

## APLICACIÓN A MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS DE LOS CRITERIOS DE ROTURA EN ENTALLAS EN U

F. J. Gómez y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid  
C/ Profesor Aranguren s/n  
28040 Madrid, España.  
jgomez@mater.upm.es

### RESUMEN

El objetivo de la presente comunicación es extender la validez de los criterios de rotura en entallas en U a los materiales elastoplásticos. Recientemente, los autores han propuesto un procedimiento sencillo para calcular la carga de rotura de geometrías entalladas de materiales con rotura en régimen elástico lineal. El método depende de dos constantes: la tenacidad y la resistencia cohesiva, que en el caso ideal de rotura elástica y lineal es igual a la tensión de rotura en tracción. En este trabajo el criterio se generaliza a materiales elastoplásticos, introduciendo una relación empírica entre el límite elástico del material y la resistencia cohesiva. Las predicciones teóricas han sido verificadas satisfactoriamente con resultados experimentales propios en PMMA, y con valores de rotura de probetas entalladas encontradas en la bibliografía: policarbonato, resina epoxi, aluminio a 25°C, 150°C, 250°C y 350°C, acero a -196°C y en materiales compuestos de matriz metálica.

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to extend the failure criteria for elastic U-notched specimen to elastic ones. Recently, the authors have proposed a simple procedure to obtain the critical load of U-notched solids. This method is applicable to materials with linear elastic failure, and depends on two material constants: the toughness and the cohesive stress, which is equal to tensile stress in a linear elastic material. Introducing an empirical relation between the yield stress and the cohesive stress the criterion could be extended to elastoplastic materials. Theoretical predictions have been verified satisfactorily with experimental results in PMMA, polycarbonate, epoxi, aluminum to 25°C, 150°C, 250°C and 350°C, steel to -196°C and MMC.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos analíticos y numéricos.

**PALABRAS CLAVE:** Entallas en U, criterios de rotura, modelo cohesivo.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los elementos estructurales que contienen concentradores de tensión como taladros o entallas son elementos débiles que pueden sufrir roturas catastróficas. Para garantizar su integridad, se necesitan criterios que evalúen la carga máxima que resiste un sólido entallado.

En los sólidos fisurados, la carga de rotura se calcula a partir de la singularidad tensional existente, estableciendo que la fisura se propaga cuando el factor de intensidad de tensiones, o la integral J, es igual a la tenacidad de fractura del material. En las geometrías lisas o entalladas con radios relativamente grandes, se aplica un criterio ingenieril según el cual la fractura comienza cuando la tensión en la raíz de la entalla alcanza la resistencia a tracción. En las situaciones intermedias, cuando el radio de curvatura del fondo de la entalla no es pequeño y tampoco es suficientemente grande, son necesarios criterios alternativos.

Los autores han propuesto un procedimiento sencillo para calcular la carga máxima que resiste una geometría entallada, aplicable a materiales con rotura en régimen elástico lineal [1]. El criterio depende exclusivamente de dos parámetros: la tenacidad y la resistencia cohesiva; y ha sido validado experimentalmente frente a gran número de materiales [2]. El principal inconveniente es su limitada aplicación, que se reduce a materiales frágiles en los que la rotura se produce en régimen elástico y lineal.

Con objeto de salvar esta limitación, en este trabajo se propone una regla empírica, que amplía el campo de aplicación del criterio a los materiales elastoplásticos.

A continuación se analiza el criterio de rotura para materiales frágiles, y su posible extensión a materiales elastoplásticos. Se expone la regla propuesta y las predicciones teóricas, que concuerdan con los resultados experimentales propios y de otros autores.

## 2. CRITERIO DE ROTURA EN MATERIALES ELASTICO LINEALES

La carga máxima que soporta un sólido fisurado solicitado en modo I de un material elástico lineal hasta rotura, se obtiene a partir del criterio clásico de Irwin [3, 4], según el cual la rotura se produce cuando el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ , que depende de la geometría y de la sollicitación, es igual a un valor crítico, denominado tenacidad de fractura,  $K_{IC}$ , función del material.

$$K_I = K_{IC}(\text{material}) \quad (1)$$

Este criterio se generaliza a entallas en forma de V, gracias a la singularidad tensional que existe en el vértice de la entalla. La rotura de un sólido entallado en V se produce cuando el factor de intensidad de tensiones generalizado,  $K_I^V$ , función de la geometría y de la sollicitación alcanza un valor crítico,  $K_{IC}^V$ , tenacidad generalizada, que depende del material y del ángulo de entalla,  $\beta$  [5, 6].

$$K_I^V = K_{IC}^V(\text{material}, \beta) \quad (2)$$

En las entallas en forma de U no existe una singularidad tensional en la raíz, sin embargo el campo tensional se aproxima a la expresión de Creager y Paris que depende de un único factor [7, 8]. De nuevo se puede establecer un criterio similar al criterio de Irwin, donde ahora, la tenacidad generalizada es función del radio de entalla.

$$K_I^R = K_{IC}^R(\text{material}, R) \quad (3)$$

Gómez y Elices han comprobado la validez de los criterios anteriores en materiales elásticos y lineales hasta rotura [2, 9]. Además han propuesto un criterio de rotura aplicable a entallas en forma de V redondeadas al combinar (2) y (3) [1, 2].

$$K_I^{V,R} = K_{IC}^{V,R}(\text{material}, \beta, R) \quad (4)$$

donde  $K_I^{V,R}$ , es el factor, de intensidad de tensiones generalizado en una entalla en V redondeada y  $K_{IC}^{V,R}$  es la tenacidad generalizada.

La aplicación de estos criterios requiere conocer la función tenacidad generalizada del material dependiente del ángulo y del radio de entalla. Para salvar este inconveniente Gómez y Elices [1] han propuesto un criterio de rotura basado en la adimensionalización de la expresión (4) a partir de la tenacidad de fractura,  $K_{IC}$ , y de la longitud característica del material,  $l_{ch}$ , definida como

$$l_{ch} = \left( \frac{K_{IC}}{f_t} \right)^2 \quad (5)$$

donde  $f_t$  es la resistencia cohesiva del material. La expresión adimensional de la expresión (4) es

$$\frac{K_{IC}^{V,R}}{K_{IC} l_{ch}^{0.5-\lambda}} = K^* \left( \text{material}, \beta, \frac{R}{l_{ch}} \right) \quad (6)$$

donde  $K^*$  es una función adimensional del material, del ángulo de entalla y del radio adimensional y  $\lambda$  es función exclusivamente del ángulo de entalla. Para materiales que exhiben un comportamiento elástico y lineal, según Gómez y Elices, la función  $K^*$ , no depende del material, solo de las dimensiones locales de la entalla.

$$\frac{K_{IC}^{V,R}}{K_{IC} l_{ch}^{0.5-\lambda}} \approx K^* \left( \beta, \frac{R}{l_{ch}} \right) \quad (7)$$

En el caso particular de entallas en U la adimensionalización se simplifica puesto que desaparece la dependencia con el ángulo de entalla y la función  $\lambda$  toma el valor 0.5.

$$\frac{K_{IC}^{V,R}}{K_{IC}} \approx K^* \left( \frac{R}{l_{ch}} \right) \quad (8)$$

Esta expresión se ha comprobado en entallas en U de alumina sometida a distintas temperaturas y velocidades de ensayo [10-14], nitruro de silicio [15, 16], sílice monocristalina [17] y policristalina [18], circonita parcialmente estabilizada con magnesia [19], circonita parcialmente estabilizada con itria [10], circonita tetragonal totalmente estabilizada con itria [19], y PMMA a -60°C [9]. Los resultados correspondientes a estos materiales aparecen en la figura 1.

La expresión (8) se puede justificar teóricamente a partir de la teoría de la fisura cohesiva [1], o a partir de criterios locales de rotura, como el criterio de máxima tensión circunferencial, tensión media, el criterio de Sih, el criterio de densidad de energía media, criterio local de Mecánica de Fractura Finita, o el criterio de Leguillon [20]. La función  $K^*$ , tenacidad generalizada adimensional, depende del criterio de rotura que se adopte pero esta dependencia es pequeña y está dentro del error experimental [20].

Gómez, Elices y Guinea han observado que todos los criterios de rotura anteriores se pueden formular siguiendo una misma estructura [20].

$$\frac{K_{IC}^{V,R}}{K_{IC}} = \sqrt{1 + \frac{\pi R}{4 l_{ch}} + h \left( \frac{R}{l_{ch}} \right)} \quad (9)$$

El criterio de rotura más sencillo de los analizados anteriormente corresponde al criterio de tensión media, y se obtiene cuando la función  $h$  es idénticamente nula. En la figura 1 se ha representado dicho criterio de rotura junto a los valores correspondientes a la teoría de la fisura cohesiva.

$$\frac{K_{IC}^{V,R}}{K_{IC}} = \sqrt{1 + \frac{\pi R}{4 l_{ch}}} \quad (10)$$

La expresión (10) permite obtener valores aproximados de la tenacidad generalizada, y es aplicable a materiales con comportamiento elástico lineal hasta rotura, geometrías sometidas a sollicitación simétrica, modo I, y cuyas dimensiones, excepto el radio de curvatura de la entalla, sean muy superiores a la longitud característica [20].

### 3. EXTENSIÓN DEL CRITERIO A MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS

La aplicación directa del criterio de rotura anterior a materiales elastoplásticos no es posible debido a que no se conoce la resistencia cohesiva del material ni la longitud característica del mismo. En este trabajo se propone una regla para estimar dicha tensión a partir del límite elástico,  $\sigma_y$ , según la cual la resistencia cohesiva es aproximadamente 3 veces el límite elástico.

$$f_t \approx 3\sigma_y \quad (11)$$

Para verificar la validez de esta relación se han recopilado resultados de ensayos de rotura de probetas entalladas propios y de otros autores de diferentes materiales: PMMA, policarbonato, resina epoxi, aluminio, aluminio reforzado con carburo de silicio y acero de vasijas.

Tabla 1. Límite elástico, tenacidad de fractura y longitud característica de los materiales analizados.

Material	$\sigma_y$ (MPa)	$K_{IC}$ (MPam <sup>0.5</sup> )	$l_{ch}$ ( $\mu$ m)
PMMA (Gómez)	40	1.04	87
PC (Nisitani)	58	2.2	160
Epoxi 1 (Kinloch)	80	0.72	9
Epoxi 2 (Kinloch)	112	0.69	4
Epoxi 3 (Kinloch)	86	0.70	7
Aluminio 25°C (Srinivas)	320	13.0	180
Aluminio 150°C (Srinivas)	265	10.5	170
Aluminio 250°C (Srinivas)	210	9.0	200
Aluminio 350°C (Srinivas)	161	7.9	270
Acero -196°C (Lee)	918	46.7	290
MMC (Manoharan)	408	17.0	190

Gómez y Elices han analizado la rotura de PMMA producida por entallas a temperatura ambiente, realizando un amplio programa experimental de ensayos de rotura de probetas entalladas con diferentes radios, profundidades de entalla, tamaños y tipos de sollicitación [21, 22]. Los factores de intensidad de tensiones generalizados adimensionales se han representado en la figura 1. La adimensionalización de estos factores se ha realizado con los valores de la tenacidad de fractura y el límite elástico que aparecen en la tabla 1.

Nisitani y Hyakutake estudiaron la fractura de geometrías entalladas simétricas de policarbonato con varios radios, profundidades de entalla y espesores [23]. El límite elástico del material se ha determinado de la curva tensión deformación que aparece en el trabajo de Nisitani [23]. La tenacidad de fractura, que no aparece en el artículo anterior, se ha tomado del libro de Kinloch [24]. Los factores de intensidad de tensiones generalizados adimensionales representados en la figura 1 se han calculado con la expresión (12), donde  $\sigma_{max}$  es la tensión en la raíz de la entalla [24].

$$K_{IC}^{V,R} = \frac{\sigma_{max}}{2} \sqrt{\pi R} \quad (12)$$

Kinloch et al han estudiado el comportamiento de diferentes resinas frente a defectos geométricos tipo entalla [24]. Los resultados de sus investigaciones se recogen en el libro de Kinloch [24] donde aparecen varias curvas del factor de intensidad de tensiones generalizado frente al radio de entalla en tres tipos de resina epoxi: DGEBA (diglicidiléteres del tipo bisfenol A) curada con 5 por ciento de piperidina (epoxi 1), DGEBA curada con 9.8 por ciento de trietilentetramina (TETA) (epoxi 2), DGEBA curada con 14.7 por ciento de TETA (epoxi 3). La adimensionalización de estos resultados se muestra en la figura 1.

Srinivas y Kamat han llevado a cabo un amplio programa experimental para analizar la influencia del radio de entalla y la temperatura en la tenacidad de fractura de una aleación de aluminio reforzada con carburo de aluminio y alumina [25]. El programa experimental consistió en la rotura de probetas compactas en forma de disco con radios de entalla de 0.08, 0.16, 0.35 y 0.5 mm, a distintas temperaturas: 25, 150, 250 y 350°C. La composición química, la tenacidad de fractura y el límite elástico del material a distintas temperaturas, se pueden encontrar en el trabajo de Srinivas y Kumat [25]. El factor de intensidad de tensiones generalizado de las geometrías analizadas se ha calculado a partir del factor de concentración de la entalla  $K_t$ , que relaciona la carga aplicada con la tensión en la raíz de la entalla, la profundidad de la misma  $a$ , el factor de forma de una probeta compacta en forma de disco  $\phi$  [4], el tamaño  $W$  y el espesor  $B$ , y el factor aparente  $K_{ap}$  [25].

$$K_c^{V,R} = \frac{K_t}{2} \sqrt{\pi WR} \frac{B}{\varphi\left(\frac{a}{W}\right)} K_{ap} \quad (13)$$

Todas las geometrías estudiadas por Srinivas, se han modelizado con el método de los elementos finitos para calcular el factor de concentración  $K_t$ . Los valores obtenidos aparecen en la tabla 2

Manoharan y Lewandoski estudiaron el efecto del radio de curvatura en la rotura de un material

compuesto de matriz metálica. Una aleación de aluminio obtenida por metalurgia de polvos con refuerzo de partículas de carburo de silicio de 13  $\mu\text{m}$  de tamaño medio. La composición y las propiedades mecánicas del material, el límite elástico y la tenacidad aparecen en [26]. Ensayaron geometrías prismáticas 12.7x12.7x75 mm sometidas a flexión en tres puntos con radios de entalla de 0.06, 0.26 y 1 mm. Los factores de intensidad de tensiones generalizados se han obtenido a partir de la expresión (13).

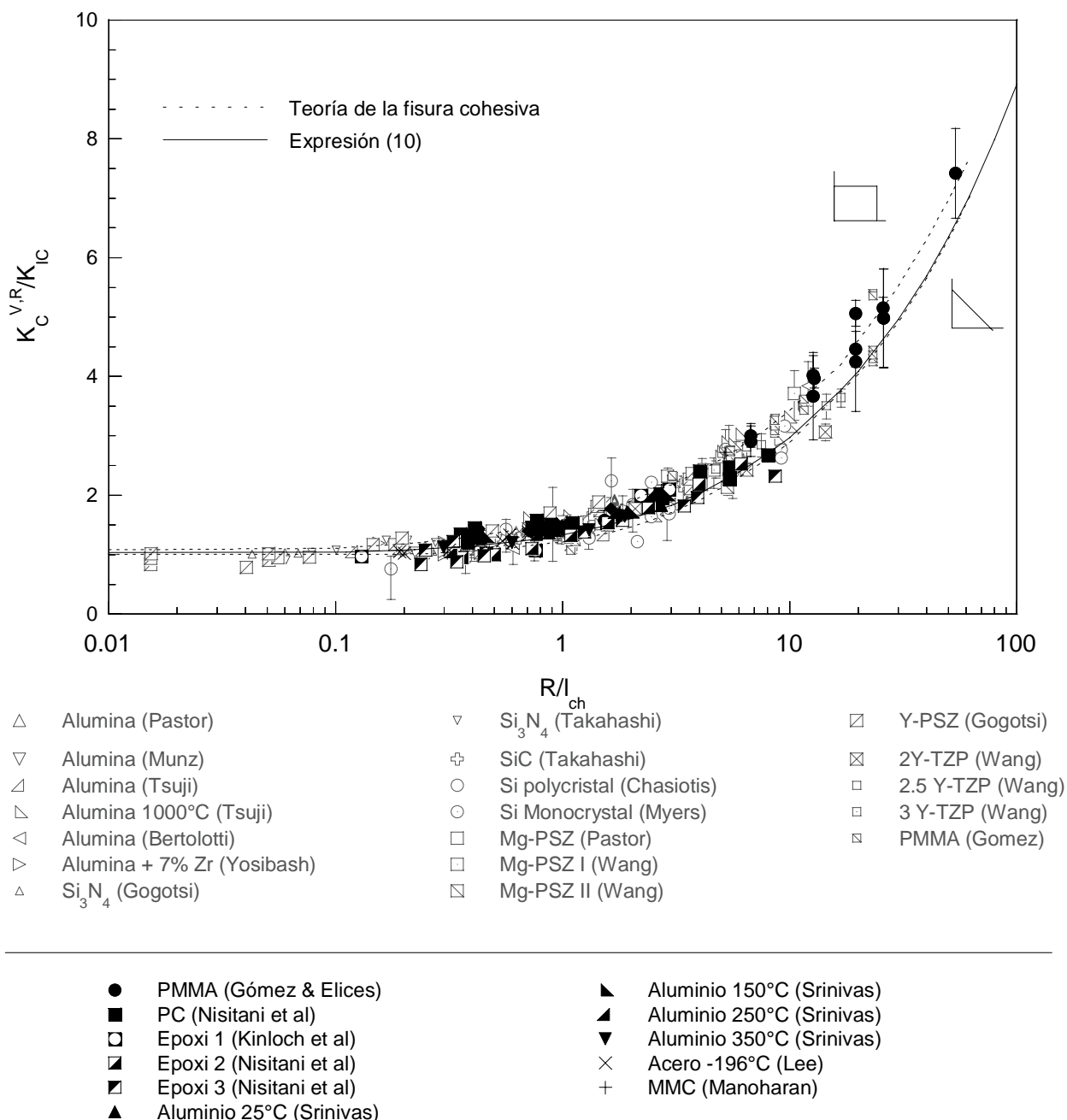


Figura. 1. Valores experimentales de la tenacidad generalizada adimensional en función del radio de entalla, junto a las predicciones del criterio de tensión media, y la teoría de la fisura cohesiva en materiales elásticos y elastoplásticos.

Tabla 2. Factores de concentración de tensiones de las probetas compactas en forma de disco.  $a/W=0.5$ .

$R$ (mm)	$K_t$
0.08	10.1
0.16	7.17
0.35	4.86
0.50	4.12

Lee, Jang y Kwon han analizado la rotura de geometrías entalladas de acero de vasijas A 508 [27] sometidas a temperatura de nitrógeno líquido ( $-196^{\circ}\text{C}$ ). Ensayaron probetas prismáticas de dimensiones  $10 \times 10 \times 55$  mm, con entallas donde la relación profundidad canto  $a/W$  fue de 0.5, y radios entre 0.06 y 0.28 mm. Los factores de intensidad de tensiones generalizados correspondientes se pueden calcular a partir de la expresión (13). Las propiedades mecánicas del acero a la temperatura de ensayo aparecen en la tabla 1.

La gráfica 1 muestra los factores de intensidad de tensiones adimensionales frente al radio adimensional de la entalla, para todos los materiales estudiados, junto a las predicciones de la teoría de la fisura cohesiva y la aproximación simplificada propuesta. Se observa como todos los resultados se concentran en una banda de rotura que coincide con las predicciones teóricas.

#### 4. CONCLUSIONES

Este trabajo aporta un procedimiento sencillo para estimar la carga de rotura de componentes entallados en forma de U, donde no es directamente aplicable la Mecánica de Fractura.

Se ha generalizado un criterio de rotura aplicable a entallas en U de materiales con rotura en régimen elástico y lineal a medios elastoplásticos, introduciendo una relación sencilla entre el límite elástico y la resistencia cohesiva del material. Los resultados obtenidos son válidos en modo I y en probetas cuyas dimensiones, excepto el radio de curvatura de la entalla son muy superiores a la longitud característica del material.

La aplicación del criterio de rotura requiere conocer exclusivamente dos propiedades mecánicas convencionales, el límite elástico y la tenacidad de rotura del material.

La aproximación utilizada está justificada por la evidencia experimental obtenida con materiales diferentes, polímeros (PMMA y policarbonato), cerámicos, metales (acero y aluminio) y materiales compuestos.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Ciencia la financiación recibida a través del proyecto ENE2005-06478.

#### REFERENCIAS

- [1] Gómez, F.J., and Elices, M., "A fracture criterion for blunted V-notched samples", *International Journal of Fracture*, 127, pag 239-264, 2004.
- [2] Gómez, F.J., and Elices, M., "Fracture loads for ceramic samples with rounded notches", *Engineering Fracture Mechanics*, 73, pag 880-894, 2006
- [3] Irwin, G.R., "Analysis of Stresses and Strain Near the End of a Crack Traversing Plate", *Journal of Applied Mechanics*, pag 361-364, 1957.
- [4] Elices M., "Mecánica de la Fractura aplicada a sólidos elásticos bidimensionales", Departamento de Ciencia de Materiales. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. U.P.M. 1996.
- [5] Gradin, P.A., "A fracture criterion for edge-bonded bi-material bodies", *Journal Composites Material*, 16, pag 448-456, 1982.
- [6] Carpinteri, A., "Stress singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners", *Engineering Fracture Mechanics*, 26, pag 143-155, 1987.
- [7] Creager, M., and Paris, P. C., "Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking", *International Journal of Fracture Mechanics*, 3, pag 247-252, 1967.
- [8] Lazzarin, P., and Tovo, R., "A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches", *International Journal of Fracture*, 78, pag 3-19, 1996.
- [9] Gómez, F.J., Elices, M., and Planas, M., "The cohesive crack concept: Applications to PMMA at  $-60^{\circ}\text{C}$ ", *Engineering Fracture Mechanics*, 72, pag 1268-1285, 2005.
- [10] Pastor, J. Y., *Fractura de materiales cerámicos avanzados*, Tesis doctoral, U.C.M., 1993.
- [11] Munz, D., Bubsey, R.T. and Shannon, J.L., "Fracture Toughness Determination of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  using four point bend specimens with straight-through and chevron notches", *Journal of American Ceramic Society*, 63, pag 300-305, 1980.

- [12] Tsuji, K., Iwase, K. and Ando, K., "An investigation into the location of crack initiation sites in alumina, polycarbonate and mild steel", *Fatigue, Fracture, Engineering Materials and Structures*, 22, pag 509-517, 1999.
- [13] Bertolotti, R. L., "Fracture Toughness of Polycrystalline Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>", *Journal of the American Ceramic Society*, 56, pag 107, 1973.
- [14] Yosibash, Z., Bussiba, A. and Gilad, I., "Fracture criteria for brittle elastic materials", *International Journal of Fracture*, 125, pag 307-333, 2004.
- [15] Gogotsi, G. A., "Fracture toughness of ceramics and ceramic composites", *Ceramics International*, 7, pag 777-784, 2003.
- [16] Ando, K., Iwasa, M., Kim, A., Chu, A. C. and Sato, S., "Effects of crack length, notch root radius and grain size on fracture toughness of fine ceramics", *Fatigue, Fracture, Engineering Materials and Structures*, 16, pag 995-1006, 1993.
- [17] Myers, R. J. and Hillberry, B.M., "Effect of notch radius in the fracture behaviour of monocrystalline silicon", *ICF4 Proceedings, Waterloo, Canada*, 3, pag 1001-1005, 1977.
- [18] Chasiotis, I. and Knauss, W.G., "The mechanical strength of polysilicon films: Part 2. Size effects associated with elliptical and circular perforations", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 51, pag 1551-1572, 2003.
- [19] Wang, J., Rainforth, W.M., Wadsworth, I. and Stevens, R., "The effects of notch width on the SENB toughness for oxide ceramics", *Journal of European Ceramic Society*, 10, pag 21-31, 1992.
- [20] Gómez, F.J., Guinea, G.V., and Elices, M., "Failure criteria for linear elastic materials with U-notches", *International Journal of Fracture*, (in press) 2006.
- [21] Gómez F.J., "Un criterio de rotura en sólidos entallados", *Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de Materiales, UPM* (1998).
- [22] Gómez F.J., Elices M. y Valiente A. "Cracking in PMMA containing U-shaped notches", *Fatigue Fracture Engineering Material and Structures*. 23, 795-803 (2000).
- [23] Nisitani, H. and Hyakutake H. "Condition for determining the static yield and fracture of a polycarbonate plate specimen with notches", *Engineering Fracture Mechanics*, 22, pag. 359-368, 1985.
- [24] Kinloch, A.J., and Young, R.J., *Fracture Behaviour of Polymers*, Elsevier Applied Science Publishers, 1983.
- [25] Srinivas, M., and Kamat, S.V., "Influence of temperature and notch root radius on the fracture toughness of a dispersion-strengthened aluminium alloy", *Fatigue Fracture Engineering Material and Structures*, 23, pag 181-183, 1999.
- [26] Manoharan, M., and Lewandowski, J.J., "Effect of microstructure and notch root radius on fracture toughness of an aluminium metal matrix composite", *International Journal of Fracture*, 40, pag R31-R34, 1989.
- [27] Lee, B.W., Jang, J., and Kwon, D., "Evaluation of fracture toughness using small notched specimens", *Materials Science and Engineering*, A334, pag 207-214, 2002.