

**FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES Y PROPAGACIÓN DE FISURAS POR FATIGA EN GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS**

**N. Álvarez<sup>1</sup>, B. González<sup>1</sup>, J.C. Matos<sup>2</sup>, J. Toribio<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Ingeniería de Materiales, Universidad de Salamanca  
E.P.S., Campus Viriato, Avda. Requejo 33, 49022-Zamora, España.  
Correo-e: toribio@usal.es  
Tfno: 980 54 50 00 Ext. 3673. Fax: 980 54 50 02

<sup>2</sup>Departamento de Informática y Automática, Universidad de Salamanca  
E.P.S., Campus Viriato, Avda. Requejo 33, 49022-Zamora, España.  
Correo-e: jcmatos@usal.es

**RESUMEN**

En este artículo se analizan comparativamente distintas soluciones numéricas para el factor de intensidad de tensiones adimensional en geometrías cilíndricas fisuradas transversalmente, sometidas a cargas de tracción axiales, obtenidas por otros autores mediante diferentes métodos. Las soluciones se comparan en los valores del centro del frente de fisura y en el punto de contacto con la superficie del cilindro, estudiando un amplio abanico de factores de forma y profundidades de fisura relativas, con el fin de disponer de soluciones aplicables a distintos problemas ingenieriles.

**ABSTRACT**

In this paper different stress intensity factor solutions numerically obtained by previous researchers on transversely cracked cylinders under tensile loading are analyzed. Solutions are compared in the matter of stress intensity values at the center of the crack front and at the external surface of the cylinder, and a wide range of crack aspect ratios and relative crack depths are studied, in order to provide the engineer with solutions applicable to different real situations.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Aplicaciones Prácticas en Ingeniería.

**PALABRAS CLAVE:** Factor de intensidad de tensiones, Cilindro fisurado, Fatiga.

**1. INTRODUCCIÓN**

Las formas cilíndricas como tornillos, ejes, bulones, pernos o alambres, son muy abundantes en el campo de la Ingeniería Estructural. En ellas, la fatiga es una de las principales causas del crecimiento de fisuras junto con la corrosión bajo tensión y la corrosión-fatiga, y produce fisuras de forma almendrada en la sección transversal.

La caracterización del crecimiento de estas fisuras por fatiga, -cuyo frente de fisura ha sido comúnmente caracterizado como recto, circular, o elíptico con centro en el borde del alambre-, implica el necesario conocimiento del factor de intensidad de tensiones (FIT) adimensional, *Y*. Este ha sido obtenido por varios autores bajo diferentes condiciones de carga (tracción, torsión y flexión) y deducidos a partir de distintos procedimientos: método de flexibilidad, elementos finitos, análisis de la integral de contorno, técnicas experimentales, etc.

El presente trabajo pretende reunir y comparar soluciones del FIT adimensional para estas geometrías sometidas a carga de tracción axial, mediante una revisión bibliográfica [1] de los autores más relevantes.

**2. PROPAGACIÓN DE FISURAS**

En el crecimiento de fisuras por fatiga se han seguido diversos criterios (como el isoparamétrico, ángulo de intersección recto [2]), pero cuando se está bajo la ley de Paris debe cumplirse, en el crecimiento entre cualesquiera puntos *P* e *I* de la superficie de fisura,

$$\frac{da(P)}{da(I)} = \left[ \frac{\Delta K_I(P)}{\Delta K_I(I)} \right]^m = \left[ \frac{Y(P)}{Y(I)} \right]^m \tag{1}$$

Considerándose además, que el crecimiento siempre es en dirección perpendicular al frente de fisura (Figura 1). Por lo tanto es fundamental, para calcular el crecimiento de fisuras por fatiga, conocer como varía el factor de intensidad de tensiones adimensional a lo largo del frente de fisura [3-7].

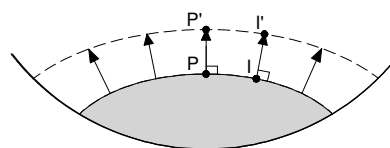


Figura 1. Crecimiento de fisuras por fatiga.

3. FIT ADIMENSIONAL

En el caso de una barra cilíndrica sometida a carga de tracción axial y con una fisura contenida en su sección transversal, considerando la Mecánica de Fractura tridimensional, el factor de intensidad de tensiones adimensional en modo I depende de la geometría de la fisura, la profundidad de la misma y la posición sobre el borde de la fisura (Figura 2).

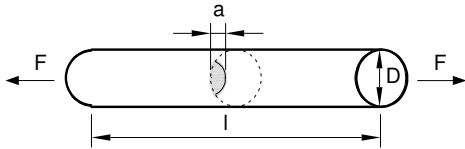


Figura 2. Barra con fisura sometida a tracción.

A. Valiente [8] formuló dos soluciones en el centro de la fisura partiendo de un modelo de frente recto bajo carga axial. Las expresiones obtenidas del FIT adimensional dependen sólo de la profundidad de fisura relativa  $\xi=a/D$  (Figura 3).

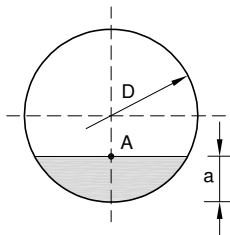


Figura 3. Caracterización fisuras (Valiente).

En la primera solución se evaluó la flexibilidad de la probeta y se calculó la tasa de liberación de energía, obteniéndose el FIT adimensional siguiente:

$$Y = (0.473 - 3.286\xi + 14.797\xi^2)^{\frac{1}{2}} (\xi - \xi^2)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Para la otra solución propuesta utilizó el método de la rigidez diferencial a partir de una extensión virtual local de la fisura, alcanzando la siguiente expresión:

$$Y = 1.4408 - 3.6364\xi + 19.3500\xi^2 - 34.7849\xi^3 + 36.8446\xi^4 \quad (3)$$

M. A. Astiz [9] obtuvo la tasa de liberación de energía mediante el método de extensión virtual de fisura y calculó el factor de intensidad de tensiones bajo la hipótesis de deformación plana.

Construyó una malla tridimensional de elementos finitos con 325 nodos y 216 elementos, simulando un cuarto de una barra con una fisura de geometría elíptica con centro en el borde de la barra y carga en tracción. En el cálculo utilizó dos mallas geoméricamente idénticas: una con elementos estándar isoparamétricos hexaédricos y prismáticos, y la otra con elementos prismáticos singulares y elementos cúbicos no-compatibles.

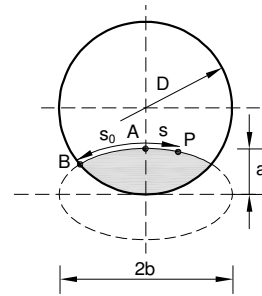


Figura 4. Caracterización fisuras (Astiz).

Los casos calculados fueron  $a/D = 0.057, 0.100, 0.143, 0.200, 0.257, 0.314, 0.371, 0.429, 0.486$ ;  $alb = 0.0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$  (45 geometrías) y  $s/s_0 = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$  (Figura 4). Para  $s/s_0=0$  el autor realizó un ajuste de los datos a una superficie de interpolación polinómica, usando el método de mínimos cuadrados, con coeficientes  $C_{ij}$  (Tabla 1), obteniendo la expresión:

$$Y = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^3 C_{ij} (a/D)^i (a/b)^j \quad (4)$$

Tabla 1. Coeficientes de Astiz,  $C_{ij}$ .

$i \setminus j$	0	1	2	3
0	1.118	-0.171	-0.339	0.130
2	1.405	5.902	-9.057	3.032
3	3.891	-20.370	23.217	-7.555
4	8.328	21.895	-36.992	12.676

A. Carpinteri [10,11] calculó el FIT adimensional para fisuras de frente recto y arco de elipse a partir de la tensión normal de apertura,  $\sigma_y$ , calculada mediante elementos finitos tridimensionales isoparamétricos de 20 nodos. Simuló la singularidad de la raíz cuadrada de la tensión y deformación en la punta de la fisura, moviendo los nodos centrales cercanos al frente de fisura a la posición de un cuarto.

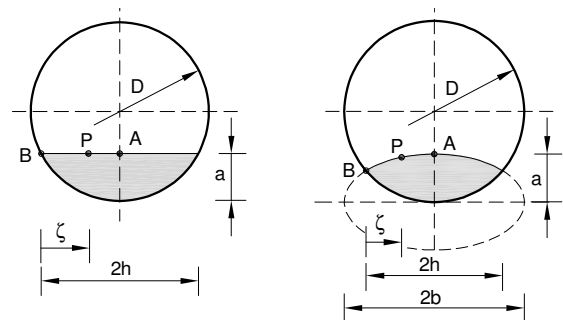


Figura 5. Caracterización fisuras (Carpinteri).

El autor representó un cuarto de la geometría con 548 nodos y 84 elementos para la fisura de frente recto y 1175 nodos y 210 elementos para frente curvo. En la modelización  $\zeta=a/D$  varió desde 0.1 a 0.6 en intervalos de 0.1 y  $alb$  entre 0.0 y 1.0 en intervalos de 0.2 (42 geometrías). Los valores en el punto B de la Figura 5 se corresponden con los calculados en  $\zeta/h=0.1$ , punto muy próximo al extremo. A partir de los resultados obtenidos por Carpinteri, Shih y Chen [5] realizaron sendos ajustes para el centro y borde de la fisura (A y B).

$$Y_A = 0.67 - 0.033(a/b) + 5.73(a/D) - 0.29(a/b)^2 - 2.943(a/b)(a/D) - 22.692(a/D)^2 + 2.41(a/b)^2(a/D) + 10.684(a/b)(a/D)^2 + 49.34(a/D)^3 - 8.82(a/b)^2(a/D)^2 \quad (5)$$

$$Y_B = 0.455 - 0.233(a/b) + 4.893(a/D) + 0.113(a/b)^2 + 0.197(a/b)(a/D) - 21.03(a/D)^2 + 0.557(a/b)^2(a/D) + 3.134(a/b)(a/D)^2 + 49.497(a/D)^3 - 5.415(a/b)^2(a/D)^2 - 1.124(a/b)(a/D)^3 - 24.702(a/D)^4 \quad (6)$$

A. Levan y J. Royer [2] calcularon el FIT adimensional para varillas con fisuras transversales de forma circular, a partir de la ecuación de la integral de contorno desarrollada para problemas de fractura. La fisura y la superficie lateral fueron discretizadas con elementos finitos isoparamétricos bidimensionales de 6 y 8 nodos, utilizando elementos con nodos a un cuarto a lo largo del frente de fisura.

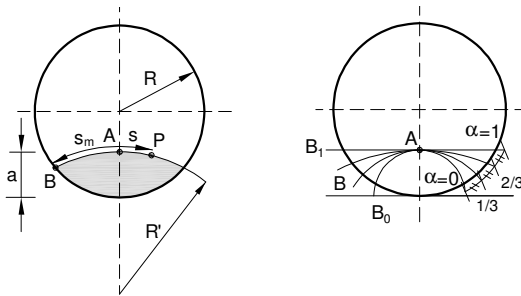


Figura 6. Caracterización fisuras (Levan y Royer).

El parámetro  $\alpha = (B_0B/B_0B_1)$  indica la curvatura del frente de fisura (Figura 6) y está comprendido entre 0 y 1. Se realizaron modelizaciones para  $\alpha$  igual a 0, 1/3, 2/3, 1 y  $a/R$  igual a 0.04, 0.12, 0.24, 0.40, 0.60, 0.85 (24 geometrías). Usando el método de mínimos cuadrados ajustaron los valores discretos a una forma polinómica, resultando los coeficientes  $C_{ijk}$  (Tabla 2). La expresión obtenida, válida para  $0 \leq a/R \leq 0.9$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$ , es:

$$Y = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0,2,4,6} C_{ijk} (a/R)^i \alpha^j (s/s_m)^k \quad (7)$$

Tabla 2. Coeficientes de Levan y Royer,  $C_{ijk}$ .

$i$	$j \setminus k$	0	2	4	6
0	0	0.66837	-0.12819	0.65362	-0.63476
0	1	1.4917	-1.5181	1.7418	-3.6700
0	2	-1.7108	3.4585	-11.730	14.317
0	3	0.67685	-2.2663	8.5036	-9.3203
1	0	0.027839	1.7235	-6.2703	6.4590
1	1	-8.1658	17.088	-47.996	57.275
1	2	18.184	-51.812	189.23	-204.58
1	3	-10.094	34.890	-134.13	139.02
2	0	0.37008	-4.8335	18.126	-18.218
2	1	15.716	-33.545	94.702	-114.49
2	2	-40.103	111.48	-401.24	432.53
2	3	23.819	-77.165	291.88	-301.35
3	0	0.18566	4.0254	-13.204	13.326
3	1	-7.6417	16.116	-37.988	50.833
3	2	23.886	-59.707	203.96	-224.29
3	3	-13.916	42.030	-156.16	162.11

N. Couroneau y J. Royer [4] realizaron un análisis mediante elementos finitos de un cuarto de la geometría, usando elementos tridimensionales isoparamétricos de 15 y 20 nodos. Los nodos de la mitad del lado adyacente al frente de fisura fueron desplazados a la posición de un cuarto, para inducir la singularidad de la raíz cuadrada del campo de desplazamiento.

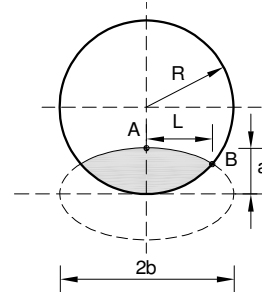


Figura 7. Caracterización fisuras (Couroneau y Royer).

Para obtener el FIT adimensional utilizaron un método de extrapolación, a partir del desplazamiento de los nodos del frente de fisura, y considerando un estado de deformación plana. Los resultados del punto B se refieren a una zona del frente muy cercana al borde. Los autores calcularon 100 geometrías, para  $a/R$  desde 0.1 a 1 en incrementos de 0.1 y  $a/b$  de 0 a 1 en incrementos de 0.111 (Figura 7).

En el punto central del frente de fisura realizaron una aproximación polinómica bivalente del factor de intensidad de tensiones adimensional usando el método de mínimos cuadrados. La expresión alcanzada fue:

$$Y \approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 K_{ij} \cdot T_i(a/R) \cdot T_j(a/L) \quad (8)$$

En donde los coeficientes  $K_{ij}$  se calculan a partir de los coeficientes  $k_{ij}$  de la Tabla 3.

$$K_{ij} = \begin{cases} k_{ij}/4 & \text{si } i = j = 1 \\ k_{ij}/2 & \text{si } i \text{ ó } j = 1 \\ k_{ij} & \text{si } i \text{ y } j \neq 1 \end{cases}$$

Tabla 3. Coeficientes de Couroneau y Royer,  $k_{ij}$ .

$i \setminus j$	1	2	3
1	4.503	-6.452·10 <sup>-1</sup>	1.534·10 <sup>-1</sup>
2	8.086·10 <sup>-1</sup>	-1.910·10 <sup>-1</sup>	8.430·10 <sup>-2</sup>
3	2.376·10 <sup>-1</sup>	-6.183·10 <sup>-2</sup>	2.945·10 <sup>-2</sup>

El polinomio de segundo grado es representado con una doble serie de Chebyshev con argumentos definidos entre -1 y 1. Las funciones de Chebyshev de grado 1, 2 y 3 son:

$$T_1(x) = 1$$

$$T_2(x) = x$$

$$T_3(x) = -1 + 2x^2$$

Los argumentos de las funciones son:

$$\frac{a}{R} = \frac{2(a/R) - [(a/R)_{\max} + (a/R)_{\min}]}{(a/R)_{\max} - (a/R)_{\min}} \quad (9)$$

$$(a/R)_{\min} = 0.1 \quad \text{y} \quad (a/R)_{\max} = 1$$

$$\frac{a}{L} = \frac{2(a/b) - [(a/L)_{\max} + (a/L)_{\min}]}{(a/L)_{\max} - (a/L)_{\min}} \quad (10)$$

$$(a/L)_{\min} = (a/L)_{a/b=0} = (2(a/R)^{-1} - 1)^{-1/2} \quad (11)$$

$$(a/L)_{\max} = (a/L)_{a/b=1} = (1 - 1/4(a/R)^2)^{-1/2} \quad (12)$$

Y. S. Shih y J. J. Chen [12], construyeron un modelo de elementos finitos tridimensional de un cuarto de la barra fisurada elípticamente, con elementos regulares de 20 nodos y elementos colapsados singulares que exhiben la singularidad de la raíz cuadrada en la tensión a lo largo del frente de la fisura. El FIT adimensional lo obtuvieron a partir de la solución del desplazamiento de la punta de la fisura, poniendo especial cuidado en el cálculo de la orientación de cada nodo de la misma.

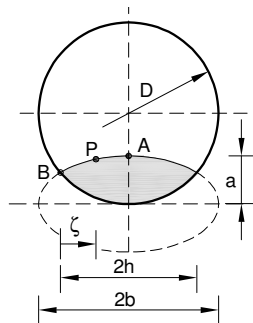


Figura 8. Caracterización fisuras (Shih y Chen).

Los autores utilizaron 42 geometrías con  $a/D$  igual a 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 y  $a/b$  igual a 0.0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (Figura 8). A partir de los resultados se ajustaron varias curvas para la obtención del FIT adimensional en los puntos A y B, donde se observa un mal ajuste que en algunos casos produce valores negativos [13].

C. Q. Shin y C. S. Cai [14] calcularon el factor de intensidad de tensiones adimensional a lo largo de una fisura superficial semielíptica contenida en una varilla, partiendo del análisis de las tensiones obtenidas mediante elementos finitos y utilizando el método de extensión virtual de la fisura.

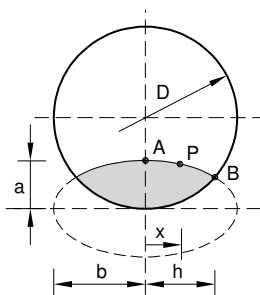


Figura 9. Caracterización fisuras (Shin y Cai).

Representaron solamente un cuarto del problema con elementos colapsados con nodos a un cuarto. El estudio fue realizado en probetas con extremos constreñidos (1mm para una longitud mitad de barra de 90mm) y libres, donde  $a/b$  varía desde 0 a 1 en incrementos de 0.1,  $a/D$  de 0.067 a 0.8 en 11 incrementos iguales y  $x/h$  de 0 a 1 en 6 incrementos iguales, siendo evaluados 13 puntos en 121 geometrías (Figura 9). El valor en el punto B lo tomaron por extrapolación de la curva de ajuste de los puntos interiores. Obtuvieron la siguiente expresión de ajuste en función de los coeficientes  $M_{ijk}$  para extremos libres (Tabla 4) y constreñidos (Tabla 5):

$$Y = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^2 M_{ijk} (a/D)^i (a/b)^j (x/h)^k \quad (13)$$

Tabla 4. Coeficientes de Shin y Cai,  $M_{ijk}$ .  
a) extremos libres

$i$	$j \setminus k$	0	1	2
0	0	0.220	0.123	-0.409
0	1	28.513	0.511	-9.764
0	2	-354.782	-2.034	128.817
0	3	2178.632	-19.569	-727.078
0	4	-7140.202	144.435	2201.067
0	5	12957.447	-359.284	-3732.813
0	6	-12227.977	393.518	3343.521
0	7	4721.868	-159.206	-1240.214
1	0	-0.326	0.065	1.011
1	1	-3.780	-6.878	-3.946
1	2	79.489	47.747	41.099
1	3	-571.094	-119.954	-316.682
1	4	1976.255	14.769	1284.860
1	5	-3583.421	423.169	-2563.292
1	6	3256.770	-661.610	2455.158
1	7	-1163.158	306.176	-880.302
2	0	0.266	0.118	-1.584
2	1	-9.118	-3.515	45.562
2	2	85.381	75.016	-552.891
2	3	-465.013	-587.594	3322.477
2	4	1475.911	2197.404	-10812.317
2	5	-2794.532	-4264.810	19328.127
2	6	2878.868	4138.287	-17829.715
2	7	-1261.348	-1588.135	6638.698

b) extremos constreñidos

$i$	$j \setminus k$	0	1	2
0	0	1.095	0.113	-0.896
0	1	-1.336	1.824	3.092
0	2	13.108	-21.709	-4.197
0	3	-43.689	105.483	-13.255
0	4	134.868	-271.225	51.548
0	5	-242.653	387.47	-59.329
0	6	254.093	-290.024	13.481
0	7	-108.196	88.387	10.854
1	0	-1.177	0.271	0.904
1	1	17.924	-11.649	0.701
1	2	-137.252	98.358	-32.641
1	3	545.816	-415.027	204.104
1	4	-1223.334	982.713	-568.407
1	5	1541.587	-1329.634	857.543
1	6	-1006.656	961.893	-657.659
1	7	264.206	-288.565	191.57
2	0	0.725	-0.388	0.008
2	1	-17.427	10.074	-4.883
2	2	134.652	-80.088	55.092
2	3	-551.902	328.165	-305.079
2	4	1239.493	-772.921	916.962
2	5	-1548.537	1055.952	-1545.428
2	6	969.388	-784.581	1372.595
2	7	-227.132	245.798	-485.556

#### 4. DISCUSIÓN

Se ha representado el FIT adimensional en el centro (punto A) y borde de la fisura (punto B) para cada uno de los autores estudiados, considerándose frentes de fisura de geometría elíptica con centro en el borde de la varilla, de diferentes relaciones de aspecto ( $alb$ ), 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, y profundidades de fisura relativas ( $a/D$ ), 0.0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (Figuras 10 a 15).

Todos los autores consideraron extremos libres, salvo Shin y Cai que incluyeron además el cálculo para extremos constreñidos. Los valores de Levan y Royer que se calcularon para fisuras de forma circular se han obtenido a partir de la transformación del frente elíptico a circular [15]. Los valores de Carpinteri y de Shih y Chen representados son los obtenidos en sus respectivos métodos y no a partir del ajuste.

En los resultados se produce una buena correlación para todas las relaciones de aspecto y profundidades de fisura entre 0.1 y 0.4, creciendo las discrepancias a partir de este último, donde Levan y Royer son los autores que obtienen valores más elevados. El mejor acuerdo entre todos los autores ocurre para el caso de fisura circular y cálculo en el centro de la fisura.

Para cada profundidad de fisura relativa el factor de intensidad de tensiones adimensional es mayor para frentes rectos que para frentes de fisura circulares. Existe una relación de aspecto crítica ( $alb$ )<sub>c</sub> para cada valor de  $a/D$ , tal que para relaciones de aspecto menores el factor de intensidad de tensiones adimensional es mayor en el centro de la fisura y para mayores lo es en el borde (Figuras 16 y 17). Este valor ( $alb$ )<sub>c</sub> disminuye su valor conforme aumenta la profundidad de fisura relativa.

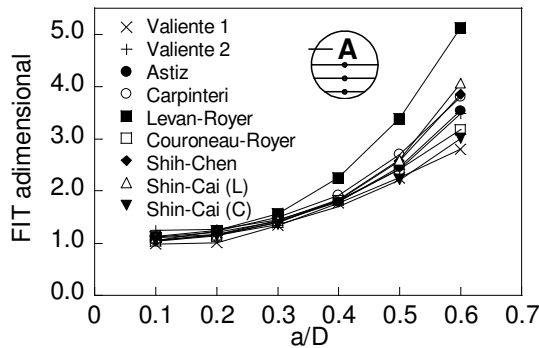


Figura 10. FIT adimensional  $alb=0.0$  (punto A).

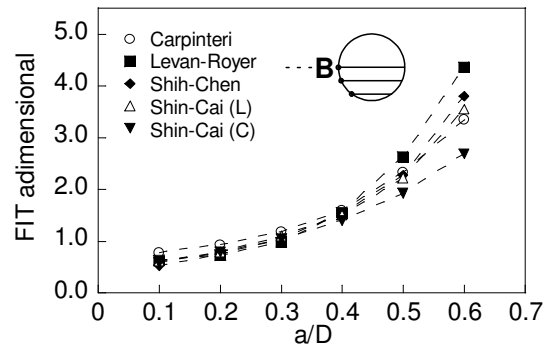


Figura 13. FIT adimensional  $alb=0.0$  (punto B).

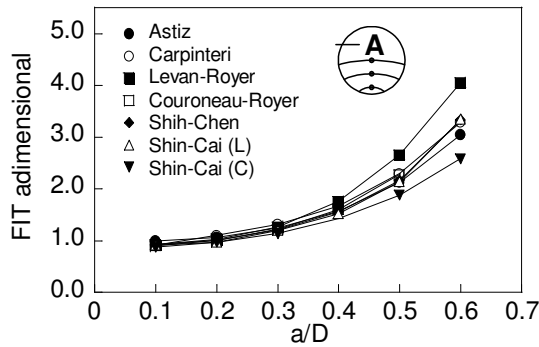


Figura 11. FIT adimensional  $alb=0.5$  (punto A).

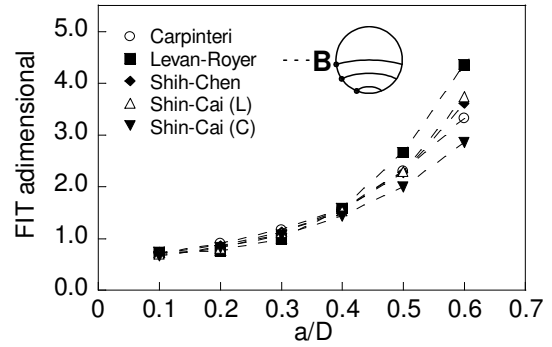


Figura 14. FIT adimensional  $alb=0.5$  (punto B).

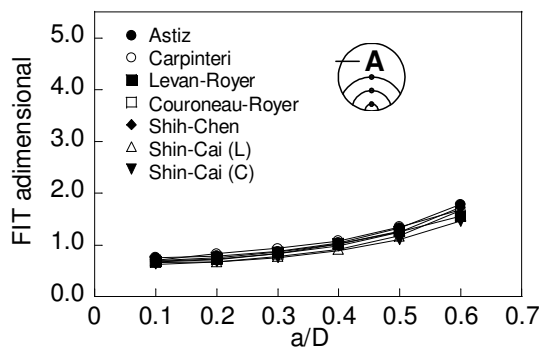


Figura 12. FIT adimensional  $alb=1.0$  (punto A).

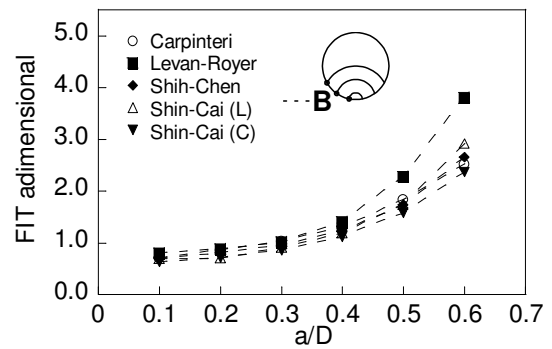


Figura 15. FIT adimensional  $alb=1.0$  (punto B).

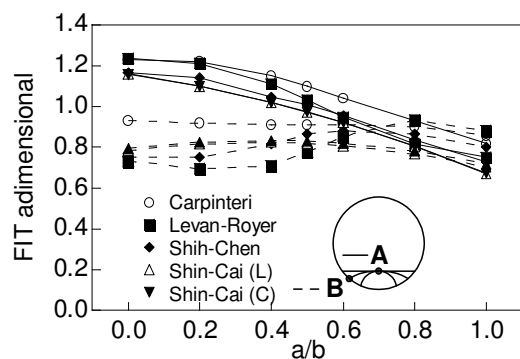


Figura 16. FIT adimensional  $a/D=0.2$  (puntos A y B).

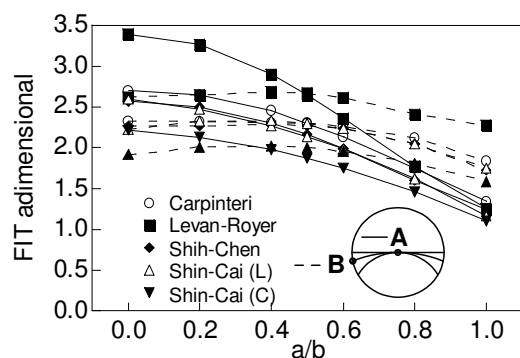


Figura 17. FIT adimensional  $a/D=0.5$  (puntos A y B).

### 5. CONCLUSIONES

El factor de intensidad de tensiones adimensional varía con la profundidad de fisura relativa de forma creciente, con la relación de aspecto de forma decreciente y con el punto sobre el frente de fisura de forma continua entre centro y borde, creciendo o decreciendo en función de los dos valores anteriores.

Existe, para cada profundidad de fisura relativa  $a/D$ , una relación de aspecto crítica  $(a/b)_c$  decreciente con la profundidad de fisura, tal que para  $a/b < (a/b)_c$  el FIT adimensional es mayor en el centro y si  $a/b > (a/b)_c$  es mayor en el borde.

Para  $a/D$  entre 0.1 y 0.4 existe una buena concordancia entre todos los autores. Entre 0.4 y 0.6 Levan y Royer obtienen valores del FIT adimensional más elevados. Por el contrario, Shin y Cai para probetas con los extremos constreñidos, obtienen los valores más bajos, debido a que dicho constreñimiento impide parte de la flexión, limitando la apertura de fisura.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por las siguientes instituciones: MCYT-FEDER (Proyecto MAT2002-01831), MEC (Proyecto BIA2005-08965), Junta de Castilla y León (Proyectos SA078/04 y SA067A05) y Fundación “Memoria de D. Samuel Solórzano Barruso”.

### REFERENCIAS

- [1] Si, E. (1990). Stress intensity factors for edge cracks in round bars. *Engineering Fracture Mechanics* **37**, 805-812.
- [2] Levan, A., Royer, J. (1993). Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting. *International Journal of Fracture* **61**, 71-99.
- [3] Carpinteri, A. (1993). Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading. *International Journal of Fatigue* **15**, 21-26.
- [4] Couroneau, N., Royer, J. (2000). Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I. *International Journal of Fatigue* **20**, 711-718.
- [5] Shih, Y.S., Chen, J.J. (1997). Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft. *International Journal of Fracture* **19**, 477-485.
- [6] Lin, X.B., Smith, R.A. (1998). Fatigue growth simulation for cracks in notched and unnotched round bars. *International Journal of Mechanics* **40**, 405-419.
- [7] Lin, X.B., Smith, R.A. (1997). Shape growth simulation of surface cracks in tension fatigued round bars. *International Journal of Fatigue* **19**, 461-469.
- [8] Valiente, A. (1980). Criterios de fractura para alambres. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 112-114.
- [9] Astiz, M.A. (1986). An incompatible singular elastic element for two- and three-dimensional crack problems. *International Journal of Fracture* **31**, 105-124.
- [10] Carpinteri, A. (1992). Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars. *Engineering Fracture Mechanics* **42**, 1035-1040.
- [11] Carpinteri, A. (1992). Elliptical-arc surface cracks in round bars. *Fatigue Fracture of Engineering Materials* **15**, 1141-1153.
- [12] Shih, Y.S., Chen, J.J. (2002). The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft. *Nuclear Engineering and design* **214**, 137-145.
- [13] Cai, C.Q., Shin, C.S. (2004). A discussion on “The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft” by Y.S. Shih and J.J. Chen. *Nuclear Engineering and Design* **227**, 355-358.
- [14] Shin, C.S., Cai, C.Q. (2004). Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. *International Journal of Fracture* **129**, 239-264.
- [15] Matos, J.C., González, B., Escuadra, J., Toribio, J. (2004). Un procedimiento automático de ajuste de una elipse para modelizar el frente de una fisura superficial. *Anales de Mecánica de Fractura* **22**, 81-86.