

UNA FORMULACIÓN TENSORIAL ALTERNATIVA DEL ESTADO TENSIONAL Y DEFORMACIONAL EN EL FRENTE DE GRIETA

D. Fernández Zúñiga¹, A. Fernández Canteli¹, E. Castillo²

¹ Dpto de Construcción e Ingeniería de Fabricación. Universidad de Oviedo.
EPSIG, Campus de Viesques, 7.1.10, 33203 Gijón
e-mail: afc@uniovi.es

² Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Cantabria.
ETSICCP, Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander
e-mail: castie@unican.es

RESUMEN

En este trabajo se introduce el *tensor semi-momento de tensión*, $\Sigma_{ij}(r, \theta, z) = \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}$, para analizar el estado tensional y deformacional en la proximidad del frente de grieta bajo sollicitación en modo-I. Su particularización para $r \rightarrow 0$ conduce a la definición del *tensor intensidad de tensión*, $H_{ij}(\theta)$, del que se deriva para una orientación θ dada, el *tensor intensidad de tensión direccional*, K_{ij} , que se interpreta como la generalización del factor de intensidad de tensiones convencional, K_I . El análisis del campo deformacional en el frente de grieta permite demostrar que el tensor intensidad de tensión en el punto medio de la grieta es independiente del espesor de probeta, por lo que los términos superiores de la serie de Williams, particularmente el tensor constante, T_{ij} deben ser considerados en la predicción de inestabilidad de grietas, incluso en el ámbito de la MFEL. Aunque el modelo se desarrolla aquí sólo para el modo-I de carga, es igualmente aplicable al caso de modo-II.

ABSTRACT

In this work, the tensor $\Sigma_{ij}(r, \theta, z) = \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}$, denoted *stress half-moment tensor*, is introduced to analyze the stress and strain fields in the neighbourhood of the crack front under mode-I load condition. Its particularization for $r \rightarrow 0$ leads to the definition of the *stress intensity tensor* $H_{ij}(\theta)$ and, for a given orientation θ , to that of the *directional stress intensity tensor* K_{ij} . This can be considered an extension of the conventional stress intensity factor K_I . The study of the strain field in the proximity of the crack front shows that the stress intensity tensor at the midpoint of the crack does not depend on the specimen thickness. As a consequence, the higher terms of Williams expansion, particularly the tensor T_{ij} of constant components, must be considered when establishing the instability conditions of cracks, even in the scope of the LEFM. Although the procedure has been only applied to mode-I of loading, it can also be extended to mode-II.

ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS: Métodos analíticos y numéricos

PALABRAS CLAVE: tensor de intensidad de tensiones, pérdida de constricción, MFEL.

1. INTRODUCCIÓN

La definición correcta del estado tensional tridimensional en el entorno del frente de grieta es fundamental para analizar las condiciones de estabilidad o inestabilidad de una grieta bajo una determinada sollicitación y es, por tanto, una información necesaria para establecer un modelo de rotura válido y a partir de él, un criterio de seguridad fiable [1]. En el modelo uniparamétrico de Irwin en el ámbito de la MFEL, el estado tensional en el entorno de una grieta bajo un modo- α de sollicitación queda inequívocamente definido mediante la consideración de un único

parámetro: el factor de intensidad de tensiones K_α para ese modo de sollicitación. La tensión en un punto cualquiera, cercano al frente de grieta, puede calcularse mediante el desarrollo de Williams:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (1)$$

El carácter tensorial de la tensión queda preservado mediante las funciones adimensionales $f_{ij}(\theta)$.

Este modelo es aplicable a los casos límite de sollicitación bidimensional, es decir, a los de tensión y deformación plana, pero adolece de falta de generalidad al no ser aplicable al caso general tridimensional, por lo que esta formulación tensorial resulta ficticia, quedando los índices i, j limitados solamente a las situaciones mencionadas, y, por tanto, a los valores 1 y 2.

Una posibilidad alternativa de abordar este problema con mayor generalidad, consiste en definir el estado tensional en el entorno de la grieta mediante un nuevo *tensor semi-momento de tensión* (t.s.t):

$$\Sigma_{ij}(r, \theta, z) = \sigma_{ij}(r, \theta, z) \sqrt{2\pi r}, \quad (2)$$

que es un tensor de segundo orden, al igual que $\sigma_{ij}(r, \theta)$. Si nos limitamos, por conveniencia, a un análisis en el plano medio de la probeta, es decir, para $z = 0$, ver figura 1, el t.s.t. se reduce a:

$$\Sigma_{ij}(r, \theta, z=0) = \Sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}(r, \theta) \sqrt{2\pi r}. \quad (3)$$

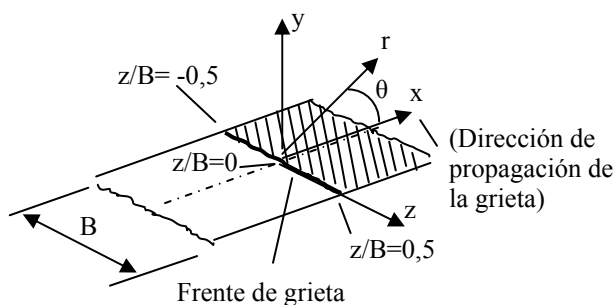


Figura. 1. Frente de grieta en modo-I y sistemas de coordenadas cartesianas y polares.

A partir del t.s.t. se define el *tensor intensidad de tensión* (t.i.t), inspirado en el concepto del factor de intensidad de tensiones de Irwin, como:

$$H_{ij}(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \Sigma_{ij}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta) \sqrt{2\pi r}. \quad (4)$$

De este modo, se obvia la singularidad de $\sigma_{ij}(r, \theta)$ en $r = 0$ y es posible expresar el tensor de tensiones en la proximidad de la grieta como un desarrollo de Williams de la forma:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{H_{ij}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{ij} + r^{1/2} C_{ij}(\theta) + \dots, \quad (5)$$

en la que $H_{ij}(\theta)$ es el tensor intensidad de tensión, T_{ij} es el tensor de componentes constantes y $C_{ij}(\theta)$ el tensor correspondiente al término $r^{1/2}$.

En el análisis de inestabilidad de una grieta interesa considerar el t.i.t. para la orientación crítica, es decir, para la de propagación futura de la grieta. De ahí que se proponga la definición del *tensor intensidad de tensiones direccional* (f.i.t.d.), K_{ij} , como:

$$K_{ij} = H_{ij}(\theta_{cr}) = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta) \sqrt{2\pi r} \Big|_{\theta = \theta_{cr}}. \quad (6)$$

Comparando las expresiones (1) y (5) se deduce que la relación entre $H_{ij}(\theta)$ y K_{ij} puede expresarse en su forma más general como:

$$H_{ij}(\theta) = K_{ik} g_{kj}(\theta), \quad (7)$$

en la que $g_{kj}(\theta)$ es el *tensor de funciones adimensionales* para la orientación θ de aproximación al frente de grieta. Nótese que mientras $\Sigma_{ij}(r, \theta)$, $H_{ij}(\theta)$ y K_{ij} son tensores simétricos, por su definición a partir del tensor simétrico $\sigma_{ij}(r, \theta)$, el tensor $g_{ij}(r, \theta)$ no tiene necesariamente que serlo.

Como se puede observar, $H_{ij}(\theta)$, a diferencia de lo que ocurre con el f.i.t. en la formulación convencional, K , contiene implícitas las funciones adimensionales $g_{ij}(\theta)$. Esto no representa ningún problema para el análisis de inestabilidad de la grieta, dado que éste se particulariza para la orientación crítica. El campo de tensión $\sigma_{ij}(r, \theta)$ en una dirección cualquiera del entorno de la grieta se calcula mediante la expr. (5). Conocido éste, la relación (7) permite determinar el campo de tensión en otra dirección cualquiera.

Desarrollando (7) y aplicando las condiciones de simetría geométrica y de carga, inherentes a las probetas típicas empleadas en la determinación de la tenacidad a fractura en modo-I, se deducen las relaciones:

$$\begin{aligned} H_{xx}(\theta) &= K_{xx}(\theta) g_{xx}(\theta) \\ H_{xy}(\theta) &= K_{xx}(\theta) g_{xy}(\theta) \\ H_{yx}(\theta) &= K_{yy}(\theta) g_{yx}(\theta) \\ H_{yy}(\theta) &= K_{yy}(\theta) g_{yy}(\theta) \\ H_{zz}(\theta) &= K_{zz}(\theta) g_{zz}(\theta), \end{aligned} \quad (8)$$

siendo nulos los restantes términos de $H_{ij}(\theta)$. Asimismo, se demuestra que $K_{xx} = K_{yy}$ con lo que las matrices del tensor K_{ij} y del tensor de funciones adimensionales $g_{ij}(\theta)$ resultan ser, respectivamente:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

y

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Tras la identificación con las correspondientes funciones adimensionales del modelo convencional, $f_{ij}(\theta)$, ver [2], se deduce:

$$\begin{aligned} g_{xx}(\theta) &= f_{xx}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ g_{xy}(\theta) &= g_{yx}(\theta) = f_{xy}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ g_{yy}(\theta) &= f_{yy}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

y

$$g_{zx}(\theta) = g_{xz}(\theta) = g_{yz}(\theta) = g_{zy}(\theta) = 0, \quad (12)$$

por condiciones de simetría, mientras que, por consideraciones en el campo deformacional, se demuestra (ver apartado 3) que:

$$g_{zz}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

De aquí se desprende que el modelo convencional de Irwin sólo representa un caso particular de la formulación general tensorial para modo-I aquí propuesta, en el que resulta $K_{xx} = K_{yy} = K_I$. Esta formulación, sin embargo, permite considerar el efecto tridimensional de la constricción lateral debida al espesor de probeta y abre una nueva línea para el análisis general de la influencia de la pérdida de constricción.

2. DEFORMACIÓN TRANSVERSAL ε_{ZZ} EN EL FRENTE DE GRIETA

Consideremos de nuevo el *tensor semi-momento de tensión*, $\Sigma_{ij}(r, \theta)$, en el plano medio de la probeta, es decir, para $z = 0$, definido según la expr. (3). Debido a la simetría geométrica y de carga existentes respecto del plano medio de la probeta, se cumple $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$, por lo que los únicos componentes no-nulos del tensor son:

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx}(r, \theta) &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx}(r, \theta) \\ \Sigma_{yy}(r, \theta) &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, \theta) \\ \Sigma_{xy}(r, \theta) &= \Sigma_{yx}(r, \theta) = \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(r, \theta) \\ \Sigma_{zz}(r, \theta) &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{zz}(r, \theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Consecuentemente, las componentes no-nulas del t.i.t son:

$$\begin{aligned} H_{xx}(\theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{xx}(r, \theta) \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \Sigma_{xx}(r, \theta) \\ H_{yy}(\theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy}(r, \theta) \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \Sigma_{yy}(r, \theta) \\ H_{xy}(\theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{xy}(r, \theta) \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \Sigma_{xy}(r, \theta) \\ H_{zz}(\theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{zz}(r, \theta) \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \Sigma_{zz}(r, \theta). \end{aligned} \quad (15)$$

Aplicando el desarrollo de Williams a σ_{xx} y σ_{yy} se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \theta) &= \frac{H_{xx}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{xx} + r^{1/2} C_{xx}(\theta) + \dots \\ \sigma_{yy}(r, \theta) &= \frac{H_{yy}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{yy} + r^{1/2} C_{yy}(\theta) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

y aceptando un desarrollo similar para σ_{zz} resulta:

$$\sigma_{zz}(r, \theta) = \frac{H_{zz}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{zz} + r^{1/2} C_{zz}(\theta) + \dots \quad (17)$$

La deformación transversal en el frente de grieta $\varepsilon_{zz}(r = 0, \theta)$ puede deducirse a partir de la relación general de Hooke:

$$\varepsilon_{zz}(r, \theta) = \frac{\sigma_{zz}(r, \theta) - \nu[\sigma_{xx}(r, \theta) + \sigma_{yy}(r, \theta)]}{E}. \quad (18)$$

Sustituyendo (16) y (17) en (18) resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}(r, \theta) &= \frac{1}{E} \left[\frac{H_{zz}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{zz} + r^{1/2} C_{zz}(\theta) + \dots \right. \\ &\quad \left. - \nu \left(\frac{H_{xx}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{xx} + r^{1/2} C_{xx}(\theta) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \left(\frac{H_{yy}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + T_{yy} + r^{1/2} C_{yy}(\theta) + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

y tras el reagrupamiento de términos se llega a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}(r, \theta) &= \frac{1}{E} \left[\frac{H_{zz}(\theta) - \nu(H_{xx}(\theta) + H_{yy}(\theta))}{\sqrt{2\pi r}} + \right. \\ &\quad \left. (T_{zz} - \nu(T_{xx} + T_{yy})) + \right. \\ &\quad \left. r^{1/2} (C_{zz}(\theta) - \nu(C_{xx} + C_{yy})) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Dado que $\varepsilon_{zz}(r, \theta)$ en el frente de grieta, es decir, $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon_{zz}(r, \theta)$, no puede adoptar un valor singular, para que el desplazamiento transversal

$$u_z(r=0) = \int_{-B/2}^{B/2} \varepsilon_{zz}(r=0) dz \quad (21)$$

sea una magnitud acotada, se tiene que verificar la condición:

$$H_{zz}(\theta) - \nu [H_{xx}(\theta) + H_{yy}(\theta)] = 0, \quad (22)$$

que implica la nulidad del primer término de la expr. (20) para todo $r \neq 0$:

$$\frac{H_{zz}(\theta) - \nu (H_{xx}(\theta) + H_{yy}(\theta))}{\sqrt{2\pi r}} = 0. \quad (23)$$

Esta condición se tiene que cumplir igualmente para $r = 0$, a fin de garantizar la ausencia de discontinuidad de $\varepsilon_{zz}(r, \theta)$ en ese punto. En consecuencia, para un r cualquiera la expr. (20) se reduce a:

$$\varepsilon_{zz}(r, \theta) = \frac{1}{E} [(T_{zz} - \nu(T_{xx} + T_{yy})) + r^{1/2} (C_{zz}(\theta) - \nu(C_{xx} + C_{yy})) + \dots] \quad (24)$$

y, a su vez, para $r = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}(r=0, \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon_{zz}(r, \theta) \\ &= \frac{1}{E} [T_{zz} - \nu(T_{xx} + T_{yy})]. \end{aligned} \quad (25)$$

Como los términos T_{ij} no son función de la orientación θ , queda demostrado que $\varepsilon_{zz}(r=0, \theta)$ no depende de θ , como corresponde a una magnitud referida al eje z , que no debe resultar afectada por la orientación θ elegida. La expresión (25) nos indica, además, que la deformación $\varepsilon_{zz}(r=0)$ en el frente de grieta está relacionada con el tensor de componentes constantes, T_{ij} , cuyo término en x es la tensión T de la formulación biparamétrica [3].

3. RELACIÓN ENTRE COMPONENTES DEL T.I.T.D. K_{ij} EN EL FRENTE DE GRIETA

Sustituyendo las componentes de $H_{ij}(\theta)$ en la expr. (22) en función de las componentes del t.i.t.d., K_{ij} , y de las del tensor de funciones adimensionales, $g_{ij}(\theta)$, según el sistema de ecuaciones (8) y teniendo, además, en cuenta que $K_{xx} = K_{yy} = K_I$ resulta:

$$\begin{aligned} K_{zz} g_{zz}(\theta) &= \nu [K_{xx} g_{xx}(\theta) + K_{yy} g_{yy}(\theta)] \\ &= \nu K_I [g_{xx}(\theta) + g_{yy}(\theta)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Para la orientación crítica $\theta = 0^\circ$ la expresión anterior se reduce a:

$$K_{zz} g_{zz}(\theta = 0^\circ) = \nu [K_{xx} + K_{yy}], \quad (27)$$

al cumplirse que $g_{xx}(\theta = 0^\circ) = g_{yy}(\theta = 0^\circ) = 1$.

Dado que en deformación plana se verifica:

$$K_{zz}^{DP} = \nu [K_{xx}^{DP} + K_{yy}^{DP}], \quad (28)$$

se deduce que $g_{zz}(\theta = 0^\circ) = 1$, con lo que, finalmente, se llega, con generalidad, a:

$$K_{zz} = \nu [K_{xx} + K_{yy}] = 2\nu K_I, \quad (29)$$

lo que indica que en el frente de grieta, la relación:

$$\frac{K_{zz}}{\nu(K_{xx} + K_{yy})} = \frac{K_{zz}}{2\nu K_I} = 1, \quad (30)$$

propia del caso de deformación plana, se mantiene con independencia del espesor de probeta. Sin embargo, esto no supone que rijan un campo de deformación plana, como afirman otros autores [4,5], dado que, como se ha podido comprobar en el apartado anterior, en todo el frente de grieta, ni la deformación transversal ε_{zz} es nula, ni las componentes K_{xx} , K_{yy} y K_{zz} del t.i.t.d. son constantes, por lo que necesariamente el estado tensional y deformacional en el frente de grieta no corresponde al de deformación plana.

Sustituyendo (29) en (26) resulta:

$$g_{zz}(\theta) = \frac{1}{2} [g_{xx}(\theta) + g_{yy}(\theta)] = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (31)$$

como ya se había avanzado en el apartado 1.

4. ÍNDICE DE CONSTRICCIÓN LATERAL

4.1 En el punto medio del frente de grieta

Parece evidente que la constricción lateral en el frente de grieta y en sus inmediaciones queda determinada por la tensión $\sigma_{zz}(r, \theta)$. Sin embargo, comprobado el carácter singular de esa tensión en el frente de grieta, resulta conveniente la definición de otra magnitud alternativa, no singular, para la medida de la constricción, que permita una interpretación más intuitiva y directa en todo el entorno de la grieta. Este sería el caso de $\Sigma_{zz}(r, \theta)$, es decir, de la componente z del tensor semimomento de tensión, $\Sigma_{ij}(r, \theta)$. La normalización de ésta permite definir el *índice de constricción lateral*, $\gamma_{zz}(r, \theta)$, como:

$$\gamma_{zz}(r, \theta) = \frac{\Sigma_{zz}(r, \theta)}{H_{zz}^*(\theta)} = \frac{\sqrt{2\pi r} \sigma_{zz}(r, \theta)}{H_{zz}^*(\theta)}, \quad (32)$$

donde $H_{zz}^*(\theta)$ es la componente según z de un *tensor intensidad de tensión de referencia*, que puede responder a diferentes criterios, (por ejemplo, el correspondiente a deformación plana o al valor medio

en una probeta de espesor B , etc.) de acuerdo con los cuales adopta diferentes valores. Aunque esta elección no es trascendental, influye en el valor absoluto de $\gamma_{zz}(r, \theta)$, lo que debe tenerse presente en la interpretación cuantitativa de los resultados.

En el frente de grieta, $\gamma_{zz}(r, \theta)$ pasa a denominarse $\bar{\gamma}_{zz}(\theta)$ para una mejor identificación. Partiendo de la expr. (32) y teniendo presente (8) resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{zz}(\theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \gamma_{zz}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Sigma_{zz}(r, \theta)}{H_{zz}^*(\theta)} \\ &= \frac{H_{zz}(\theta)}{H_{zz}^*(\theta)} = \frac{K_{zz} g_{zz}(\theta)}{K_{zz}^* g_{zz}(\theta)} = \frac{K_{zz}}{K_{zz}^*}, \end{aligned} \quad (33)$$

de donde se deduce que $\bar{\gamma}_{zz}$, al igual que $\varepsilon_{zz}(r=0)$, no depende de la orientación θ considerada, siendo proporcional a K_{zz} en el frente de grieta y, como consecuencia de la expr. (30), también a K_I :

$$\bar{\gamma}_{zz} = \frac{\nu(K_{xx} + K_{yy})}{\nu(K_{xx}^* + K_{yy}^*)} = \frac{2\nu K_I}{2\nu K_I^*} = \frac{K_I}{K_I^*} = \bar{\gamma}_I, \quad (34)$$

por lo que, al ser $K_{xx} = K_{yy} = K_I$, se verifica:

$$\bar{\gamma}_{zz} = \bar{\gamma}_I = \bar{\gamma}_{xx} = \bar{\gamma}_{yy}. \quad (35)$$

Como se ha visto en el apartado 3, la componente K_{zz} del t.i.t.d., K_{ij} , en el centro del frente de grieta, no depende, inesperadamente, del espesor de probeta, por lo que $\bar{\gamma}_{zz} = \bar{\gamma}_I = \bar{\gamma}_{xx} = \bar{\gamma}_{yy}$ tampoco dependen de él. Dado que el espesor de probeta influye indiscutible y notoriamente en el valor de la “tenacidad a fractura” (hablando propiamente, del factor de intensidad de tensiones crítico) en modo-I del material, según ha quedado patente en diferentes investigaciones (ver [6]), la explicación del efecto del espesor de probeta sobre la pérdida de constricción, hay que buscarla en el análisis de los términos superiores de la serie de Williams, particularmente del tensor T_{ij} y no en el t.i.t.d., K_{ij} . En consecuencia, la clave reside en la interpretación del índice de constricción $\gamma_{zz}(r)$ a lo largo del eje r , en las inmediaciones del frente de grieta y no en su valor en $r \rightarrow 0$ en el punto medio del frente de grieta, es decir, en $\bar{\gamma}_{zz}$, de donde se concluye que éste, o equivalentemente K_{zz} es insensible al espesor de probeta.

4.1 A lo largo del frente de grieta

La condición de no-singularidad de $\varepsilon_{zz}(r=0)$ en el frente de grieta, aplicada hasta ahora sólo en su punto medio, es extensible a todo lo largo del frente de grieta. Repitiendo el proceso seguido en el apartado 3, se demuestra que en cada posición del frente de grieta,

$r=0$, referenciada, por conveniencia, a través de la coordenada normalizada z/B , se sigue cumpliendo la relación (30), incluso si el factor de intensidad de tensiones, K_I , y por lo tanto el t.i.t.d., K_{ij} , resulta no ser constante, sino variable a lo largo del frente de grieta, tal como ha sido repetidamente constatado (ver figura 2). Como resultado de la aplicación de las relaciones (26) a (34) en todo el frente de grieta, se llega finalmente a:

$$\bar{\gamma}_{zz}(z/B) = \bar{\gamma}_I(z/B) = \bar{\gamma}_{xx}(z/B) = \bar{\gamma}_{yy}(z/B). \quad (36)$$

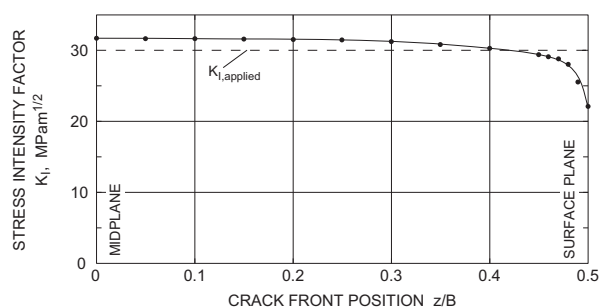


Figura. 2. Variación del factor de intensidad de tensiones $K_I(z/B)$ a lo largo del frente de grieta. (De [1]).

La normalización de $\gamma_{zz}(z/B)$ respecto de su correspondiente valor en el frente de grieta, $\bar{\gamma}_{zz}(z/B)$, resulta ser el *grado de deformación plana* definido como:

$$\sigma_{zz} / \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (37)$$

por Nakamura-Parks y otros autores [4,5]. Su interpretación directa como grado de constricción, conduce al mencionado error de apreciación sobre el presunto estado de deformación plana a todo lo largo del frente de grieta.

5. CÁLCULOS NUMÉRICOS

Con el fin de comprobar la validez de las deducciones teóricas precedentes y avanzar en su interpretación para posibles aplicaciones, se realizaron cálculos numéricos con ayuda del programa de elementos finitos ABAQUS [7]. Se consideraron probetas del tipo Arcan-Richard (A-R) según la figura 3 con diferentes espesores de probeta, para una aleación de aluminio Al 7075, con las siguientes propiedades mecánicas y de fractura: $E=71000$ MPa, $\nu=0.34$, $R_{p0.2}=533$ MPa, $K_{Ic}=30$ MPam^{1/2}. Para todas ellas se tomó un ancho de probeta constante, $W=50$ mm, con una longitud relativa de grieta $a/W=0.50$. La malla elegida (ver figura 3) parte de un tamaño de elemento de 1 μ m que va aumentando en una relación de 1,22 y permite un análisis tensional detallado en la zona del frente de grieta. Las probetas se

sometieron a la carga crítica correspondiente a la tenacidad a fractura del material.

La elección de este tipo de probeta no-homologada, se debe a que, contrariamente a las probetas estándar empleadas en la determinación de la tenacidad fractura en modo-I, como por ejemplo la CT o la SENB, la probeta A-R es también utilizable en el análisis del problema en modo-II. En cualquier caso, la práctica equivalencia entre los resultados del f.i.t. obtenidos con la probeta A-R y con las mencionadas probetas homologadas, ha quedado suficientemente demostrada en [8].

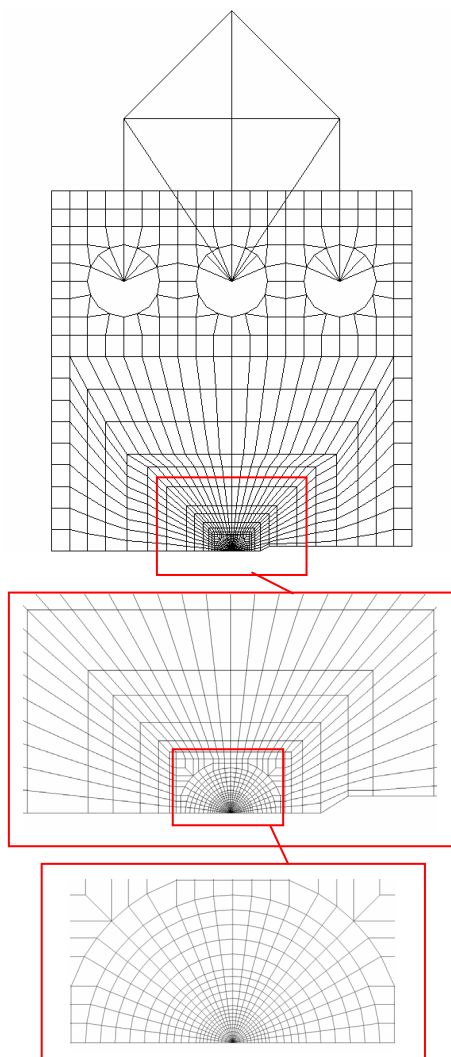


Figura 3. Probeta Arcan-Richard bajo carga en modo-I y malla de elementos finitos empleada.

En primer lugar se calculó la deformación transversal $\varepsilon_{zz}(z/B)$ en el frente de grieta en el plano $\theta=0^\circ$ para una probeta de espesor $B=10\text{ mm}$, en un caso, ver figura 4a, para $z/B=0$ a lo largo del eje r y, en otro, ver figura 4b, para $r \rightarrow 0$ en función de z/B .

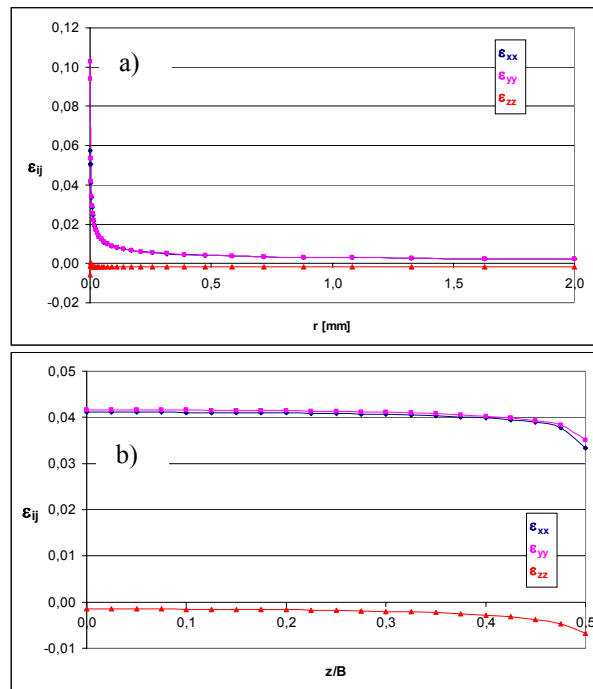


Figura 4. Deformaciones ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} para una probeta de 10 mm de espesor (a) a lo largo del eje r y (b) a lo largo del frente de grieta.

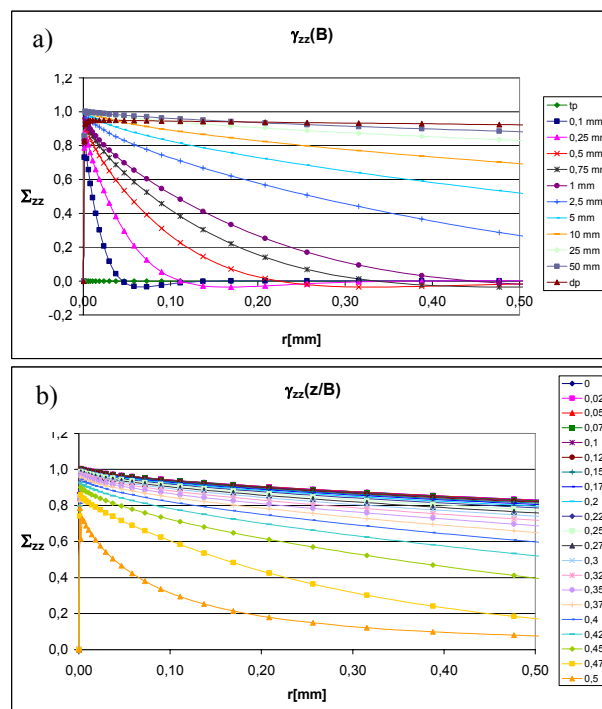


Figura 5. Índice de constricción lateral para $\theta=0^\circ$ en función de r , a) como $\bar{\gamma}_{zz}(r, z/B=0, B)$ para diferentes espesores de probeta y b) como $\bar{\gamma}_{zz}(r, z/B, B=25\text{ mm})$ para una probeta de 25 mm de espesor.

Considerando la constancia relativa de la magnitud de las deformaciones a lo largo del frente de grieta, independientemente de su valor absoluto y de su

tendencia hacia la singularidad, los resultados confirman la no-nulidad de $\varepsilon_{zz}(z/B)$ a lo largo del frente de grieta, como ya se ha mencionado.

A continuación se evaluó el *índice de constricción lateral* para $\theta=0^\circ$; inicialmente en el plano medio de probetas de diferente espesor B , en función de la distancia r al frente de grieta y del espesor, es decir, como $\gamma_{zz}(r, z/B=0, B)$, ver figura 5a, y también para una probeta de 25 mm de espesor en función de la posición relativa al plano medio, z/B , y de la distancia r al frente de grieta, es decir, como $\gamma_{zz}(r, z/B, B=25\text{ mm})$, ver figura 5b.

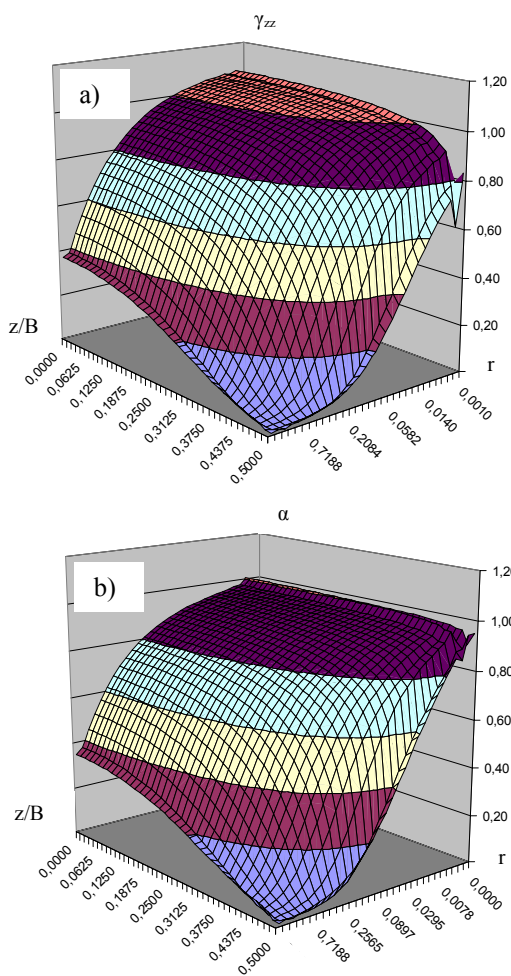


Figura. 6. a) *Índice de constricción lateral* para $\theta=0^\circ$ en función de r , en una probeta A-R de espesor 10 mm, definido como $\gamma_{zz}(r, z/B=0, B=10\text{mm})$ y b) *grado de deformación* según [4], definido como $\alpha = \sigma_{zz} / \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

Obsérvese que aunque las gráficas de γ_{zz} en la figura 5a, que podemos denominar curvas de constricción, muestran diferencias notables en función del espesor de probeta, su extrapolación para $r \rightarrow 0$, es decir, $\bar{\gamma}_{zz}$, confirma que los índices de constricción lateral en el plano medio del frente de grieta, $\gamma_{zz}(r, z/B=0, B)$, convergen hacia un único valor, independientemente

del espesor de probeta, tal como ya constataron Nakamura-Parks [4]. Sin embargo, como ya se ha hecho notar, esto no supone aceptar un estado de deformación plana en el frente de grieta.

Con esto, la matriz del t.i.t.d. resulta ser:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_I & 0 & 0 \\ 0 & K_I & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu K_I \end{pmatrix}, \quad (35)$$

para cualquier espesor de probeta y, en consecuencia, la pérdida de constricción debe buscarse en el tensor T_{ij} o tensores superiores de la serie de Williams.

Por último, en la figura 6a se representa el *índice de constricción lateral*, como $\gamma_{zz}(r, \theta=0^\circ, z/B)$, para una probeta A-R de 10 mm de espesor, mientras que en la figura 6b se muestra la función *grado de deformación plana* definido según Nakamura [4], asimilable al *índice de constricción lateral normalizado*.

6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se derivan del presente trabajo son:

- Se ha introducido un nuevo concepto de *tensor semimomento de tensión*, $\Sigma_{ij}(r, \theta)$ para analizar el campo tensional y deformacional en el frente de una grieta, a partir del cual se define el *tensor intensidad de tensión*, $H_{ij}(\theta)$, y de éste, para la dirección crítica $\theta_{cr}=0^\circ$, el *tensor intensidad de tensión direccional*, K_{ij} , que puede ser interpretado como la generalización del factor de intensidad de tensiones convencional de Irwin, K_I .
- Las magnitudes anteriores permiten constatar que el modelo de Irwin, basado en el factor de intensidad de tensiones, es un caso particular del modelo general aquí propuesto.
- La variación del valor de la *“tenacidad a fractura”* del material, K_{Icr} , con el espesor de probeta, es decir, con la constricción lateral, no puede interpretarse mediante el tensor de intensidad de tensiones direccional, K_{ij} , en el punto medio de la grieta, dado que éste no depende del espesor de probeta. En consecuencia, las razones de esta variación han de buscarse en el valor de los tensores correspondientes a los términos superiores de la serie de Williams, en particular en el del tensor de términos constantes, T_{ij} .
- El modelo propuesto abre nuevas perspectivas para la definición de un modelo general para el análisis de la

pérdida de constricción y de su influencia en el establecimiento de las condiciones de inestabilidad de grietas, independientemente de su origen (constricción lateral, tamaño de grieta a/W , modo mixto, etc.).

- El procedimiento, aunque limitado en este trabajo al caso de modo-I, es aplicable directamente al modo-II o modo mixto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo parcial dado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) (proyectos DPI 2002-04172 y BIA 2005-07802) del Ministerio Español de Educación y Ciencia.

REFERENCIAS

[1] Fernández Zúñiga, D., Kalthoff, J.F., Fernández Canteli, A., Grasa, J., Doblaré, M., “Three-dimensional finite element calculations of crack tip plastic zones and K_{Ic} specimen size requirements”. *ECF 15, Stockholm*, August, 2004.

[2] Kanninen, M.F., Popelar, C.H., *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, 1985.

[3] Betegón, C., Hancock, J., “Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields” *J. of Applied Mechanics*, 113, pág. 104-110, 1991.

[4] Nakamura, T., Parks, D.M., “Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate”, *J. of Applied Mechanics* 55, *Trans. of ASME*,. pág. 805-813, 1988.

[5] Kwon, S.W., Sun, C.T., “Characteristics of three-dimensional stress fields in plates with a through-the-thickness crack”, *Int. J. of Fracture* 104, pág. 291-315, 2000.

[6] Hiese, W., *Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten*, Tesis doctoral, Ruhr-Universität Bochum, 2000.

[7] Hibbit, H.D., Karlsson, B.I., Sorensen, E.P., *ABAQUS User Manual*, Version 6.2, 2002.

[8] Fernández Zúñiga D., *Nuevos criterios de validez de ensayo para la determinación de la tenacidad a fractura en modo mixto*. Proyecto de Investigación del Programa de Doctorado. Universidad de Oviedo, Sept. 2003.