

## CRECIMIENTO DE GRIETA POR FATIGA ALEATORIA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

J. Grasa<sup>1</sup>, J. A. Bea<sup>1</sup>, J. F. Rodríguez<sup>1</sup> M. Doblaré<sup>1</sup>

<sup>1</sup>GEMM, Grupo de Mecánica Estructural y Modelado de Materiales. Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A).  
 Universidad de Zaragoza. Campus Río Ebro. Ed. Agustín de Betancourt,  
 c/ María de Luna s/n, 50005-Zaragoza, España.  
 E-mail: jgrasa@unizar.es  
 Tfno: 976 76 10 00 Ext. 5107. Fax: 978 76 25 78

### RESUMEN

En el campo de la mecánica de la fractura el método de los elementos finitos extendido simplifica enormemente la simulación numérica de problemas de crecimiento de grieta. A través de esta técnica, a diferencia del método convencional, no es necesaria la adaptación de la malla a la geometría variable de la discontinuidad. En este tipo de simulaciones, además, las variables implicadas han sido consideradas tradicionalmente como deterministas es decir, definidas únicamente por un valor. La incertidumbre asociada a este tipo de magnitudes (acciones exteriores, geometría, propiedades de los materiales,...) se encuentra siempre presente llegando a provocar respuestas lejanas al valor promedio. Es por ello que, la consideración de estas variables como aleatorias aproxima más la simulación a la realidad proporcionando resultados en términos de probabilidad de ocurrencia. En el presente trabajo se muestra la aplicación de una técnica de simulación numérica que, de manera simple, recoge la aleatoriedad del problema y reduce el coste computacional al eludir el continuo remallado de la geometría. Esta metodología denominada elementos finitos extendido probabilistas es aplicada, a modo de ejemplo, al crecimiento de grietas por fatiga en una geometría normalizada (probeta compacta ASTM). La implementación del método se ha elaborado sobre un software comercial y se ha contrastado por medio de simulaciones de Monte Carlo.

### ABSTRACT

In fracture mechanics the extended finite element method allows numerical simulation of crack growth problems. By mean of this methodology, and unlike conventional finite element method, is not necessary an adaptable mesh to the variable discontinuity geometry. In these kind of simulations, moreover, variables implied have been traditionally considered as deterministic (defined by a unique value). Uncertainties associated with these magnitudes (loads, geometry, material properties,...) are considerable and may cause unexpected responses. So that, considering these variables as random is an approximation more realistic, providing results in terms of probabilities. The present work shows the application of a numerical simulation technique that consider the problem randomness and reduce the cpu time avoiding geometry remeshing. This methodology named probabilistic extended finite elements is applied to determine the crack growth life in a normalized geometry (ASTM). Implementation has been performed in commercial software and application examples compared with Monte Carlo simulations are presented.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos Analíticos y Numéricos.

**PALABRAS CLAVE:** Fatiga aleatoria, elementos finitos extendidos

### 1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos extendidos [1][2][3] aplicado a problemas de mecánica de la fractura permite, de una forma sencilla, simular el crecimiento de grietas en el interior de componentes. La principal ventaja de este método es el empleo de una única malla de elementos finitos evitando, de esta forma, continuos remallados adaptados a la evolución de la discontinuidad.

Por otro lado, en el cálculo de la vida a fatiga de un componente existen numerosas incertidumbres que pueden afectar a su respuesta y, en último término a su vida útil. Estas magnitudes, tradicionalmente, han sido consideradas como deterministas, es decir, definidas por un único valor. Acciones exteriores, geometría, propiedades

de los materiales, etc. son ejemplos de este tipo de variables tratando de realizar una simulación lo más próxima a la realidad deberían considerarse como aleatorias.

Es en el cálculo de la vida de un componente en la fase de crecimiento de grieta donde la aleatoriedad de las variables que intervienen en el problema adquiere un papel determinante. La respuesta del elemento puede experimentar grandes variaciones respecto al valor medio esperado. Es por ello que, el estudio de este fenómeno desde un punto de vista aleatorio, proporcionará resultados más cercanos a la realidad.

El presente trabajo muestra la aplicación de una técnica probabilista de simulación a fatiga en crecimiento de grieta. Esta metodología esta basada en la utilización con-

junta del método de los elementos finitos extendido, en una versión probabilista desarrollada por los autores, y los modelos de acumulación de daño de Bogdanoff y Kozin [5]. La formulación del método aparece recogida en el segundo y tercer epígrafe, mostrando en el apartado de resultados, la aplicación a una geometría normalizada (ASTM E647-86) y su comparación a través de simulaciones de Monte Carlo.

## 2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDOS PROBABILISTA

La aproximación del campo de desplazamientos en el método de los elementos finitos extendido [1][2][3] depende de la posición que tome el frente de grieta respecto al elemento considerado. En el caso en el que la grieta atraviese por completo al elemento se utiliza la función salto definida como (1) en el sistema de coordenadas local de la grieta (donde la coordenada  $y$  es perpendicular a las caras de la discontinuidad).

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y > 0 \\ -1 & \text{for } y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

El campo de desplazamientos en el interior del elemento atravesado por la grieta viene expresado como (2) donde  $J$  es el conjunto de nodos de los elementos atravesados por la grieta.  $u_i$  y  $b_j$  son los grados de libertad del elemento y  $N_j$  las funciones de forma de elementos finitos.

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j N_j H(x), \quad (2)$$

Cuando el frente de grieta se encuentra en el interior del elemento, el enriquecimiento se realiza con las cuatro funciones (3) para el caso bidimensional.

$$\{F_i(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (3)$$

Donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas cilíndricas locales al frente de grieta. El campo de desplazamientos para el elemento con el frente de grieta en su interior quedará como (4):

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{l \in L} \mathbf{c}_k^l F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (4)$$

$u_i$  y  $c_i$  son los grados de libertad del elemento y  $N_i$  son las funciones de forma.

El campo global de desplazamientos puede escribirse como (5)

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j N_j H(x) + \sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{l \in L} \mathbf{c}_k^l F_l(x) \right) \quad (5)$$

Haciendo uso de esta formulación y considerando las posibles variables aleatorias implicadas en el problema pueden aplicarse desarrollos en serie en torno a la media en la ecuación general de equilibrio :

$$\mathbf{K}(\alpha_i) \mathbf{u}(\alpha_i) = \mathbf{f}(\alpha_i), \quad (6)$$

donde se observa que tanto la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ , el vector de cargas  $\mathbf{f}$  y el vector de incógnitas en desplazamientos  $\mathbf{u}$  dependen de las variables aleatorias  $\alpha_i$ . Estos desarrollos comprenden la base del denominado método de la perturbación [4] para el cálculo por elementos finitos estocásticos.

El desarrollo en serie de Taylor para el vector de desplazamientos resultaría:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (7)$$

con:

$$\mathbf{u}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad \mathbf{u}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (8)$$

Expresiones equivalentes se obtendrían para  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{f}$  además de para deformaciones y tensiones. Considerando únicamente aproximación de primer orden y aplicando las propiedades del análisis lineal estadístico se llega a las expresiones de media (9) y covarianza (10) para el vector solución del problema de elementos finitos:

$$E^I[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^0, \quad (9)$$

$$\text{Cov}^I[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_i^I (\mathbf{u}_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j] \quad (10)$$

De manera análoga es posible obtener media y varianza para deformaciones y tensiones.

La combinación de la formulación extendida de elementos finitos y el método de la perturbación, hacen posible la obtención de las variables solución del problema en términos de un valor medio y una dispersión (estadísticos media y varianza).

## 3. CRECIMIENTO DE GRIETA POR FATIGA ALEATORIA

### 3.1. MODELOS B DE ACUMULACIÓN DE DAÑO

Los modelos de acumulación de daño de Bogdanoff y Kozin [5], basados en procesos de cadenas de Markov [6], establecen las siguientes hipótesis de partida para su construcción.

1. Existen "ciclos de daño (CD)" repetitivos de severidad constante.

2. Los niveles de daño son discretos  $1, 2, \dots, j, \dots, b$ , siendo éste último el estado de fallo del componente.
3. La acumulación de daño en un CD depende sólo del propio CD y del nivel de daño en el inicio del CD.
4. El nivel de daño en un CD solamente puede incrementarse a lo sumo del nivel ocupado en el inicio del CD al nivel inmediatamente superior.

El tiempo se considera discreto por la primera hipótesis, lo que unido a la hipótesis 2 hace que el modelo tenga niveles de daño finitos (y discretos) y que el tiempo sea discreto, por lo que se pueden utilizar las cadenas de Markoff.

Considerando  $D_0$  como la variable aleatoria nivel de daño del componente en el instante de tiempo  $t = 0$ , la distribución inicial de los diferentes niveles de daño puede definirse por un vector  $p_0$  como:

$$p_0 = \{\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_{b-1} \quad 0\} \quad (11)$$

donde  $P(D_0 = j) = \pi_j \geq 0$  y además se debe cumplir la condición  $\sum_{j=1}^{b-1} \pi_j = 1$ . En 11 se ha considerado que no tiene sentido que algún componente inicie su vida en el estado  $b$ , por lo que se ha tomado  $\pi_b = 0$ .

Asociada a cada CD existe la misma matriz de probabilidad de transición  $P$ , ya que por la primera hipótesis todos los ciclos tienen la misma severidad. Y puesto que sólo puede irse de un nivel de daño al inmediato superior,  $P$  debe ser de la forma (12):

$$P = \begin{pmatrix} p_i & q_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_i & q_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_i & q_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_i & q_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de permanecer en el mismo nivel de daño durante un CD, y  $q_j$  la probabilidad de que en un CD el daño avance al siguiente nivel, esto es, del estado  $j$  al  $j + 1$ . Luego,  $1 > p_i > 0, p_i + q_j = 1$ . Sea  $D_x$  la variable aleatoria "nivel de daño en el instante de tiempo  $x$ " con probabilidad:

$$P(D_x = j) = p_x(j) \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (13)$$

cumpliéndose que  $P(j) \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^b p_x(j) = 1$ . Por lo tanto  $p_x(b)$  es una función de distribución con respecto al tiempo. Esta función de distribución  $F_W(x; b)$  asociada a la variable "tiempo necesario para alcanzar el estado  $b$ ", la cual se denota como  $W_b$  es por lo tanto definida como:

$$F_W(x, b) = P(W_b \leq x) = p_x(b), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Utilizando los resultados de las cadenas de Markov [6] puede escribirse  $p_x$  de nuevo como:

$$p_x = p_{x-1}P = p_0P^x \quad x = 0, 1, 2, \dots, b \quad (15)$$

A partir de ahora se va a suponer que  $\pi_1 = 1$ , lo cual significa que el proceso de daño acumulado se inicia en el nivel 1 para el instante  $x = 0$ . La transformación geométrica de la función de distribución  $F_W(x; b)$  de la variable aleatoria  $W_{1,b}$  se obtiene como:

$$E\{W_{1,b}\} = \sum_{j=1}^{b-1} (1 + r_j) \quad Var\{W_{1,b}\} = \sum_{j=1}^{b-1} r_j(1 + r_j) \quad (16)$$

$$\mu_3\{W_{1,b}\} = \sum_{j=1}^{b-1} r_j(1 + r_j)(1 + 2r_j) \quad (17)$$

En estas expresiones aparece el término  $r_j$  que es el cociente entre  $p_j$  y  $q_j$ :

$$r_j = \frac{p_j}{q_j} \quad (18)$$

$$p_j + q_j = 1 \quad (19)$$

El valor medio y la varianza, ecuaciones (16) y (17) son sencillas de obtener. Estas dos primeras expresiones se utilizarán como punto de partida para la construcción del modelo B de salto unidad, ya que va a ser posible estimar la media y la varianza de la vida a fatiga para unas determinadas longitudes de grieta, por lo que el primer miembro de las ecuaciones de (16) y (17) va a ser conocido para dichas longitudes de grieta  $a_i$ . Se va a tomar un modelo B constante en bloques, lo que significa que va a haber un conjunto de submatrices dentro de la matriz de probabilidad de transición del modelo con sus elementos constantes.

La forma de determinar dichos elementos es la siguiente: considérese la primera longitud de grieta  $A_1$  donde se conoce los dos primeros términos de (16) y (17). Dicha longitud de grieta define  $b_1$  niveles de daño, los cuales poseen idéntico  $r_j$  (este es el motivo por el cual el modelo B se denomina constante en bloques). Por tanto, en el segundo término de dichas ecuaciones aparecen tan sólo como incógnitas  $b_1$  y  $r_j$  (este último constante), donde obviamente debe cumplirse que  $b_1$  sea un número natural. Teniendo en cuenta lo dicho, es posible determinar  $b_1$  y  $r_j$ , lo cual permite obtener la primera de las submatrices citadas. Para la siguiente longitud de grieta  $a_2$  se procede de un modo análogo, pero teniendo en cuenta que el alcanzar dicha longitud lleva asociado  $b_2$  niveles de daño, y que al extender los sumatorios de los segundos miembros de (16) y (17) hay que considerar  $b_1$  y  $r_j$  calculados para  $A_1$ . De nuevo se disponen de dos ecuaciones con dos incógnitas (una de ellas natural).

Procediendo de esta forma para cada una las longitudes de grieta consideradas en el proceso de fatiga es posible construir el modelo de salto unidad. Para ello es necesario realizar el análisis por elementos finitos extendidos

probabilistas en varias longitudes de grieta comprendidas entre una longitud inicial y una final, siendo estas a su vez variables aleatorias.

### 3.2. ESTIMACIÓN DE LA ESPERANZA Y LA VARIANZA PARA LA VIDA A FATIGA

El modelo de Paris-Erdogan para el cálculo de la vida a fatiga en metales [7] expresa la vida de un componente  $T$  como:

$$T = \int_{A_i}^{A_f} \frac{dA}{D(\Delta K_{eq})^n} \quad (20)$$

y su versión discretizada:

$$T = \sum_{i=1}^{ns} \frac{A_i}{D(K_{eq_i})^n} \quad (21)$$

donde  $A_i$  es el incremento de longitud de grieta en el paso  $i$ -ésimo,  $D$  y  $n$  son los parámetros a fatiga del material,  $K_{eq_i}$  es la diferencia de los factores de intensidad de tensiones equivalentes en modo I, y  $ns$  es el número de pasos en los cuales se divide la trayectoria que sigue la longitud de grieta. De [8][9] es posible obtener la esperanza y varianza del número de ciclos de vida entre dos longitudes de grieta como (22) y (23).

$$E \left[ \sum_{i=1}^{ns} T_i \right] = \sum_{i=1}^{ns} \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D (\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \frac{1}{2!} \left( 2 \sum_{i=1}^{ns} \left[ \frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{A_i}, \mu_{K_{eq_i}}} \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} Var(A_i) + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} Var(X_j) \right] \right) \quad (22)$$

$$Var \left[ \sum_{i=1}^{ns} T_i \right] \approx \sum_{i=1}^{ns} \left( \frac{\partial T_i}{\partial A_i} \Big|_{\mu_{X_i}} \right)^2 Var(A_i) + \sum_{i=1}^{ns} \left( \frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X_i}} \right)^2 Var(K_{eq_i}) + \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial T_i}{\partial A_i} \Big|_{\mu_{X_i}} \frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X_i}} \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X_i}} Var(A_i) + \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial A_j} \Big|_{\mu_{X_j}} \frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X_i}} \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X_j}} Var(A_j) \quad (23)$$

En (22) y (23) se ha considerado únicamente la longitud de grieta como variable aleatoria. De aquí que aparezcan solamente términos relacionados con  $A_i$  y con  $K_{eq_i}$  que es, a su vez, función de la longitud de grieta. Los términos  $\frac{\partial T_i}{\partial A_i}$  y  $\frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}}$  se obtienen directamente de derivar (20). La derivada  $\frac{\partial K_{eq}}{\partial A}$  se obtiene a partir de un método de diferencias centrales:

$$\frac{\partial K_{eq}(A)}{\partial A} \approx \frac{K_{eq}(A+h) - K_{eq}(A-h)}{2h} \quad (24)$$

Estos dos parámetros, media y varianza del número de ciclos de vida permiten construir el modelo de acumulación de daño de Bogdanoff y Kozin tal y como se ha desarrollado en el apartado anterior. Este modelo proporcionará la probabilidad de fallo del componente para una determinada vida.

## 4. RESULTADOS

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para el cálculo de la vida a fatiga de una probeta de tipo compacto ASTM (figura 1). Para ello, se ha construido una malla de elementos finitos como la que aparece en la figura 2. En esta discretización, el avance de la grieta se simula modificando el enriquecimiento de los nodos de la malla afectados por la posición del frente de la grieta.

El avance de la grieta ha sido discretizado en diez incrementos de la longitud inicial a la final. Estas longitudes final e inicial han sido consideradas como variables aleatorias, la tabla 1 recoge los estadísticas para estos parámetros así como las propiedades elásticas y a fatiga del material.

En cada incremento de longitud de grieta es necesario calcular la media y la varianza del factor de intensidad de tensiones  $K_{eq_i}$ , que en el problema considerado se trata de  $K_I$  ya que la probeta está solicitado únicamente en modo I.

Los estadísticos del factor de intensidad de tensiones han sido contrastados con simulaciones de Monte Carlo para cada incremento de longitud. La figura 3 muestra la discretización de la geometría adaptada a la posición de la grieta inicial.

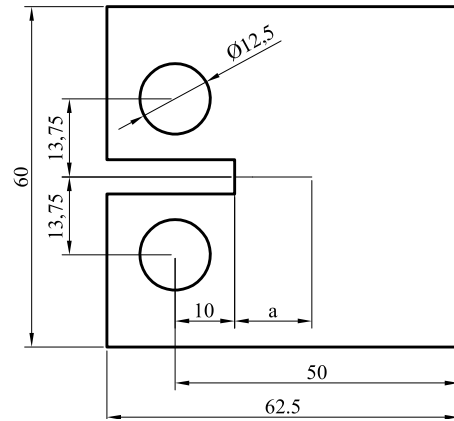


Figura 1: Geometría de la probeta compacta ASTM de espesor 6mm.

En cada incremento de longitud de grieta es necesario calcular la media y la varianza del factor de intensidad de tensiones  $K_{eq_i}$ , que en el problema considerado se trata de  $K_I$  ya que la probeta está solicitado únicamente en modo I.

Los estadísticos del factor de intensidad de tensiones han sido contrastados con simulaciones de Monte Carlo para cada incremento de longitud. La figura 3 muestra la discretización de la geometría adaptada a la posición de la grieta inicial.

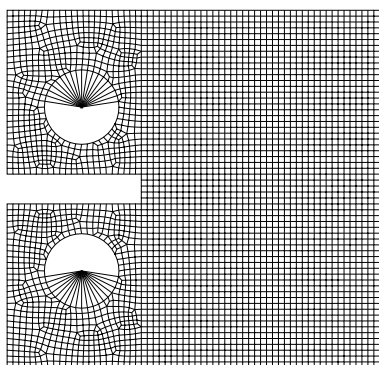


Figura 2: Malla regular de elementos finitos con enriquecimiento variable dependiendo de la posición de la grieta.

Carga (N)	5850	det.
D	$1,17 \cdot 10^{-12}$	det.
n	3.54	det.
E (MPa)	210000	det.
$\nu$	0.3	det.
$A_i$ (mm)	3.2	Var=0,33
$A_f$ (mm)	23.2	Var=0,33

Tabla 1: Carga determinista aplicada sobre la probeta (P), propiedades del material y longitudes de grieta inicial y final con sus respectivas varianzas.

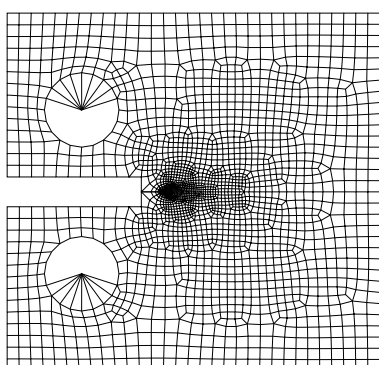


Figura 3: Malla de elementos finitos convencional para una longitud de grieta determinada.

	PXFEM	Monte Carlo
$K_I$ (MPa $\sqrt{m}$ )	22,31	22,29
Var[ $K_I$ ]	0,1842	0,1344

Tabla 2: Resultados del método probabilista enriquecido y simulaciones de Monte Carlo (tamaño de muestra=10.000) para  $A_i = 3, 2$ .

La figura 6 muestra la curva de probabilidad de fallo obtenido del modelo B de acumulación de daño.

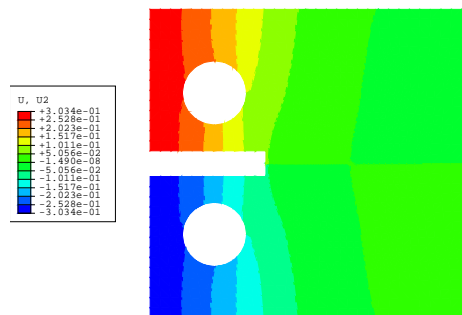


Figura 4: Campo de desplazamientos en la dirección vertical para la longitud de grieta inicial de 3.2 mm.

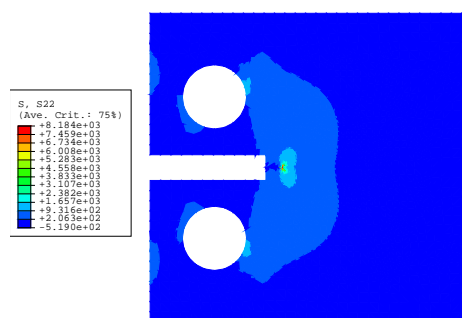


Figura 5: Campo de tensión en la dirección vertical para la longitud de grieta inicial de 3.2 mm.

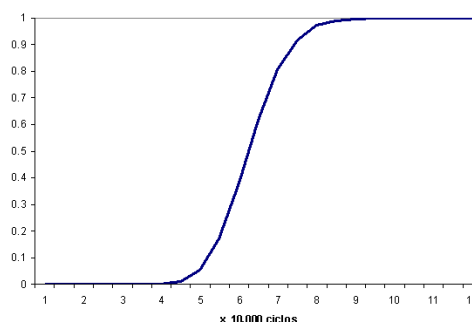


Figura 6: Curva de probabilidad de fallo de la construcción del modelo B.

### 5. CONCLUSIONES

El método de elementos finitos extendido probabilista aproxima correctamente tanto el valor medio de la solución como su dispersión en la proximidad de la grieta (tabla 2).

La simulación del crecimiento de la grieta con este método evita la adaptación de la malla de elementos finitos a la geometría variable de la discontinuidad.

Los resultados obtenidos por el método han sido contrastados con simulaciones de Monte Carlo para todos los incrementos en la longitud de la grieta obteniéndose errores mínimos.

Esta metodología permite además obtener la probabilidad de fallo del componente en crecimiento de grieta a partir de los modelos B de Bogdanoff y Kozin de una forma simple.

Todo el proceso ha sido desarrolladas sobre un software comercial que le otorga una gran robustez y precisión en los resultados.

### REFERENCIAS

- [1] T. Belytschko and T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, 601-620, 1999.
- [2] N. Moes, J. Dolbow and T. Belytschoko , *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 131-150, 1999.
- [3] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran and T. Belytschoko, *Extended finite element method for three-dimensional crack modeling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48, 11, 131-150, 1999.
- [4] W. K. Liu, T. Belytschoko and G. H. Berterfield, *Probabilistic Finite Element Method*, Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis, 1989.
- [5] J. L. Bogdanoff and F. Kozin, *Probabilistic models of cumulative damage*, Wiley, New York, 1985.
- [6] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, 1965.
- [7] P. C. Paris and F. Erdogan, *A critical analysis of crack propagation laws*, ASME J. Basic Engrg, 85, pp. 528-534, 1965.
- [8] J. A. Bea, *Simulación del crecimiento de grietas por fatiga aleatoria mediante elementos finitos probabilistas*, Tesis doctoral, 1989
- [9] J. A. Bea, M. Doblaré and L. Gracia, *Evaluation of the probability distribution of crack propagation life in metal fatigue by means of probabilistic finite element method and B-models*, Eng. Fract. Mech., 63,6,675-711,1999