

## ESTUDIO PRELIMINAR DEL MODELO DE GURSON CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DE LA TRIAXIALIDAD

G. Vadillo<sup>1</sup>, J. Fernández-Sáez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.  
Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad, 30. 28911 Leganés. Madrid  
E-mail: gvadillo@ing.uc3m.es  
Tfno: 916 24 95 00 Ext. 8809. Fax: 916 249 973

### RESUMEN

La fractura dúctil de materiales metálicos es el resultado de tres procesos que interactúan mutuamente: la nucleación, el crecimiento y la coalescencia de los microvacíos que se generan en el material. Un procedimiento para analizar estos procesos, consiste en considerar el material como un medio continuo, en el que la evolución de los microvacíos se representa mediante una variable adicional que es la porosidad (fracción volumétrica de microvacíos). La ley constitutiva más utilizada para analizar la rotura de materiales dúctiles es la de Gurson-Tvergaard-Needleman (modelo GTN). Este modelo depende de dos parámetros  $q_1$  y  $q_2$  que, como diferentes autores han puesto de manifiesto, no son constantes universales, sino que dependen de diferentes factores, unos dependientes del material y otros relativos al campo tensional. En este trabajo se ha realizado un estudio preliminar de esta dependencia implementando las ecuaciones constitutivas de un material de Gurson-Tvergaard-Needleman con parámetros dependientes de la triaxialidad del campo tensional en un código comercial de elementos finitos. Para mostrar la influencia de la utilización de esta aproximación con relación a las convencionales, (parámetros constantes), se ha realizado la simulación numérica de un ensayo de tracción sobre una probeta entallada lateralmente.

### ABSTRACT

The ductile fracture is the result of three different processes: nucleation, growth and coalescence of microvoids. The most used constitutive law for ductile fracture is the Gurson-Tvergaard-Needleman model (GTN), which use an internal variable (porosity) to represent the evolution of microvoids. This model depends on  $q_1$  and  $q_2$  parameters, that, like different authors have pointed out, are not constant but depend on material's properties as well as on the triaxiality of the stress field. In this work, a preliminary study has been done implementing the GTN constitutive equations with stress dependent parameters in a commercial FEM code through an user subroutine. To analyze the differences between this approach and the corresponding to constant parameters, the results of numerical simulations of a tensile test on a round notched bar have been presented.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos analíticos y numéricos

**PALABRAS CLAVE:** Fractura dúctil, triaxialidad, modelo de Gurson

### 1. INTRODUCCIÓN

La fractura dúctil en un material metálico se produce como resultado de la interacción de varios procesos que se producen simultáneamente en el material [1]: nucleación de microvacíos, como consecuencia de la rotura o descohesión de inclusiones, crecimiento de estos microvacíos debido al estado tenso-deformacional y su coalescencia, dando lugar a la formación de superficies libres y fisuras macroscópicas. Este último proceso está motivado por la localización de la deformación en los espacios entre microvacíos. Es evidente la diferencia de escalas espaciales involucradas en el problema (desde las micras que representan tamaños característicos de las inclusiones, por ejemplo, hasta los metros, dimensión que puede representar el tamaño del componente estructural donde están contenidas). Por este motivo se hace necesario el desarrollo de modelos macroscópicos, desarrollados en el

marco de la Mecánica de los medios continuos, que sean de utilidad en problemas de ingeniería. En esa dirección, se han realizado numerosos modelos para cuantificar el crecimiento de microvacíos entre los que destacan el de McClintock [2] y el de Rice y Tracey [3].

Sin embargo, el modelo de daño dúctil utilizado es el de Gurson [4] en el que la presencia de microvacíos se representa mediante una variable adicional que es la porosidad (fracción volumétrica de microvacíos). Este modelo fue desarrollado originalmente a partir de una solución aproximada de una celda de un material considerado rígido plástico con un microvacío esférico contenido en ella. Posteriormente, Tvergaard [5, 6] y Tvergaard y Needleman [7] añadieron al modelo dos nuevos parámetros,  $q_1$  y  $q_2$ , con el objetivo de ajustar sus resultados en materiales con endurecimiento por deformación. Faleskog y otros [8] pusieron de manifiesto que estos parámetros pueden

depender de las propiedades del material tales como su resistencia a tracción o su capacidad de endurecimiento por deformación. Además, Kim y otros [9] han mostrado la dependencia de estos parámetros del propio estado tensional a través de la triaxialidad del mismo,  $T$ , definida ésta como el cociente entre la tensión hidrostática y la tensión equivalente de Von Mises ( $T = \sigma_h/\sigma_e$ ). Por otra parte, una variable fundamental en este modelo es la porosidad crítica, que es un parámetro necesario para definir el inicio del proceso de coalescencia. Diversos investigadores han puesto de manifiesto la dependencia de este parámetro con la triaxialidad del campo tensional.

Así pues, aunque recientemente se ha reconocido y cuantificado la dependencia de los parámetros del modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman (modelo GTN) con la triaxialidad del campo tensional [9], no se han implementado en las correspondientes ecuaciones constitutivas.

En este trabajo se ha realizado un análisis preliminar de esta dependencia implementando en un código comercial de elementos finitos las ecuaciones constitutivas de un material de Gurson-Tvergaard-Needleman con parámetros dependientes de la triaxialidad del campo tensional. La implementación se ha realizado mediante una subrutina de usuario. Para mostrar la influencia de la utilización de esta aproximación con relación a las convencionales, (parámetros constantes) se ha realizado la simulación numérica de un ensayo de tracción sobre una probeta entallada lateralmente.

## 2. DEPENDENCIA DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO GTN CON EL ESTADO TENSIONAL

La función de plastificación del modelo GTN viene dada por:

$$\Phi = \frac{\sigma_e^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 \quad (1)$$

$\sigma_e$ , y  $\sigma_h$  son, respectivamente, la tensión equivalente de Von Mises y la tensión hidrostática cuyas expresiones son:

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_h = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}'$  es el tensor desviador de tensiones dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_h \mathbf{1} \quad (3)$$

La variable  $f^*$  indica la fracción volumétrica de microvacíos y se puede escribir como:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \frac{(1/q_1 - f_c) \cdot (f - f_c)}{(f_f - f_c)} & \text{si } f_c < f < f_f \\ 1/q_1 & \text{si } f \geq f_f \end{cases} \quad (4)$$

Los parámetros  $q_1$ ,  $q_2$  y  $f_c$  son parámetros que, además de depender de propiedades del material, varían también con la porosidad inicial y con el estado tensional a través de parámetros de triaxialidad del mismo.

Este hecho ha sido puesto de manifiesto por Kim y otros [9] que han comparado el comportamiento de: (1) una celda unitaria axisimétrica compuesta por una matriz elastoplástica de Von Mises con un único hueco esférico en su centro y (2), una celda sin hueco que obedece al modelo GTN y con una porosidad inicial,  $f_0$ , igual a la del modelo de celda con hueco. Aplicando a las celdas unas condiciones de contorno tales que, en cada análisis, se mantiene constante la triaxialidad, obtuvieron el valor de los parámetros  $q_1$  y  $q_2$  que hace que el comportamiento de ambas celdas sean idénticos, lo cual permite establecer la influencia de las variables analizadas (triaxialidad y porosidad inicial) en dichos parámetros.

En la figuras 1 y 2 se muestran los valores obtenidos por Kim y otros [9] para dos valores diferentes de la porosidad inicial,  $f_0$ .

Para los subsiguientes análisis, los valores discretos presentados en [9] han sido ajustados por el método de los mínimos cuadrados mediante polinomios de tercer grado de la forma:

$$q_i(T) = A_i T^3 + B_i T^2 + C_i T + D_i \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

cuyos coeficientes se muestran en la tabla 1 (parámetro  $q_1$ ) y en la tabla 2 (parámetro  $q_2$ )

$f_0$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$
0.001	0.4	-2.9571	6.9786	-3.47
0.025	0.0333	-0.6914	2.1574	-0.398

Tabla 1: Valores de los coeficientes del polinomio de ajuste para  $q_1(T)$ .

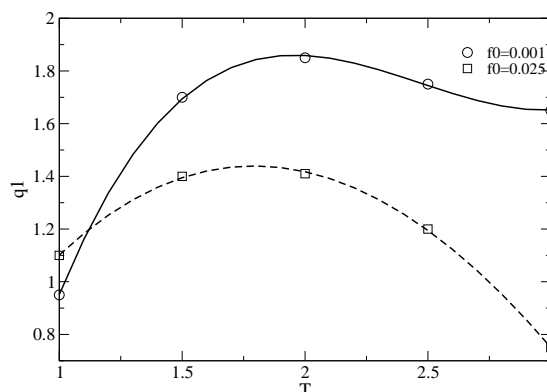


Figura 1: Variación de  $q_1$  con la triaxialidad.

$f_0$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$D_2$
0.001	-0.0667	0.5	-1.2333	1.9
0.025	0.0333	-0.0143	-0.3012	1.33

Tabla 2: Valores de los coeficientes del polinomio de ajuste para  $q_2(T)$ .

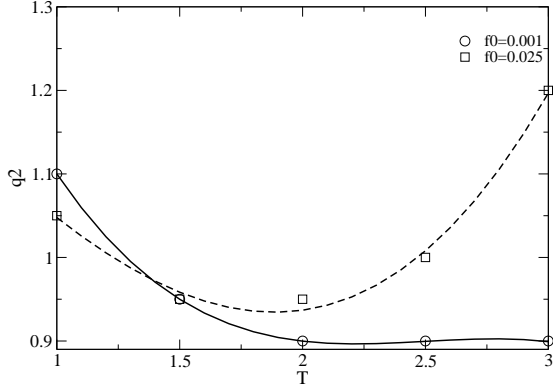


Figura 2: Variación de  $q_2$  con la triaxialidad

También se han ajustado con un polinomio de tercer grado los valores de porosidad crítica  $f_c$  frente a la triaxialidad, presentados en la referencia [9]. Los coeficientes del polinomio de ajuste se muestran en la tabla 3 y su correspondiente representación gráfica en la figura 3.

$f_0$	$A$	$B$	$C$	$D$
0.001	0.002	-0.0129	0.0247	0.0166
0.025	-0.0053	0.0246	-0.0471	0.1222

Tabla 3: Valores de los coeficientes del polinomio de ajuste para  $f_c(T)$ .

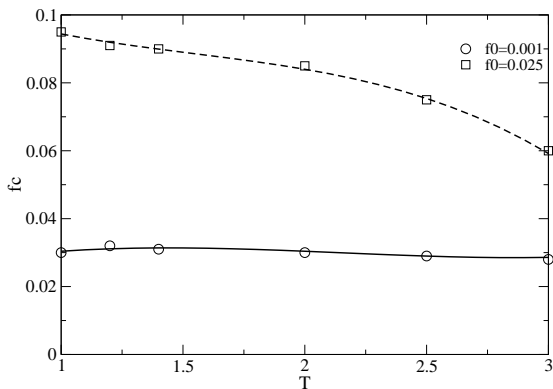


Figura 3: Variación de la porosidad crítica con la triaxialidad

### 3. MODELO GTN CON PARÁMETROS DEPENDIENTES DEL CAMPO TENSIONAL

A continuación se indican las ecuaciones constitutivas del modelo GTN donde los parámetros  $q_1$ ,  $q_2$  y  $f_c$  dependen de la triaxialidad del campo tensional.

Se considera un material hipoplástico, y se hace la hipótesis de que el tensor gradiente de velocidades  $\mathbf{d}$ , se puede descomponer como suma de una parte elástica  $\mathbf{d}^e$  y una parte plástica,  $\mathbf{d}^p$ , es decir:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (6)$$

La derivada de Jaumann del tensor de tensiones de Cauchy,  $\hat{\sigma}$ , se relaciona con la parte elástica del gradiente de velocidades mediante la relación dada por:

$$\hat{\sigma} = \mathcal{L} : \mathbf{d}^e = \mathcal{L} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (7)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el tensor isótropo lineal, de expresión:

$$\mathcal{L} = 2G\mathbf{I}^{dev} + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (8)$$

siendo  $G$  y  $K$  las constantes elásticas del material:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (9)$$

y  $E$  y  $\nu$  el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente.

La función de plastificación viene dada por la expresión 1 donde los parámetros  $q_1$  y  $q_2$  dependen de la triaxialidad, y del valor de daño inicial  $f_0$ :

$$q_1 = q_1(T, f_0) \quad q_2 = q_2(T, f_0) \quad (10)$$

y su dependencia para  $f_0$  fijo, viene dada por la expresión 5.

La fracción volumétrica de microvacíos,  $f^*$ , está descrita en la ecuación 4.

Se considera una evolución del límite elástico  $\bar{\sigma}$  con la deformación plástica equivalente como sigue:

$$\bar{\sigma} = A + B\bar{\varepsilon}_p^n \quad (11)$$

donde  $\bar{\varepsilon}_p$  se calcula haciendo la hipótesis de equivalencia del de trabajo plástico a nivel macroscópico y microscópico, es decir:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p}{(1 - f)\bar{\sigma}} \quad (12)$$

Aplicando la regla de normalidad,  $\mathbf{d}^p$  se puede obtener:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (13)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es un escalar denominado multiplicador plástico.

Las derivada  $\partial\Phi/\partial\sigma$  se calcula como:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_e} \frac{\partial\sigma_e}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_h} \frac{\partial\sigma_h}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\varepsilon}_p} \frac{\partial\bar{\varepsilon}_p}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial\sigma} \quad (14)$$

donde la dependencia de los parámetros  $q_1$  y  $q_2$  con el estado tensional se tiene en cuenta en los dos últimos sumandos de la ecuación anterior.

Por simplicidad, en este trabajo se ha considerado la evolución de la porosidad únicamente debida al crecimiento de microvacíos y no a la nucleación. Con esta hipótesis, la variación temporal de  $f$  viene dada por:

$$\dot{f} = (1 - f)\mathbf{d}^p : \mathbf{1} \quad (15)$$

El multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$  se calcula imponiendo las condiciones de Kuhn-Tucker, que son:

- En el proceso de carga elástica o descarga, el estado de tensiones está siempre por debajo de la superficie de fluencia  $\Rightarrow \Phi < 0$  y el multiplicador plástico  $\dot{\lambda} = 0$
- En el proceso de carga plástica, el estado de tensiones está siempre en la superficie de fluencia  $\Rightarrow \Phi = 0$  o  $\dot{\Phi} = 0$  y el multiplicador plástico  $\dot{\lambda} > 0$

Para integrar las ecuaciones del modelo, es necesario recurrir a un procedimiento numérico, ya que no se dispone de soluciones analíticas. Para ello se ha utilizado el esquema utilizado por Aravas [10], que está basado en el Método de Euler con diferencias hacia atrás. Este método se basa en el algoritmo de predicción elástica y corrección plástica con retorno a la superficie de fluencia (retorno radial). Conocidas todas las variables en un instante de tiempo  $t$ , y dado un incremento de deformación  $\Delta\varepsilon$ , el algoritmo de integración calcula las variables de estado y el tensor de tensiones en el instante de tiempo  $t + \Delta t$ . La ventaja fundamental de este método con respecto a otros es que es incondicionalmente estable. Además, para mantener el orden de convergencia del método de integración, se ha utilizado un operador tangente consistente con el algoritmo de integración utilizado.

#### 4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Se ha realizado una modelización numérica por el método de los elementos finitos de un ensayo de tracción sobre una probeta cilíndrica entallada lateralmente (ver figura 4). Se ha utilizado el programa comercial ABAQUS con una subrutina de usuario UMAT [11] en la que se ha implementado el modelo GTN con los parámetros dependientes del estado tensional, como se ha indicado

en el apartado anterior. Dada la doble simetría de la probeta: axial respecto a su eje de revolución y plana respecto al plano de las sección más estrecha, únicamente es necesario considerar un cuarto de la probeta.

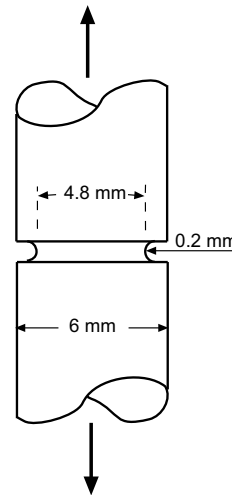


Figura 4: Probeta con entalla ensayada a tracción.

En la malla se han empleado 750 elementos isoparamétricos de 8 nodos con integración reducida en 4 puntos de Gauss y 2385 nodos. Como condición de solicitación en el ensayo simulado se ha impuesto desplazamiento uniforme de la base de la probeta respecto al plano de simetría, paralelo al eje de revolución.

Un detalle de la malla de la zona más próxima al plano de simetría se muestra en la figura 5

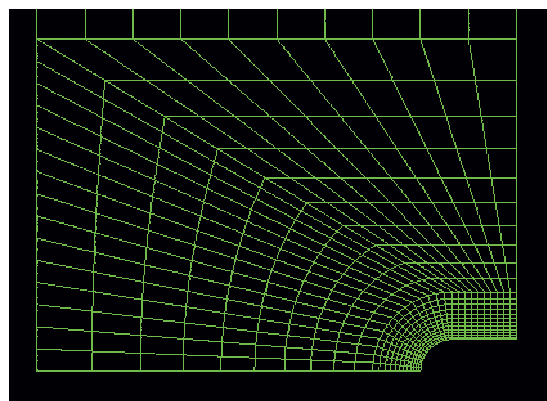


Figura 5: detalle de la malla utilizada.

Se han analizado 5 casos diferentes correspondientes a diferentes valores de los parámetros  $q_1$ ,  $q_2$  y  $f_c$  tal como se indica en la tabla 4.

Caso	$q_1$	$q_2$	$f_c$
1	0,95	0,9	0,03
2	1,85	0,9	0,03
3	0,95	1,1	0,03
4	1,85	1,1	0,03
5	variable	variable	variable

Tabla 4: Valores de las constantes del modelo para cada uno de los casos analizados. ( $f_0 = 0,001$ )

Los valores de  $q_1$  y  $q_2$  de los 4 primeros casos corresponden a las combinaciones de valores máximos y mínimos obtenidos por Kim y otros [9] (ver figuras 1, 2, 3) y el caso 5 corresponde al caso en que los parámetros varían con la triaxialidad.

En todos los casos se ha considerado que el material de la matriz obedece a una ley de endurecimiento por de formación dada por:

$$\bar{\sigma} = 410 + 400\varepsilon_p^{0,1} \quad (16)$$

El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del acero analizado fueron, respectivamente, 200 GPa y 0,3.

Como resultado del análisis se ha seleccionado la evolución de la carga aplicada a la probeta en función de la disminución de diámetro, que se muestra en la figura 6 para los cinco casos analizados, donde, además, se ha incluido el caso de material de Von Mises.

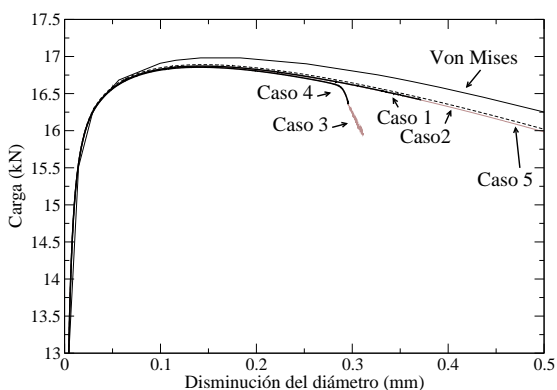


Figura 6: Carga-Disminución del diámetro

Las curvas correspondientes a los diferentes casos del modelo GTN siguen trayectorias coincidentes (e inferiores a la correspondiente al material de Von Mises) hasta que se alcanzan las condiciones de porosidad crítica, condición que se manifiesta con un cambio brusco de pendiente en los casos 3 y 4, únicos casos en los que se alcanza dicha porosidad crítica.

En las figuras 7 a 9 se representa la variación de porosidad frente a la disminución del diámetro en tres elementos situados en el plano de simetría de la probeta: uno situado en el eje de simetría (figura 7), otro situado inicialmente

a una distancia de 2,14 mm del eje de simetría (figura 8) y el tercero situado en el fondo de la entalla (figura 9)

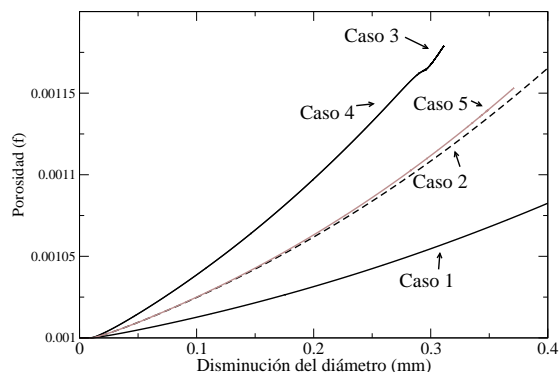


Figura 7: Variación de la porosidad con la disminución de diámetro. Elemento del plano simetría situado en el eje de simetría

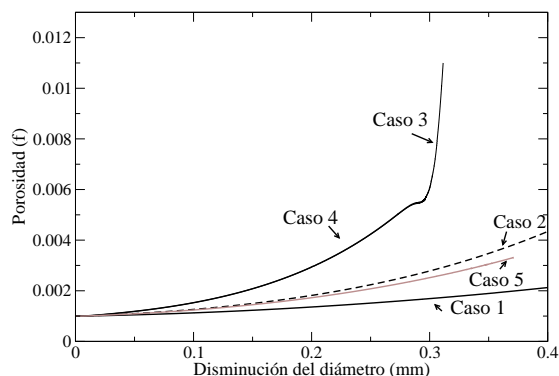


Figura 8: Variación de la porosidad con la disminución de diámetro. Elemento del plano simetría situado a 2,14 mm del eje de simetría

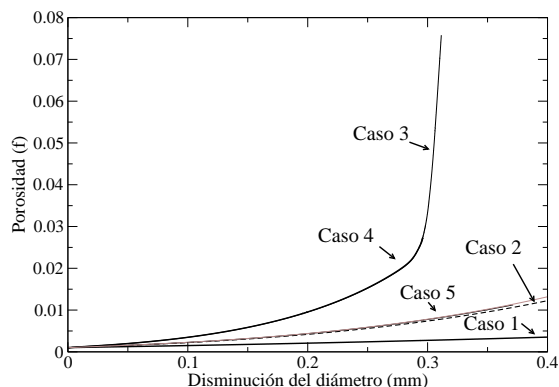


Figura 9: Variación de la porosidad con la disminución de diámetro. Elemento del plano simetría situado en el fondo de la entalla

Estas curvas ponen de manifiesto la influencia que tiene la elección de parámetros en la evolución de la porosidad y en el instante en el que se alcanzan las condiciones

críticas. En este sentido, el parámetro más influyente es  $q_2$ , que, para el valor de porosidad analizada, es a su vez el que menos varía con la triaxialidad, en tanto que el parámetro  $q_1$ , que varía más acusadamente con la triaxialidad, es menos influyente en el comportamiento observado.

En todos los elementos analizados, la porosidad obtenida en el caso en el que los parámetros son variables (caso 5), se sitúa en valores intermedios a los casos en los que  $q_2$  toma valores extremos. A la vista de la evolución de la porosidad en esos elementos se puede concluir que la rotura de este tipo de probetas comienza en el fondo de la entalla y se propaga hacia el eje de simetría.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un análisis preliminar de la dependencia de los parámetros del modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman con la triaxialidad implementando dicha dependencia en un código comercial de elementos finitos. La implementación se ha realizado mediante una subrutina de usuario. Para mostrar la influencia de la utilización de esta aproximación con relación a las convencionales, (parámetros constantes) se ha realizado la simulación numérica de un ensayo de tracción sobre una probeta entallada lateralmente, poniéndose de manifiesto la influencia que tiene la elección de parámetros en la evolución de la porosidad y en el instante en el que se alcanzan las condiciones críticas que dan lugar a la inestabilidad y a la rotura de la probeta. Este trabajo se debe continuar analizando otros niveles de porosidad inicial, otras geometrías y la influencia de otras variables del campo tensional como es el parámetro de Lode.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Ministerio de Ciencia y Tecnología por la financiación del Proyecto DPI2005-06769

## REFERENCIAS

- [1] R.H. Van Stone, T.B. Cox, J.R. Low y J.A. Pisiotta, *Microstructural aspects of fracture by dimple rupture*, International Metals Review, 211, 30, 157–179, 1985.
- [2] F.A. McClintock, *A criterion for ductile fracture by growth of holes*, Journal of Applied Mechanics, 35, 363–371, 1968.
- [3] J.R. Rice y D.M. Tracey, *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 201–217, 1969.
- [4] A.L. Gurson, *Continuum of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media*, Journal of Engineering Materials and Technology, 99, 2–55, 1977.
- [5] V. Tvergaard, *Influence of voids on shear bands instabilities*, International Journal of Fracture, 17, 389–407, 1981.
- [6] V. Tvergaard, *On localization of ductile materials containing spherical voids*, International Journal of Fracture, 18, 237–252, 1982.
- [7] V. Tvergaard y A. Needleman, *Analysis of the Cup-Cone fracture in a round tensile bar*, Acta Metallurgica, 32, 157–169, 1984.
- [8] J. Faleskog, X. Gao y C.F. Shih, *Cell model for nonlinear fracture analysis- I. Micromechanics calibration*, International Journal of Fracture, 89, 355–373, 1998.
- [9] K. Kim, X. Gao y T.S. Srivatsan, *Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity*, Engineering Fracture Mechanics, 71, 379–400, 2004.
- [10] N. Aravas, *On the numerical integration of a class pressure-dependent plasticity models*, International Journal for Numerical Methods, 24, 1395–1416, 1987.
- [11] ABAQUS/Standard User Manual, version 6.4. ABAQUS Inc., Richmond, USA, 2003