

## DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE FIELTROS

Á. Ridruejo, C. González y J. LLorca<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciencia de Materiales, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, C/ Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid, España.  
aridruejo@mater.upm.es

### RESUMEN

Se presenta un modelo numérico para simular el comportamiento de un fieltro sometido a cargas en su propio plano. El fieltro se idealiza mediante una retícula bidimensional obtenida colocando fibras sobre un área rectangular sin orientación preferente. Las intersecciones de cada fibra con el resto de fibras del fieltro y con las fronteras del área constituyen los nodos del modelo. Aquellos nodos que pertenecen a una misma fibra se unen mediante elementos estructurales de tipo barra articulada. La interacción entre fibras que se cortan se simula mediante elementos que coaccionan la variación del ángulo entre ambas. Las cargas de las barras y los desplazamientos de los nodos se obtienen mediante un método de elementos finitos. Se discute el efecto de la rigidez de las uniones y, finalmente, se comparan los resultados con modelos simplificados para retículas elásticas que incluyen interacciones centrales y angulares.

### ABSTRACT

A numerical model has been developed to simulate the mechanical behaviour of a non-woven felt subjected to in-plane loads. The felt is modelled by a 2D mesh formed by random-oriented fibres on a rectangular area. Fibre-fibre and fibre-boundary intersections constitute the model nodes, which are connected by rod elements. Fibre interaction at joints is simulated using angular springs penalizing angle variation between rods. The finite element method provides nodal displacements and axial loads in the rods. Joint stiffness effects on the overall behaviour is examined and finally numerical results are compared with simplified elastic lattice models with central and angular interactions.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos analíticos y numéricos.

**PALABRAS CLAVE:** FielTROS, comportamiento mecánico, simulación.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los fieltros son materiales constituidos a partir de disposiciones no ordenadas de fibras, que quedan unidas entre sí mediante anclajes de distinta naturaleza, que pueden ir desde la simple imbricación de las fibras hasta la fusión de las mismas, dependiendo del material o de la técnica de procesado. Las propiedades mecánicas de estos materiales en términos de resistencia máxima son moderadas, pero su gran capacidad de deformación, superficie específica y ligereza han ampliado su campo de aplicación a la protección frente a impactos, como materiales aislantes, textiles ignífugos o absorbentes y geotextiles para refuerzo de suelos. Un ejemplo especialmente importante de fieltro es el papel. Se trata de un fieltro de fibras de celulosa imbricadas y unidas mediante puentes de hidrógeno. Más recientemente, desde el punto de vista científico, el estudio de los fieltros ha cobrado interés por su analogía estructural con muchos tejidos biológicos o con el descubrimiento de fibras apenas manipulables con las tecnologías actuales, como los nanotubos de carbono.

Los primeros modelos de comportamiento mecánico para fieltros nacen al amparo de la comunidad científica del papel. Así, Cox [1] desarrolló un modelo analítico

de deformación afin para predecir las constantes elásticas de un fieltro formado por fibras rectas indefinidas perfectamente unidas sin interacción entre ellas. Sin embargo, los fieltros reales se fabrican con fibras de longitud finita depositadas aleatoriamente y cuya geometría dista de ser recta. Autores como Kallmes y Corte [2] estudiaron la geometría de redes bidimensionales idealizadas, y a partir de ella, desarrollaron un modelo estadístico de las propiedades elásticas a partir de tres parámetros: el número de intersecciones totales entre fibras, el número medio de intersecciones por fibra, y una longitud libre media entre intersecciones.

En los últimos años han aparecido algunos análisis numéricos [3] basados en las aportaciones de Kallmes y Corte. Sin embargo, las predicciones de estos modelos, como relatan Berhan *et al* [4], aunque adecuadas para ciertos materiales bien conocidos (Heyden, [5]), predicen rigideces varios órdenes de magnitud superiores a los valores experimentales de manera sistemática en fieltros formados por nanotubos de carbono. Estos autores, si bien ofrecen una explicación basada en el número efectivo y tipología de las uniones, no llegan a explicar de forma completamente

satisfactoria el fenómeno. Entre los factores restantes, en la literatura se menciona el posible efecto de la curvatura inicial de las fibras.

Los modelos numéricos han supuesto un claro avance en la comprensión del comportamiento mecánico de los fieltros, pero en numerosas ocasiones descansan sobre suposiciones *ad hoc* y parámetros de ajuste no siempre bien caracterizados. Para tratar de salvar este escollo existe la posibilidad de aplicar métodos analíticos basados en redes regulares. La simplificación que introduce la hipótesis de periodicidad respecto una malla de geometría aleatoria es considerable, pero permite esclarecer el efecto de las distintas variables y validar las predicciones numéricas más allá de la simplicidad del modelo de Cox. No obstante, la validez de estos modelos en su aplicación a la descripción del comportamiento mecánico de fieltros no está todavía suficientemente establecida.

En este artículo se tratarán de determinar mediante un modelo de elementos finitos bidimensional las propiedades elásticas de un fieltro plano con orientación aleatoria de las fibras, prestando especial atención a la curvatura inicial de las fibras y comparando en los casos oportunos con modelos analíticos de red periódica.

## 2. MODELO NUMÉRICO

### 2.1 Generación de la malla

El fieltro se ha modelizado mediante una retícula formada por la superposición de N fibras de longitud indefinida y sección transversal constante A que se depositan sobre un área rectangular de lados BxH, Fig. 1. La posición geométrica de una fibra dentro del tejido queda definida a partir de las coordenadas de su centro geométrico (x<sub>c</sub>, y<sub>c</sub>) y el ángulo θ que forma con respecto al eje de aplicación de la carga.

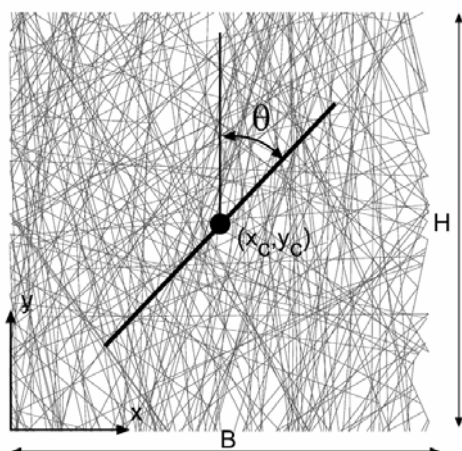


Figura 1. Red bidimensional que representa el fieltro y definición de la posición de una fibra.

El proceso de generación de la retícula es estocástico. Se generan 3 números aleatorios. Dos de ellos servirán para determinar las coordenadas del centro geométrico de la fibra (x<sub>c</sub>, y<sub>c</sub>) y el tercero para obtener el ángulo θ definido más arriba. Por simplicidad se ha supuesto que la distribución de fibras es homogénea e isotrópica. Se lanza la fibra i-ésima y se calcula la intersección de esta fibra con el resto de fibras del modelo que ya han sido lanzadas (dependiendo de su posición y orientación la intersección puede no existir). Cada intersección de las fibras constituye un nodo del modelo.

La densidad del fieltro, ρ, se calcula como cociente entre la cantidad total de fibra depositada L<sub>T</sub> y el área de la retícula BxH,

$$\rho = \frac{L_T}{BH} \quad (1)$$

Kallmes y Corte demostraron matemáticamente que la longitud del fragmento de fibra entre dos nodos consecutivos de la misma se podía calcular para el caso de una distribución isotrópica de fibras según

$$L = \frac{1}{2} \frac{\pi BH}{L_T} \quad (2)$$

que permite, en combinación con la ecuación (1), obtener la relación entre la densidad de la retícula y el tamaño medio del fragmento de fibra de la misma.

$$L = \frac{\pi}{2\rho} \quad (3)$$

El número de fibras utilizado en los modelos satisface dos limitaciones. En primer lugar, la estructura debe estar suficientemente interconectada. Si el fieltro no es suficientemente denso, las fibras no serán capaces de transmitir cargas entre sí, alcanzándose el límite de percolación. Por otra parte, el tamaño de la retícula es un compromiso entre una adecuada representación de los mecanismos de deformación del tejido y los recursos computacionales disponibles.

### 2.2 Tipología de los elementos

Para simular el comportamiento elástico de un fieltro de fibras se utilizó el método de los elementos finitos. Cada nodo de la retícula posee dos grados de libertad en los desplazamientos en las direcciones x e y, respectivamente. Dos nodos consecutivos de una misma fibra se unen mediante elementos de tipo barra articulada con una sección transversal A y un módulo elástico E<sub>f</sub>. Estos elementos son los encargados de transmitir las cargas en la dirección de la propia fibra.

Además se insertan elementos de tipo muelle para permitir la interacción angular entre las fibras del fieltro. Los elementos elegidos son muelles que se encargan de penalizar la variación del α entre dos barras que convergen a un mismo nodo y pertenecen a fibras

distintas. Las fuerzas introducidas por los elementos muelle se calculan suponiendo que la energía elástica almacenada procede de un potencial elástico  $W = \frac{1}{2} K(\alpha - \alpha_0)$ , donde  $K$  es la constante de rigidez del muelle. Este tipo de elementos se introduce para simular la unión elástica que existe en el anclaje entre las fibras debido al proceso de fabricación del fieltro.

**2.2 Estructura de las simulaciones**

El modelo de elementos finitos descrito en el apartado anterior se utilizó para obtener las propiedades elásticas de fieltros de fibras indefinidas. El módulo elástico y el coeficiente de Poisson del fieltro se obtuvieron imponiendo un estado de tracción uniaxial en la dirección  $y$  y a una retícula de tamaño arbitrario  $1 \times 1$ . En este caso, los desplazamientos verticales de los nodos situados en el extremo inferior del fieltro ( $y=0$ ) fueron restringidos mientras que se impusieron desplazamientos pequeños y arbitrarios,  $\delta$ , en los nodos situados en el extremo superior de la retícula ( $y=H$ ). Las deformaciones de la retícula en las dos direcciones del espacio,  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ , se calcularon mediante derivación de un campo de desplazamientos lineal obtenido por ajuste de mínimos cuadrados a los desplazamientos calculados numéricamente con el método de los elementos finitos. El coeficiente de Poisson de la retícula se obtuvo a partir del cociente entre las dos deformaciones anteriormente calculadas.

Finalmente, el módulo elástico del fieltro se calculó a partir de las reacciones verticales aparecidas en los nodos situados en el extremo superior ( $y=H$ ) y la deformación vertical  $\epsilon_y$  del fieltro.

**3. MODELOS ANALÍTICOS**

En la presente sección introduciremos los modelos analíticos más sencillos para representar el comportamiento elástico de fieltros de fibras con el objetivo de su comparación posterior con las simulaciones realizadas mediante el método de los elementos finitos presentados en el apartado anterior.

**3.1 Modelo de Cox**

El modelo de Cox [], elaborado inicialmente para estudiar el comportamiento mecánico del papel, describe el comportamiento de un fieltro formado por fibras rectas e indefinidas y sin interacción entre sí. Cox asumió que la deformación del fieltro es uniforme y demostró que las constantes elásticas en el caso de una distribución homogénea de fibras en todas las direcciones del plano respondían a las de un sólido un sólido elástico e isotropo cuyo módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson son, respectivamente,

$$E = \frac{1}{3} E_f A \rho \tag{4}$$

$$\nu = \frac{1}{3} \tag{5}$$

Donde  $\rho$  es la densidad de la retícula,  $E_f$  el módulo elástico de las fibras y  $A$  el área de su sección transversal.

El modelo de Cox, por hipótesis de partida, no reproduce la inhomogeneidad de la deformación en un fieltro de fibras rectas pero mantiene su vigencia como modelo de referencia en el caso de un fieltro de fibras rectas e indefinidas sin interacción entre fibras.

**3.2 Modelo de retícula cuadrada con interacción angular entre fibras.**

El siguiente modelo analítico permite introducir interacciones angulares entre las fibras para el caso particular de una configuración geométrica sencilla, Figura 2. Se propone una red regular formada por una celda unidad cuadrada formada por cuatro barras elásticas de longitud  $L/2$  y sección transversal  $A$  que se encuentran articuladas en su nodo de unión. La densidad geométrica de la retícula así formada es  $\rho = 2/L$ . La interacción angular entre las barras se simula insertando elementos de tipo muelle elástico de constante  $K$  que se encargan de penalizar la variación del ángulo recto entre barras.

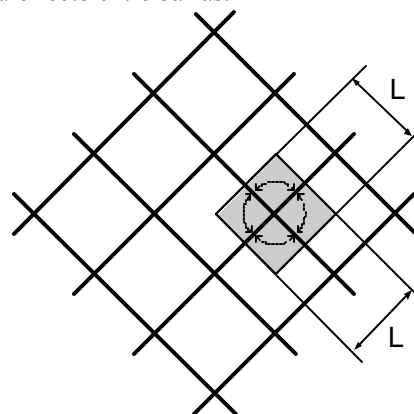


Figura 2. Red cuadrada.

En este caso, el comportamiento elástico de la retícula resultante presenta las simetrías correspondientes a un material con simetría cúbica en el que el módulo elástico y el coeficiente de Poisson son, respectivamente

$$E_x = E_y = 16 \frac{\chi}{(1 + 8\chi)} E_f A \rho \tag{6}$$

$$\nu_{xy} = \frac{1 - 8\chi}{1 + 8\chi} \tag{7}$$

Donde  $\chi$  es un parámetro adimensional que mide la rigidez relativa entre los mecanismos de deformación axial y de interacción angular entre fibras

$$\chi = \frac{K}{E_f AL} \tag{8}$$

La expresión (7) permite evaluar con facilidad los límites superior e inferior para el coeficiente de Poisson de un material representado por una retícula cuadrada. En este caso, cuando  $\chi \rightarrow 0$ , la rigidez axial de las fibras predomina sobre la interacción angular de las mismas y el coeficiente de Poisson tiende a la unidad. La interacción angular es despreciable y la retícula se pliega sobre sí misma convirtiéndose en un mecanismo formado por cuatro barras articuladas en el nudo central. Sin embargo, cuando la rigidez de los muelles predomina sobre la rigidez axial de la fibra,  $\chi \rightarrow \infty$ , no se permite que los ángulos entre éstas varíen y el coeficiente de Poisson tiende hacia -1.

3.2 Modelo de retícula triangular con interacción angular entre fibras.

Consideremos ahora una red triangular y equilátera, Figura 3. Al igual que en el caso anterior, las barras son rectas de longitud  $L/2$  y se encuentran articuladas en su vértice de unión. De igual forma se insertan muelles elásticos de constante  $K$  que penalizan la variación del ángulo entre fibras.

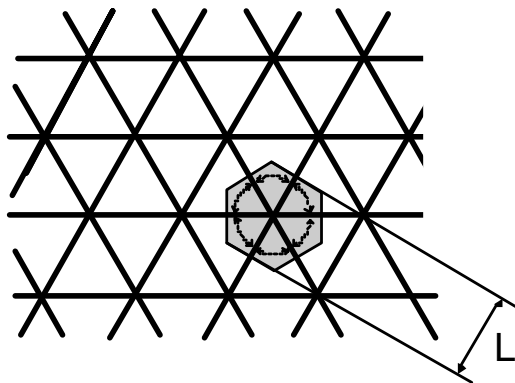


Figura 3. Red triangular.

En este caso, la densidad geométrica de la retícula se puede calcular como  $\rho = \sqrt{3}/L$ . Ostoja-Starzewski [12] obtuvo las constantes elásticas de este tipo de retícula observando en su caso un comportamiento perfectamente isótropo con un módulo elástico y un coeficiente de Poisson iguales a

$$E = \frac{1}{3} \frac{1+3\chi}{1+\chi} E_f A \rho \tag{9}$$

$$\nu = \frac{1-3\chi}{3+3\chi} \tag{10}$$

Se puede comprobar que, en este caso, los límites del coeficiente de Poisson de la retícula varían entre 1/3 cuando  $\chi \rightarrow 0$  y la interacción angular es despreciable y -1 cuando la rigidez de los muelles predomina sobre la rigidez axial de la fibra.

4. RESULTADOS

4.1 Efecto de la densidad

De cara a ilustrar el comportamiento mecánico de este tipo de estructura resulta interesante estudiar la variación del módulo elástico y del coeficiente de Poisson según la densidad para distintos valores de la constante de muelle torsional. Se han seleccionado los valores de  $k = 1 \times 10^{-3}$ ,  $k = 1$  y  $k = 1 \times 10^3$  Nm para poder barrer un amplio intervalo de posibilidades y comparar así con los distintos modelos analíticos. El primer modelo analítico considerado es el correspondiente a una red cuadrada como la mostrada en la Figura 4. La celda unidad de esta red posee un área igual a  $L^2$  y una densidad  $\rho = 2/L$ . Esta relación nos permite calcular el parámetro de red equivalente para cada malla del modelo numérico.

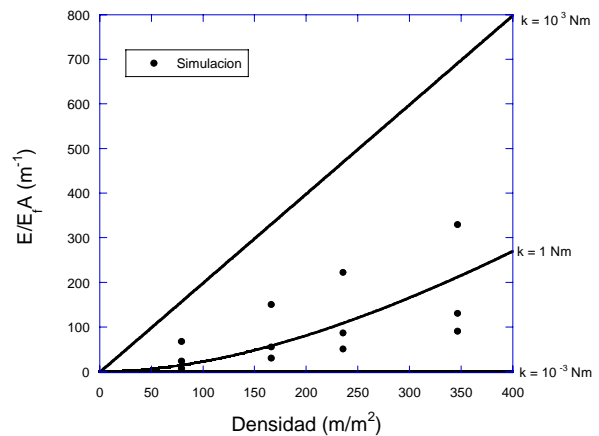


Figura 4. Módulo elástico según la densidad para varios valores de la constante de muelle. Comparación con el modelo de red cuadrada.

Podemos comprobar cómo este modelo tiende a sobrestimar el módulo elástico para las constantes de muelle elevadas. Como era de esperar, unos valores muy reducidos para la constante de muelle ( $k = 10^{-3}$  Nm) convierten esta retícula en un mecanismo, de tal forma que es incapaz de transmitir carga.

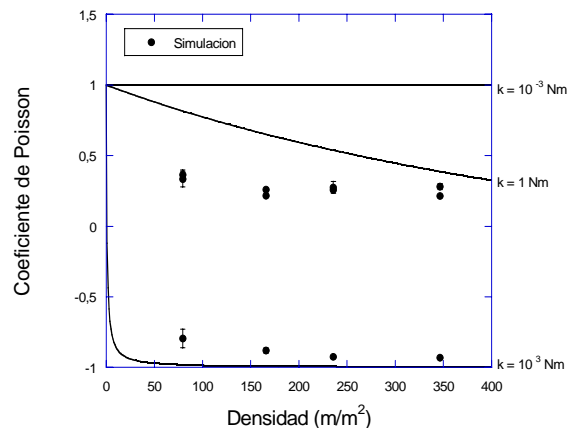


Figura 5. Coeficiente de Poisson en función de la densidad para varios valores de la constante de muelle. Comparación con modelo de red cuadrada.

Este comportamiento característico de la red cuadrada queda patente al observar la figura 5. De acuerdo con la ecuación (7), el coeficiente de Poisson presentará valores entre  $\nu = 1$  (mecanismo) y  $\nu = -1$  (deformación autosemejante). La transición de uno a otro régimen en función de la densidad es tanto más acentuada cuanto mayor es la constante de muelle.

Análogamente, para el modelo de red triangular la malla considerada es la de la figura 3, que presenta, como se mencionaba antes, una densidad  $\rho = \sqrt{3}/L$ . Los resultados se muestran en la figura 6.

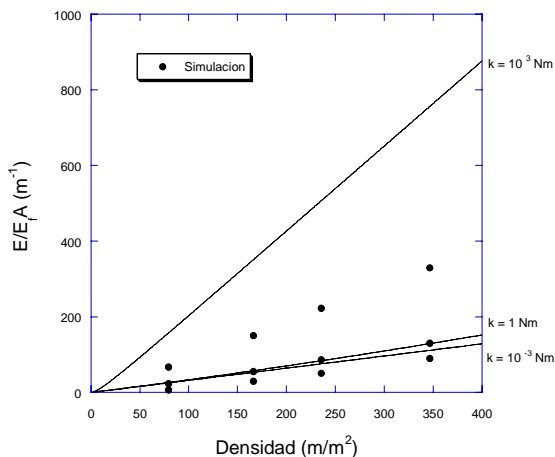


Figura 6. Módulo elástico según la densidad para varios valores de la constante de muelle. Comparación con el modelo de red triangular.

En esta ocasión, un valor pequeño de la constante  $k$  no implica la incapacidad para transmitir esfuerzos. La red triangular presenta un “suelo” en los valores del módulo de elasticidad que está muy próximo tanto al valor correspondiente para una  $k$  tres órdenes de magnitud mayor como para los valores experimentales (y adicionalmente al modelo de Cox). De hecho, la mayoría de valores realistas de  $k$  se encuentran en una banda entre ambas cantidades (de  $k=10^{-3}$  a  $k=1$  Nm). Por otro lado, el modelo numérico no alcanza la rigidez prevista cuando la constante de muelle es muy grande.

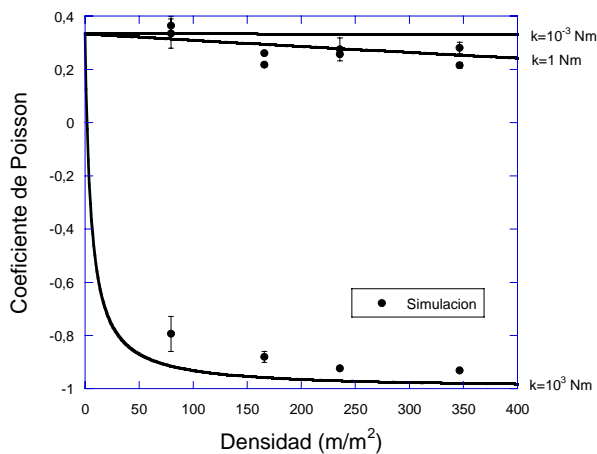


Figura 7. Coeficiente de Poisson según la densidad para varios valores de  $k$ . Comparación con el modelo de red triangular

Comprobamos ahora cómo el máximo valor alcanzable para el coeficiente de Poisson para un modelo de red triangular es de  $\nu = 1/3$ . El fieltro siempre es capaz de transmitir cargas, aun para valores muy pequeños de la constante de muelle torsional. Los resultados de la simulación se aproximan más al modelo de red triangular que al de red cuadrada

#### 4.2 Discusión

Una vez establecidas las características según la densidad de cada modelo, resulta interesante reconstruir la imagen y presentar una visión de conjunto. Para ello, podemos adimensionalizar por un lado el módulo de elasticidad dividiendo por  $E_r A \rho$ , de tal manera que el modelo de Cox sea simplemente igual a  $1/3$ , y por otro lado representarlo en función del parámetro adimensional  $\chi$ , análogamente a la expresiones (6-11).

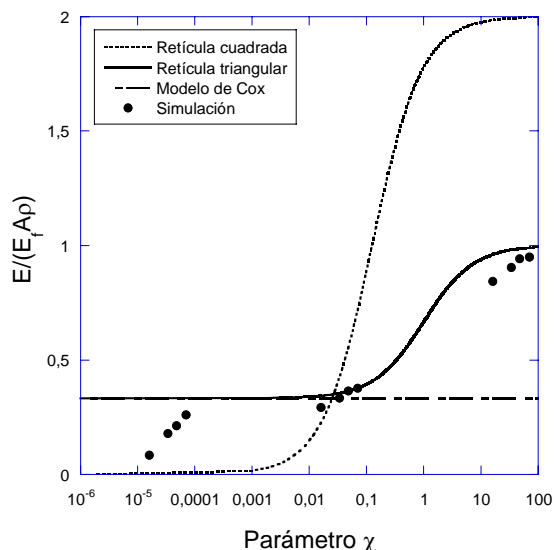


Figura 8. Módulo elástico adimensionalizado en función del parámetro  $\chi$ . ( $\chi=k/(E_r A L)$ )

En la figura 8 se pueden apreciar claramente los límites de los distintos modelos. Cuando  $\chi$  tiende a cero, lo que representa interacciones débiles entre fibras, el modelo de retícula cuadrada es incapaz de transmitir esfuerzo, mientras que el modelo de Cox supone un límite inferior para la red triangular. En el régimen opuesto (grandes interacciones), el modelo de red cuadrada resulta ser más rígido que el de red triangular.

Los resultados de las simulaciones se ajustan muy bien a las predicciones del modelo de red triangular, salvo cuando  $\chi$  es pequeño, por efectos numéricos. Para estos valores bajos de  $\chi$ , la reducida rigidez de las barras en pequeñas deformaciones hace que la matriz de rigidez del método de elementos finitos tienda ser singular, y el modelo considera que el fieltro es como un mecanismo. Por ello sus valores caen entre la curva de la retícula cuadrada y los correspondientes al modelo de Cox y de retícula triangular.

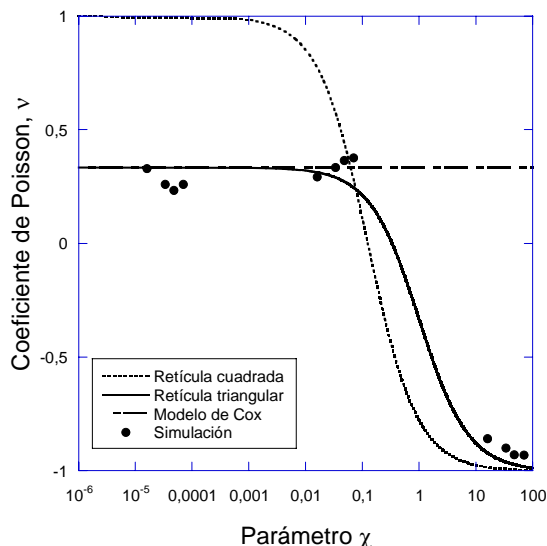


Figura 9. Coeficiente de Poisson en función del parámetro  $\chi$ . ( $\chi=k/(E_fAL)$ )

La figura 9 muestra el coeficiente de Poisson en función del parámetro  $\chi$ . Como se ha mencionado anteriormente, el modelo de red cuadrada toma valores entre 1 y -1, mientras que el de red triangular lo hace entre 1/3 y -1. Los valores obtenidos mediante el cálculo con elementos finitos se ajustan a la pauta del modelo de retícula triangular.

### 5. CONCLUSIONES

Los fieltros son materiales constituidos por configuraciones desordenadas de fibras. La variedad de fibras de las que pueden estar confeccionados, así como los distintos tipos de uniones entre ellas hacen necesario su estudio no tanto como material sino como una estructura compleja, cuyas propiedades mecánicas dependen tanto de los constituyentes como de la geometría del conjunto.

Los métodos numéricos son los candidatos idóneos para dar respuesta a este reto, pero requieren una adecuada validación y una cuidadosa definición de los parámetros relevantes. Los métodos analíticos contribuyen a esclarecer la situación. Se ha comprobado que el modelo numérico desarrollado se ajusta a las predicciones del modelo de Cox en el régimen de validez de éste. Añadir interacciones angulares entre fibras introduce una considerable complejidad al comportamiento de los fieltros. Los modelos de red periódica, no aplicados hasta ahora en fieltros, han demostrado ser útiles para predecir la dinámica de deformación y esclarecer la influencia de la rigidez del muelle angular sobre las constantes elásticas a pesar de la fuerte idealización que suponen.

Finalmente, el modelo numérico, isótropo por la aleatoriedad de la orientación de las fibras, muestra notable acuerdo con los modelos analíticos, en especial con el de red triangular (que presenta isotropía por la orientación a 60° de sus barras) siempre que la interacción entre fibras supere cierto umbral. Tanto uno

como otro parecen adecuados para describir el comportamiento mecánico de los fieltros en pequeñas deformaciones

### REFERENCIAS

[1] H.L. Cox, *British Journal of Applied Physics*, **3**, 72-79 (1952).

[2] O. Kallmes y H. Corte, *Tappi*, **43**, 737-752 (1960).

[3] C. A. Bronkhorst, *Int. J. of Solids and Structures*, **40** (2003) 5441-5454

[4] L. Berhan, Y.B. Yi, A.M. Sastry, E. Munoz, M. Selvidge and R. Baughman, *Journal of Applied Physics*, **95**-8 (2004) 4335-4345

[5] S. Heyden, Tesis Doctoral. Lund University (2000).

[6] J. A. Åström y K.J. Niskanen, *Europhys Lett.*, **21**, 557-562 (1993).

[7] C. González, J. LLorca, I. Romero, *Anales de Mecánica de Fractura*, **20** (2003) 89-94.

[8] C. González, J. LLorca, *Int. J. of Solids and Structures*, **42** (2005) 1537-1545

[9] IRIS, Ignacio Romero. Dpto. de Mecánica de Medios Continuos. Universidad Politécnica de Madrid.

[10] K. Li et al., *Int. J. of Solids and Structures*, **42** (2005) 1777-1795

[11] A. Ridruejo, C. González, J. LLorca, *Anales de Mecánica de Fractura*, **22** (2005) 327-333

[12] M. Ostoja-Starzewski, *Appl. Mech. Rev.*, **55** (1) (2002) 35-60