condiciones realistas para determinar la verdadera tenacidad a fractura en modo-II.

3. ANÁLISIS DE LA INESTABILIDAD DE UNA GRIETA EN MODO-II.

Consideremos en primer lugar el problema de inestabilidad en grietas cargadas en modo-I. El campo de tensiones en la proximidad del frente de la grieta madre en el caso de modo-I típico se representa analíticamente mediante las ecuaciones de Sneddon, ver [6], (ver Fig.1).

Para la previsible orientación de la grieta hija $\vartheta_{cr} = 0^\circ$, σ_{Ir}^M y $\sigma_{I\vartheta}^M$ resultan ser coincidentes. Esto supone que ambas distribuciones de tensiones muestran la misma singularidad de tensiones para $\vartheta_{cr} = 0^\circ$, de manera que K_I puede deducirse indistintamente a partir de σ_{Ir}^M o de

$\sigma_{I\vartheta}^M$ de acuerdo con:

$$K_{I\vartheta}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{I\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{I\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ} \cdot (7)$$

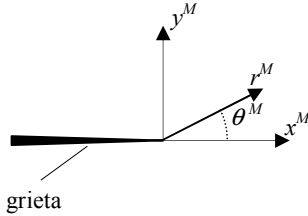


Fig. 1: Grieta bajo carga en modo-I típico y sistemas de coordenadas cartesiano y polar de la grieta madre.

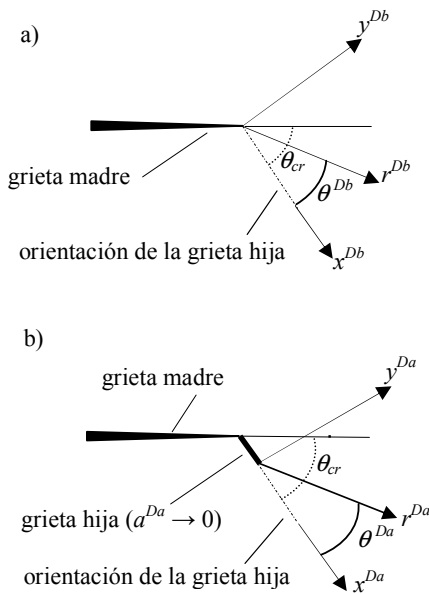


Fig. 2: Grieta en modo-II y sistemas de coordenadas a) antes y b) después de la aparición de la grieta hija.

Sin embargo, resulta conveniente proceder en cada caso a una deducción separada de los factores de intensidad de tensiones, K_I^{Db} y K_I^{Da} , coincidentes en valor pero formalmente diferentes:

$$K_{Ir}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{Ir}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ} \quad (8)$$

$$K_{I\vartheta}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{I\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ}$$

Dado que la grieta hija resulta de una extensión coplanar de la grieta madre, los f.i.t. de la grieta hija antes y después de su formación, K_I^{Db} y K_I^{Da} , son idénticos al f.i.t. K_I^M :

$$\begin{aligned} K_{Ir}^{Db} &= K_{Ir}^{Da} = K_{Ir}^M = K_I^M \\ K_{I\vartheta}^{Db} &= K_{I\vartheta}^{Da} = K_{I\vartheta}^M = K_I^M \end{aligned} \quad (9)$$

Acorde con ello, la inestabilidad sucederá cuando

$$K_{I\vartheta}^{Db} = K_{I\vartheta}^{Da} = K_{Ir}^{Db} = K_{Ir}^{Da} = K_{Ir}^M = K_{I\vartheta}^M = K_{Ic} \quad (10)$$

Para una grieta madre cargada en modo-II, la situación resulta más compleja, debido al cambio de dirección que se presenta en la grieta hija (ver Fig. 2). De nuevo resultan aplicadas las fórmulas de Sneddon [6], esta vez en función de K_{II}^M que se define como en (4).

Como resulta del cambio en la dirección del crecimiento de la grieta hija con respecto a la orientación de la grieta inicial, $\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ$, la expresión de las tensiones radial y circunferencial resulta ser:

$$\begin{aligned} \sigma_{IIr}^M \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} &= \sigma_{Ir}^{Db} \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ} = \\ \frac{K_{II}^M}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left(-5 \sin \frac{\vartheta}{2} + 3 \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} &= 0 \\ \sigma_{II\vartheta}^M \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} &= \sigma_{I\vartheta}^{Db} \Big|_{\vartheta_{cr}^M = 0^\circ} = \\ \frac{K_{II}^M}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left(-3 \sin \frac{\vartheta}{2} - 3 \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} &= 1.155 \frac{K_{II}^M}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (11)$$

$\sigma_{II\vartheta}^M$ muestra una singularidad para $r \rightarrow 0$, mientras que σ_{IIr}^M , contrariamente al campo de tensión del modo-I típico, no presenta singularidad (de hecho, σ_{IIr}^M es siempre cero a lo largo de la orientación $\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ$, (ver Fig. 3). En consecuencia, y procediendo como en el caso anterior, distinguiendo entre los f.i.t. de la grieta hija antes de su formación, K_{Ir}^{Db} y $K_{I\vartheta}^{Db}$, para las tensiones radial y circunferencial a lo largo de la grieta hija futura, σ_{IIr}^M y $\sigma_{II\vartheta}^M$, se obtiene

$$\begin{aligned} K_{Ir}^{Db} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{IIr}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} = 0 \\ K_{I\vartheta}^{Db} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{II\vartheta}^M \sqrt{2\pi r} \right] \Big|_{\vartheta_{cr}^M = -70.5^\circ} = 1.155 K_{II}^M \end{aligned} \quad (12)$$

Los dos f.i.t. K_{Ir}^{Db} y $K_{I\vartheta}^{Db}$, para las grietas hija iniciadas a partir de grietas madre cargadas en modo-I y en modo-II, son sustancialmente diferentes en su naturaleza. Así, mientras que para el modo-I, se cumple $K_{Ir}^{Db} = K_{I\vartheta}^{Db}$, para el modo-II resulta $K_{Ir}^{Db} \neq K_{I\vartheta}^{Db}$, tal como se ilustra en la Fig. 3.

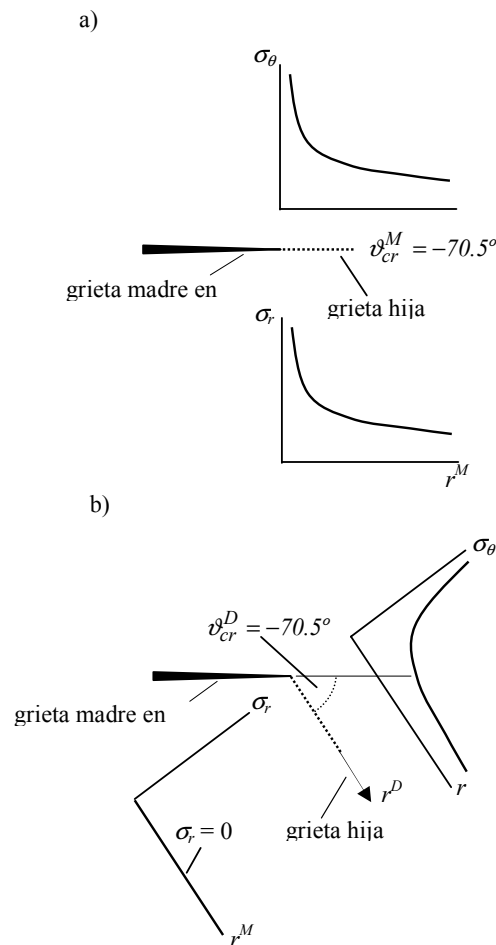


Fig. 3: Representación sistemática a) de las distribuciones de tensiones σ_r^M y σ_θ^M para el caso del modo-I típico ($\vartheta_{cr} = 0^\circ$) y b) de los campos singulares de tensión σ_r^D y σ_θ^D para el caso de pseudo-modo-I (modo-II para $\vartheta_{cr} = -70.5^\circ$).

Por lo tanto, el estado de tensiones para una grieta hija iniciada en modo-II sólo coincide con el correspondiente al modo-I típico en lo relativo al f.i.t. $K_{I\vartheta}^{Db}$, pero no así al f.i.t. K_{Ir}^{Db} , por lo que se dice que representa una situación de *pseudo-modo-I*. Los cálculos numéricos (ver apartado 4) demuestran, que el campo de tensión para una grieta hija de longitud finita iniciada en modo-II coincide plenamente con el campo tensional de modo-I regular, para el que se cumple que $K_{Ir}^{Da} = K_{I\vartheta}^{Da}$.

Se deduce que aplicar el mismo criterio de estabilidad para la predicción de rotura de una grieta bajo pseudo modo-I que para modo-I regular, tal como hacen Erdogan- Sih y otros autores no está justificado y conduce a resultados erróneos como consecuencia de los diferentes campos de tensión que aparecen en ambos casos.

4. CÁLCULOS NUMÉRICOS

Con el fin de estudiar el f.i.t. de grietas hija iniciadas en modo-II para los estados *antes* y *después* de su formación se realizaron los siguientes cálculos con un modelo lineal de elementos de contorno para una probeta tipo Arcan-Richard de una aleación de aluminio Al 7075 ($E=71.000$ MPa, $\nu=0,34$, $R_{p0,2}=533$ MPa, $K_{Ic}=30$ MPam^{1/2}, $K_{IIc}=44,4$ MPam^{1/2}), de anchura $W=50$ mm y provista de una grieta de longitud $a/W=0,50$, sometida a una carga de referencia en condiciones de modo-II.

Para la solución del problema elástico, se consideró un modelo plano en una aproximación multicuerpo, bajo condiciones de deformación plana. Inicialmente se consideraron seis cuerpos tal como se muestra en la Fig. 4a. Dos sólidos representan el campo de interés de la probeta donde se sitúan las grietas; otros dos sólidos constituyen las zonas de agarre (en sombreado). En estas zonas reforzadas se ha supuesto un módulo de elasticidad diez veces mayor que el del material base. En los dos últimos sólidos, que representan las mordazas se consideró una rigidez diez veces mayor que las del material base. La formulación débil de las condiciones de la intercara y el movimiento como sólido rígido se restringen de acuerdo con la formulación propuesta en [7]. En la Fig. 4b se muestran las medidas aproximadas de los elementos en las regiones significativas del modelo de elementos de contorno, que se mantuvieron invariables a lo largo de todo el cálculo realizado.

La solución del problema anterior permite establecer las interacciones entre los diferentes sólidos. Suponiendo que estas interacciones no sufren cambios durante el proceso, el campo de tensiones en la proximidad de la grieta puede ser analizado para diferentes longitudes de grieta, ver Fig. 4a. La intercara entre los sólidos se define como la correspondiente a $-70,5^\circ$ con respecto al plano de la grieta madre original del modo-II, de acuerdo con estudios teóricos y experimentales previos [2].

Los resultados de los campos de tensión, como distribuciones angulares a diferentes distancias radiales desde el origen de singularidad, aparecen representados con respecto a los tres sistemas de coordenadas con origen en el frente de las correspondientes tensiones singulares. El campo de tensiones en el frente de la grietas madre e hija confirma singularidades del tipo $r^{0,5}$, como era de esperar por otros trabajos previos, mientras que en la entalla, con un ángulo de abertura de $250,5^\circ$, se obtiene un coeficiente de singularidad de $-0,41$ de acuerdo con los resultados de [8]. En las Figs. 5 y 6 se representan las tensiones multiplicadas por la dependencia de singularidad, normalizadas respecto del factor de intensidad de tensiones de la grieta madre, K_{II}^M . Las tensiones se calcularon para una

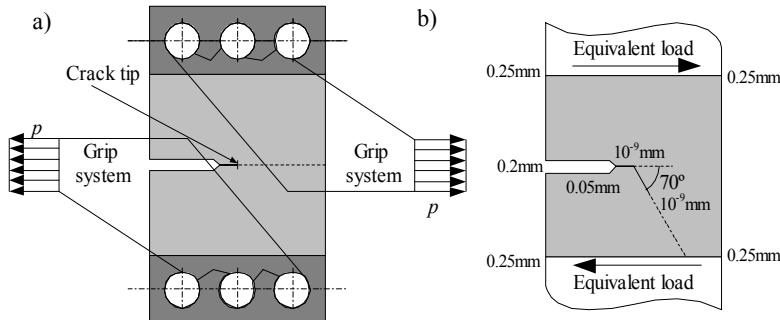


Fig. 4: Probeta Arcan-Richard: a) modelo completo utilizado en los cálculos numéricos y b) modelo simplificado v tamaño de malla.

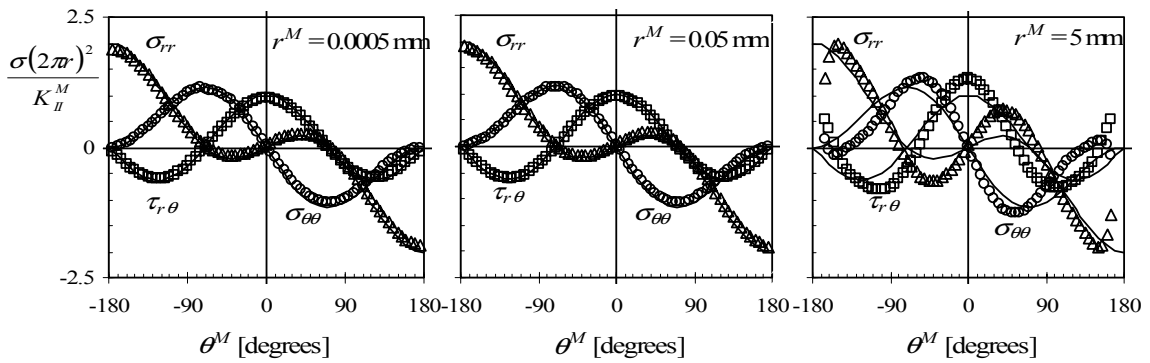


Fig. 5: Tensiones normalizadas para diferentes distancias, r , en función de la orientación angular, θ^M , alrededor del frente de la grieta madre.

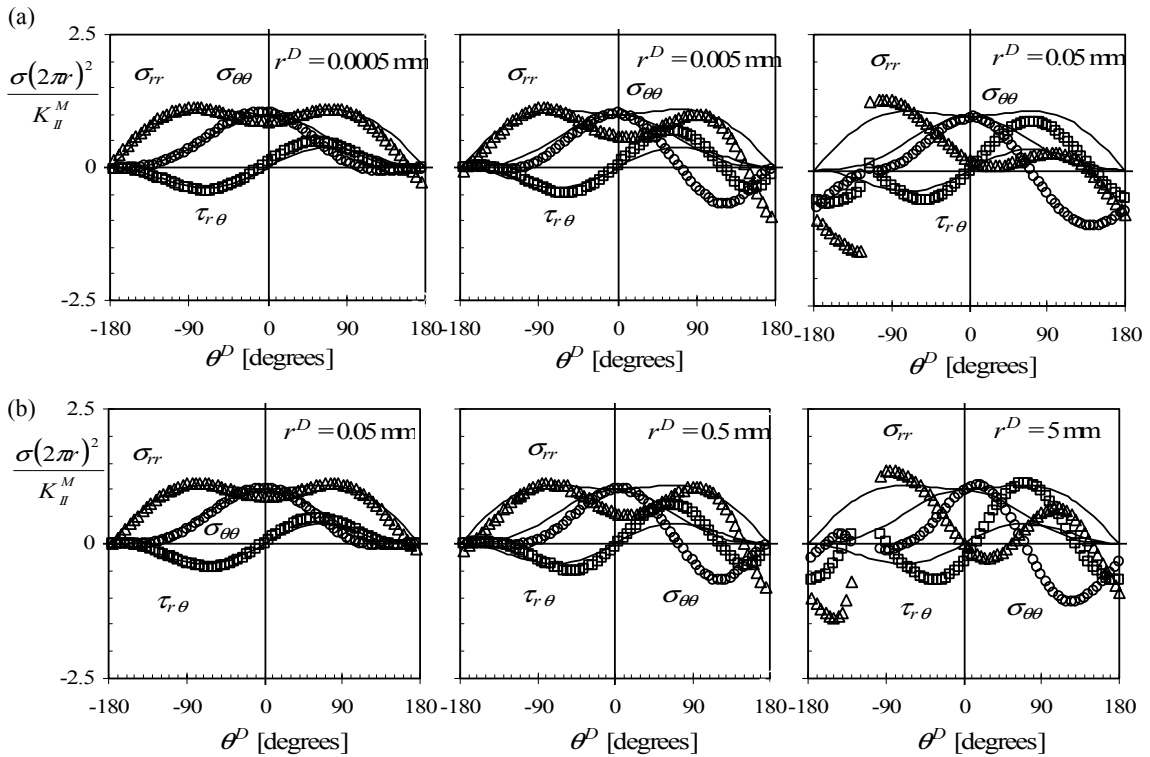


Fig. 6: Tensiones normalizadas para diferentes distancias, r , en función de la orientación angular, θ^D alrededor del frente de la grieta hija para una longitud $a^D = 0.01$ mm y b) $a^D = 1$ mm.

distancia r alrededor de la singularidad, para dos longitudes diferentes de la grieta hija. Como referencia, se adjuntan también los resultados analíticos correspondientes a los campos de tensión cercanos al frente de grieta para los casos de carga en modo-II y en modo-I (en línea continua).

La Fig. 5 muestra los resultados numéricos para la grieta madre original *antes* de la aparición de la grieta hija ($a^D = 0$, con ángulo de referencia ϑ^M). En círculos muy cercanos al frente de grieta ($r = 0.0005$ o 0.05 mm) los resultados numéricos coinciden prácticamente con los analíticos para el caso del campo de tensión típico del modo-II [6]. Para distancias mayores ($r = 5$ mm) las discrepancias aumentan debido a la influencia de los efectos del campo lejano.

Las Figs. 6a y 6b muestran las distribuciones de tensión normalizadas alrededor del frente de la grieta para dos longitudes diferentes de ésta ($a^D = 0,01$ y 1 mm), utilizando las distancias radiales r para las mismas relaciones $r^D/a^D = 0,05/0,5$ y 1 . Para ambas longitudes de grieta, los campos de tensión se aproximan mucho al campo de tensión típico del modo-I para valores muy pequeños de r^D (comparados con la longitud de la grieta). Para distancias relativamente alejadas del frente de grieta resulta un campo de tensión en modo-II, es decir, el campo de tensiones de la grieta madre. Las conclusiones son prácticamente independientes de la longitud de grieta según se comprueba en [9].

Se concluye de los resultados que la presencia de la fisura hija es el factor más influyente en los campos de tensión en el frente de grieta y en la entalla, pero no su longitud absoluta, que simplemente determina a qué distancia radial aparece el modo-II. Para longitudes pequeñas de la grieta hija considerada, la región de validez de los campos de tensión en el frente de grieta calculados es, por supuesto, muy pequeña y en todo caso más pequeña que la zona de proceso que resultaría en la situación real. Los resultados son, sin embargo, de interés fundamental para la investigación del problema de inestabilidad que se está estudiando. Por razones de espacio no se incluyen aquí los estudios experimentales realizados, (ver [9]), que confirman las deducciones analíticas y los cálculos numéricos realizados.

5. DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LOS FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIÓN

A partir de los campos de tensión calculados numéricamente y mostrados en las Figs. 5 y 6, se determinaron, por extrapolación, los f.i.t. $K_{I\vartheta}^{Db}$ y K_{Ir}^{Db} de la grieta hija, iniciada en modo-II, para los estadios *antes* y *después* de sus formación, así como los f.i.t de la entalla, que quedan recogidos en las tablas 1 y 2 y gráficamente en la Fig. 7.

Tabla 1: F.i.t., $K_{I\vartheta}^{Db}$ y K_{Ir}^{Db} de la grieta hija, *antes* de su formación, normalizados a los resultados correspondientes de la grieta madre.

GRIETA HIJA <i>antes</i> de su formación	
$K_{I\vartheta}^{Db} / K_{II}^M$	1.155
K_{Ir}^{Db} / K_{II}^M	0
K^N / K_{II}^M	-

Tabla 2: F.i.t., $K_{I\vartheta}^{Da}$ y K_{Ir}^{Da} de la grieta hija, *después* de su formación, normalizados a los resultados correspondientes de la grieta madre.

	GRIETA HIJA <i>después</i> de su formación				
	LONGITUD a_D [mm]				
	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$K_{I\vartheta}^{Da} / K_{II}^M$	1.1508	1.1603	1.1644	1.1689	1.2673
K_{Ir}^{Da} / K_{II}^M	0.9995	1.1316	1.1379	1.1455	1.2316
K^N / K_{II}^M	4.2115	2.2692	1.8483	1.5152	1.2717

Los resultados de K_{Ir}^D evidencian un salto en la transición desde justo *antes* y *después* de la formación de la grieta hija. Los f.i.t. K_I^{Da} calculados para diferentes longitudes de la grieta hija, crecen lentamente tan pronto como se crea la grieta hija, mientras su longitud se mantiene pequeña. Para grietas mayores se obtienen f.i.t. también mayores, como consecuencia de la mayor longitud efectiva de grieta. Por el contrario, K^N experimenta una rápida caída tan pronto como la grieta hija aparece, seguido de un suave descenso para longitudes crecientes de aquélla.

6. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Las consideraciones analíticas sobre la distribución de tensiones de una grieta madre cargada en modo-II, en la dirección previsible de la grieta hija $\theta_{cr} = - 70,5^\circ$, Los cálculos numéricos realizados confirman esta deducción, permitiendo determinar los campos de tensión en los estados *antes* y *después* de la formación de la grieta hija con una alta resolución. Con estos resultados, los f.i.t. $K_{I\vartheta}^{Db}$ y K_{Ir}^{Db} se determinan siguiendo los procedimientos de extrapolación dados por las ecuaciones (12) mientras que, a su vez, los f.i.t. $K_{I\vartheta}^{Da}$ y K_{Ir}^{Da} se calculan de acuerdo con los métodos de extrapolación dados por las ecuaciones (8),

aplicadas a los campos de tensión del frente de las grietas hija de longitud variable, es decir:

$$\begin{aligned} K_{I_r}^{Da} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{rD}^D \sqrt{2\pi r} \Big|_{\vartheta^D=0^\circ} \\ K_{I_\vartheta}^{Da} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\vartheta^D}^D \sqrt{2\pi r} \Big|_{\vartheta^D=0^\circ} \end{aligned} \quad (13)$$

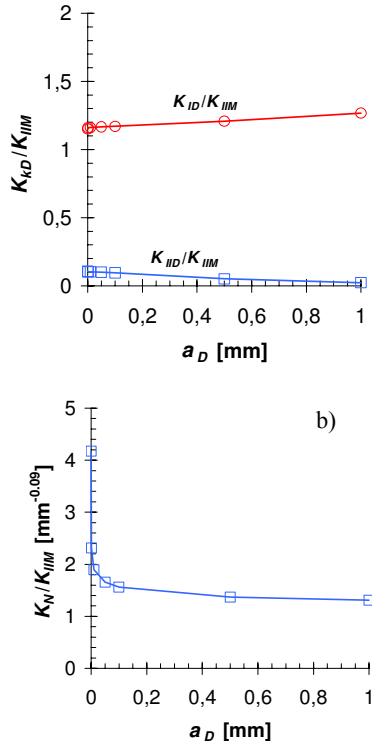


Fig. 7: Factores de intensidad de tensión a) para la grieta hija y b) para la entalla en función de la longitud de la grieta hija, a^D .

Los resultados obtenidos muestran que una deducción desde el estado de tensión *antes* hasta el estado de tensión *después* de la formación de la grieta hija, no es posible debido a la discontinuidad: Mientras que $K_{I_\vartheta}^{Da} = K_{I_\vartheta}^{Db}$ el f.i.t. $K_{I_r}^{Db} = 0$ aunque $K_{I_r}^{Da} > 0$ siendo $K_{I_r}^{Da} = K_{I_\vartheta}^{Da} = K_{I_\vartheta}^{Db}$. Debido a las diferencias existentes entre los f.i.t., es decir, para los estados *antes* y *después* de la formación de la grieta hija $K_{I_\vartheta}^{Db}$, $K_{I_r}^{Db}$ y $K_{I_\vartheta}^{Da}$, $K_{I_r}^{Da}$, la transición del estado *antes* hasta el estado *después*, es discontinua. Hay que destacar que incluso si las consideraciones analíticas y los cálculos con los elementos de contorno permitieran calcular los f.i.t. correctos para los estados *antes* y *después*, estos resultados no serían suficientes para describir adecuadamente el proceso de inestabilidad de una grieta cargada en modo mixto. El f.i.t. efectivo, que realmente describe el proceso de transición entre los dos estados, no es conocido todavía y debe seguir siendo investigado. Consecuentemente los modelos de

rotura para la predicción de la inestabilidad bajo condiciones de carga en modo-II, como las propuestas por Sih-Erdogan [1] y Richard [3], basadas en el estado tensional *anterior* al acodamiento de la grieta, no son correctas y, en consecuencia, las predicciones que relacionan el f.i.t. crítico calculado K_{IIc} con la tenacidad a fractura en modo-I K_{Ic} conducen a resultados falsos. Por otro lado, modelos de rotura, como los propuestos por Nuismer [4] y Hussain et al. [5], basados en el estado tensional *posterior* al acodamiento de la grieta, con la consiguiente extrapolación de los resultados hasta una longitud nula ($a^D \rightarrow 0$), tampoco son correctas, debido a que desprecia la discontinuidad existente en los campos de tensión y, consecuentemente, conduce a una relación entre K_{IIc} y la tenacidad a fractura K_{Ic} igualmente errónea.

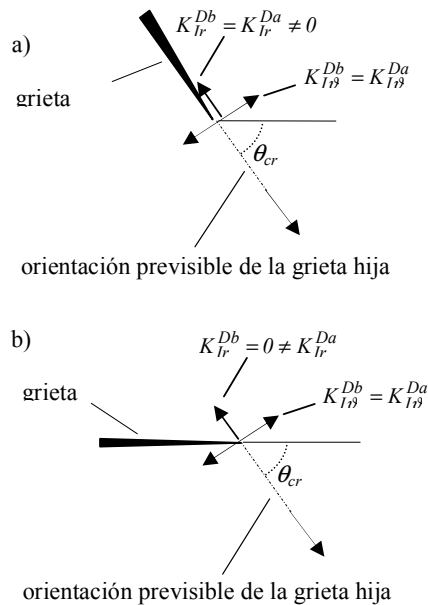


Fig. 8: Representación esquemática de las distribuciones singulares de tensión $K_{I_\vartheta}^{Da}$ y $K_{I_r}^{Da}$ a) para el modo-I típico y b) para el pseudo-modo-I.

Un criterio adecuado de rotura, capaz de describir correctamente el proceso de inestabilidad y sobre el que descansa el procedimiento para determinar la tenacidad a fractura K_{IIc} de una grieta cargada en modo-II, tiene que estar ciertamente basado en las diferentes situaciones que definen los f.i.t. para los estados *antes* y *después* de la formación de la grieta hija, pero, en particular, debe estar fundamentado en el f.i.t. efectivo que realmente controla el proceso de inestabilidad. Este f.i.t. efectivo y el correspondiente criterio de rotura no han sido aún aclarados. Más aún, no se sabe aún si va a ser posible relacionar la tenacidad a fractura en modo-II K_{IIc} con la de modo-I K_{Ic} mediante una única relación general para todo tipo de materiales, dado que los resultados experimentales

indican que la relación K_{IIc}/K_{Ic} dan valores que varían entre 0.9 y 3 para materiales como PMMA, Araldita B, vidrio, aluminio, y diferentes aceros, por lo que resulta obvio que otros efectos específicos, tales como la microestructura del material, curvatura del frente de grieta, etc. deben jugar un papel decisivo en el control del proceso de inestabilidad y en la formación de la grieta hija. La influencia de tales efectos adicionales sólo puede ser determinada en base a ensayos. Se especula así que no existe una relación fija entre K_{IIc} y K_{Ic} , de validez universal para todos los materiales.

El mismo procedimiento descrito aquí para la consideración de grietas cargadas en modo-II puede ser generalizado para los casos de carga en modo-mixto, dado que resultan situaciones de campos de tensión similares. La única diferencia consiste en que para modo mixto las orientaciones de la grieta hija resultan diferentes.

7. CONCLUSIONES

Tras analizar los estados tensionales en el frente de grieta en el proceso de inestabilidad para el modo-II, mediante consideraciones analíticas y cálculos con elementos de contorno, se concluye:

El proceso de inestabilidad implica la transición de una singularidad típica de modo-II de la grieta madre (*antes* de la formación de la grieta hija) en una singularidad de modo-I alrededor del frente de la grieta hija (*después* de la formación).

Contrariamente a lo que ocurre con el campo de tensión en el modo-I típico, que presenta singularidades tanto en la tensión radial como en la circunferencial, la distribución de tensiones que resulta de una grieta madre cargada en modo-II en la dirección previsible de la grieta hija no muestra singularidad en la tensión radial, de ahí que se la defina como distribución tensional de *pseudo-modo-I*.

Los cálculos con elementos de contorno confirman las consideraciones analíticas.

Las estimaciones de la tenacidad a fractura en modo-II, K_{IIc} , en relación con la tenacidad a fractura en modo-I K_{Ic} basadas simplemente en la situación tensional *antes* de la formación de la grieta hija así como aquéllas basadas solamente en los estados tensionales *después* de la formación de la grieta hija conducen a resultados erróneos que difieren de los obtenidos experimentalmente.

Una determinación de los factores de intensidad de tensiones para los estados *antes* y *después* de la formación de la grieta hija son por tanto de importancia capital para el análisis de estabilidad. Pero por otro lado, ello constituye sólo un prerrequisito que necesita ser complementado con el apropiado criterio de rotura,

basado en el factor de intensidad de tensiones efectivo que controla la inestabilidad.

Los resultados demuestran la urgente necesidad de desarrollar y normalizar el ensayo en modo-II para la determinación válida de la tenacidad a fractura de en modo-II, K_{IIc} , de los materiales.

REFERENCIAS

- [1] Erdogan, F. y Sih, G.C., "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *J. of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, ASME, December 519-527, (1963).
- [2] Hiese, W., "Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten", Tesis doctoral, Ruhr-Universität Bochum, (2000).
- [3] Richard, H.A., "Festigkeitsnachweis unter Mixed-Mode-Beanspruchung", *Materialprüfung*, 45 Jahrgang, 513-517, (2003).
- [4] Nuismer, R.J., "An energy release rate criterion for mixed mode fracture", *Int. Journal of Fracture* 11, 245-250, (1975).
- [5] Hussain, M.A., Pu, S.L. y Underwood, J., "Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and Mode-II", *ASTM STP 560*, 2-28, (1974).
- [6] Kanninen, M.F. y Popelar, C.H., "Advanced Fracture Mechanics", Oxford University Press, (1985).
- [7] Blázquez, A., Mantič, V., París F. y Cañas, J., "On the removal of rigid body motions in the solution of elastostatic problems by direct BEM", *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, 39, 23, 4021-4038, (1996).
- [8] Williams, M.L., "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Dec., 526-528, (1952).
- [9] Kalthoff, J.F., Fernández Canteli, A., Blázquez, A. y Fernández Zúñiga, D., "Singular stress fields and instability conditions for mode-II and mixed-mode loaded cracks" (Enviado para evaluación a *Strength, Fracture and Complexity*)