

SIMULACIÓN DEL EFECTO DE LA PLASTIFICACIÓN EN LA PROPAGACIÓN DE FISURAS POR FATIGA EN MODO MIXTO

D. Ferreño (1), J. M. Alegre (2), J. M. Revilla (2).

(1) Departamento de Ciencia de Materiales, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Cantabria, Avda de los Castros s/n, 39005, Santander, Spain.
ferrenod@unican.es

(2) Area MMCyTE, Dpto Ingeniería Civil. Escuela Politécnica Superior, Universidad de Burgos. C/ Villadiego s/n, 09001, Burgos, Spain.
E-mail: jalegre@ubu.es

RESUMEN

Las condiciones de propagación en el frente de fisura implican, en situaciones generales, solicitaciones mixtas combinando los modos I y II. En consecuencia la trayectoria seguida por la fisura en su avance viene determinada por los valores que los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{II} adoptan en cada momento. Las teorías que predicen la propagación de la fisura en modo mixto son bastante exactas para el caso de materiales frágiles, sin embargo, para los materiales que presentan cierto grado de ductilidad las predicciones del camino de propagación ya no son tan alentadoras. En este trabajo se presenta un estudio por elementos finitos que simula la propagación de una fisura por fatiga en un componente bidimensional, considerando la pequeña plastificación que se produce en el frente de fisura a través de un modelo de material elástico-perfectamente plástico. Se observa como la desviación originada por la plastificación mejora ostensiblemente las predicciones del camino de la propagación. El estudio desarrollado incorpora un exhaustivo análisis del efecto del tamaño de malla y del paso de avance de la fisura en la simulación, proporcionando una serie de recomendaciones para posteriores simulaciones.

ABSTRACT

Crack propagation usually involves mixed loading conditions, combining mode I and mode II. As a consequence, the path crack can be determined by using the actual stress intensity factors' (SIF) value. The models that can predict the crack path evolution under mixed mode loading are quite exact for brittle materials, but for ductile materials these predictions are not so encouraging, as a consequence of the effect on the SIF values of the crack tip yielding. In this work, a FE study that simulates the fatigue crack propagation in a two-dimensional component, considering the effect of the small yielding in the crack tip, is effected. A perfectly plastic elastic material has been considered to define the material behaviour. It is showed that crack path predictions are widely improved using an elasto-plastic analysis. Also, in this study an exhaustive analysis of the effect both the mesh size and the crack advance substeps of the crack path predictions has been effected, providing a series of recommendations for future simulations.

Palabras clave: Propagación des fisuras, modo mixto, pequeña plastificación

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los estudios de crecimiento de fisura se limitan a solicitaciones en modo I de carga, donde la tensión es normal al plano de la fisura. Sin embargo, en muchas ocasiones no se produce esta circunstancia y el frente de fisura se encuentra sometido a un modo mixto de carga (modo I y modo II) con esfuerzos de tracción fuera del plano de la fisura que tienden a desviarla de su trayectoria inicial. Este hecho afecta, en problemas de fatiga, tanto a la dirección de crecimiento de la fisura como a su velocidad de propagación.

Existen en la bibliografía numerosos criterios [1-5] para determinar el camino seguido por la fisura durante la

propagación de la misma en modo mixto. La inmensa mayoría utilizan los factores de intensidad de tensiones (FIT) que proporcionan las bases de la Mecánica de Fractura Elástico Lineal (MFEL), como base para predecir el camino de la fisura. En consecuencia, la correcta evaluación de los FITs constituye la primera etapa a satisfacer en cualquier estudio numérico de propagación de fisuras por fatiga.

Por otro lado, las bases de la MFEL en las que se apoyan los criterios comentados sólo resultan estrictamente válidas cuando el tamaño de la zona plástica que se desarrolla en el frente de fisura sea despreciable frente a las dimensiones geométricas del componente. En el momento en el que la zona plástica

alcanza cierta entidad es preciso realizar análisis elasto-plásticos para la correcta descripción del fenómeno.

Sin embargo, cuando el tamaño de la zona plástica sea relativamente pequeño la MFEL sigue siendo válida, efectuando ciertas correcciones en el FIT, tal y como postuló Irwin [6]. En este trabajo se pretende seguir la misma línea que Irwin para ampliar la utilización de los modelos de propagación de fisura en el caso de pequeñas zonas plásticas en la punta de la grieta. En este caso, la correcta definición de los FIT es, si cabe, más importante dado que en la estimación de vida en fatiga su valor va elevado al exponente de Paris.

Finalmente, destacar que en este estudio no han considerado efectos que pueden resultar importantes en la estimación de la vida en fatiga de componentes de material dúctil, como es el caso del cierre de grieta como consecuencia de la plastificación del frente de fisura.

2. EVIDENCIA EXPERIMENTAL

Para alcanzar los objetivos propuestos se ha ensayado a fatiga una probeta tipo CT con un taladro desviador de la fisura para asegurar condiciones de modo mixto en el frente de propagación. Las dimensiones aparecen recogidas en la Figura 1, siendo el espesor de 8 mm, lo cual permite suponer condiciones de tensión plana. El material es una aleación de aluminio 7050, cuyas propiedades mecánicas se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Propiedades mecánicas del material ensayado

E (GPa)	σ_Y (MPa)	s_U (MPa)	e_{Smax} (%)	ν
71.7	469	524	11	0.33

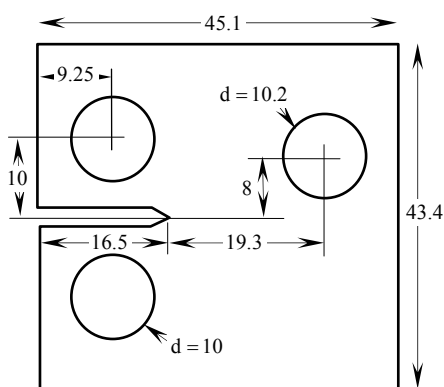


Figura 1. Geometría analizada. (cotas en mm)

El historial de fatiga de la pieza comienza con un nivel bajo de carga (0.1 kN) que va aumentándose hasta observar el inicio de la propagación al cabo de 38500 ciclos con un nivel de carga de 4.4 kN. Para reducir en la medida de lo posible la plastificación en la punta de la fisura durante la propagación de la misma, y conseguir un mayor avance con bajos niveles de

plastificación, una vez observada esta iniciación se ha aplicado un nivel de carga variable con el número de ciclos, del tipo $P_{max} \text{ (kN)} = 8 \cdot 10^6 \cdot N_{acum}^{-1.36}$, donde a medida que la fisura avanza las cargas son reducidas. Bajo las condiciones expuestas, después de 186000 ciclos y bajo una carga ya de solo 0.6 kN la fisura alcanza el taladro desviador presentando la trayectoria que aparece en la Figura 2.

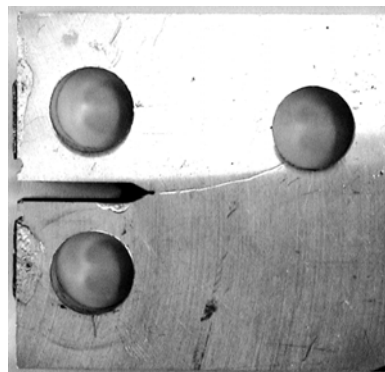


Figura 2. Resultado experimental

3. ALGORITMO DE SIMULACIÓN

La simulación de la propagación de fisura se ha efectuado utilizando el código de elementos finitos ANSYS [7]. Se ha desarrollado un algoritmo que analiza la evolución de la fisura de forma automática, siguiendo los siguientes pasos:

- Partiendo del tamaño y orientación iniciales del frente de la fisura, se calculan los FITs de acuerdo con las cargas aplicadas.
- A partir de estos valores, se calcula la modificación del ángulo de la fisura, $\Delta\theta$, de acuerdo con un criterio de trayectoria determinado.
- Con este valor de ángulo y utilizando un avance diferencial en la fisura Δa se determina la posición del frente de fisura en el siguiente paso.
- Se construye de nuevo la geometría con la nueva fisura, mediante una curva spline que incluya todos los puntos calculados en la propagación de los pasos anteriores.
- Se vuelven a calcular los FIT y la nueva previsión de ángulo de propagación.

Los pasos anteriores se repiten de forma automática hasta que la fisura alcanza uno de los bordes de la geometría. En nuestro caso hasta que alcanza el taladro desviador.

4. EVALUACIÓN NUMÉRICA DE K_I Y K_{II}

Uno de los principales pasos en la metodología anterior es la correcta determinación de los FIT en cada paso de cálculo. Entre las técnicas más comunes para el cálculo de los factores de intensidad de tensiones en modelos 2D, cabe mencionar (a) la técnica de correlación de

desplazamientos [8,9], (b) la evaluación de la tasa de liberación de energía potencial [10], y (c) el cálculo de la integral J por medio de una integral de dominio [11]. Bittencourt [12] ha demostrado que en el caso de materiales elástico-lineales y con mallados suficientemente refinados los tres grupos de procedimientos convergen a las mismas predicciones. En nuestro caso, se ha optado por obtener los FITs a través de la técnica de correlación de desplazamientos por tratarse de un procedimiento ventajoso desde el punto de vista computacional.

Para ello, el entorno de la fisura ha sido modelado mediante una roseta de elementos finitos concéntricamente dispuestos alrededor de la punta de la fisura, tal y como se presenta en la Figura 3. Se trata de elementos cuadráticos de 8 nodos, 4 en los vértices del elemento y 4 en la mitad de cada arista, que han sido convenientemente modificados para así poder reproducir las singularidades de tipo $r^{-1/2}$ en los campos de tensiones y deformaciones. El resto de la geometría ha sido mallada con elementos cuadráticos de 8 nodos convencionales, que proporcionan mayor precisión que los elementos triangulares, típicamente empleados en el mallado libre (no estructurado) de áreas. En ambos casos se trata de elementos PLANE 82 de ANSYS [7].

Con este tipo de elementos los factores de intensidad de tensiones en modo I y II pueden evaluarse como,

$$K_I = \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_b - v_d) + v_e - v_c] \quad (1)$$

$$K_{II} = \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_b - u_d) + u_e - u_c] \quad (2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{deformación plana}) \\ (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{tensión plana}) \end{cases}$$

donde E es el modulo de elasticidad, ν es el coeficiente Poisson, L es la longitud del elemento singular, y u_j, v_i son los desplazamientos nodales en las direcciones x e y respectivamente donde x es la dirección actual de la fisura y y es la dirección perpendicular. Las expresiones son fácilmente demostrables a partir de las fórmulas para los movimientos propias de la MFEL.

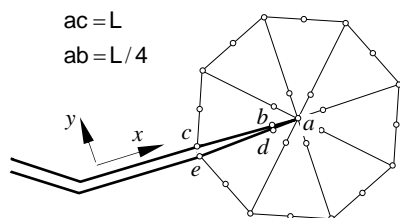


Figura 3. Elementos singulares en la punta de la fisura.

La calidad de la técnica descrita ha sido contrastada comparándola con resultados de soluciones analíticas contenidas en manuales de factores de intensidad de tensiones [13]. Los resultados indican que con una

roseta de 12 elementos los resultados de los FIT son plenamente satisfactorios, siendo prácticamente coincidentes en la estimación de K_I y con errores del 3% por debajo en la estimación de K_{II} .

5. CRITERIOS PARA LA PREDICCIÓN DE LA TRAYECTORIA

El segundo paso en la simulación de la propagación de la fisura lo constituye la determinación del ángulo de propagación. En ese sentido la literatura ofrece para el caso de materiales elástico-lineales varios modelos de predicción de la nueva trayectoria de la fisura [14-16]. En este trabajo se han considerado tres de ellos.

3.1. Criterio de la máxima tensión circunferencial.

Propuesto originalmente por Erdogan y Sih [14], se trata de uno de los criterios más simples y ampliamente difundidos en la bibliografía. Una de sus principales ventajas es que permite obtener una expresión analítica para el cálculo del ángulo de avance. Como su propio nombre indica el criterio establece que la propagación la fisura se produce en aquella dirección para la cual la tensión circunferencial es máxima.

Las ecuaciones que proporcionan los valores de tensiones radiales σ_r , circunferenciales σ_θ , y tangenciales $\tau_{r\theta}$, en un punto (r, θ) del frente de fisura para una sollicitación mixta de intensidad K_I y K_{II} son

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \left(1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin\theta - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \sin\theta + K_{II} (3 \cos\theta - 1) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Donde el ángulo θ viene definido en sentido antihorario a partir de la dirección de la fisura ya existente. Dichas ecuaciones son validas tanto en condiciones de tensión plana como en deformación plana.

Según este criterio la propagación se produce según el ángulo θ en el cual σ_θ alcanza su máximo valor o, equivalentemente, $\tau_{r\theta} = 0$, ya que en esa situación, $\sigma_\theta = \sigma_I$. Por lo tanto, entrando en (3) se obtiene la solución no trivial (4):

$$(\sin\theta)K_I + (3 \cos\theta - 1)K_{II} = 0 \quad (4)$$

Puede demostrarse, manipulando adecuadamente la fórmula anterior, que la solución a la misma responde a la expresión (5). El signo a considerar en la suma entre corchetes será positivo cuando $K_{II} < 0$ y negativo en

caso contrario. De esta forma, dado que $K_I > 0$ por definición, se deduce que el signo del ángulo de propagación es opuesto al signo de K_{II} .

$$\theta = 2 \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (5)$$

Para los casos extremos en los que la sollicitación sea sólo en modo I ($K_{II} = 0$) o en modo II ($K_I = 0$), la fórmula (5) predice ángulos de valor $\theta = 0^\circ$ y $\theta = \pm 70.54^\circ$, dependiendo del signo de K_{II} , respectivamente.

3.2. Criterio de la máxima tasa de liberación de energía

Según este punto de vista, dada una fisura sollicitada en modo mixto, suponiendo un material homogéneo e isótropo, la dirección de propagación, θ , coincide con aquella en la cual la tasa de liberación de energía G , presenta un máximo es decir, $G(\alpha) = G_{\max} \Rightarrow \theta = \alpha$.

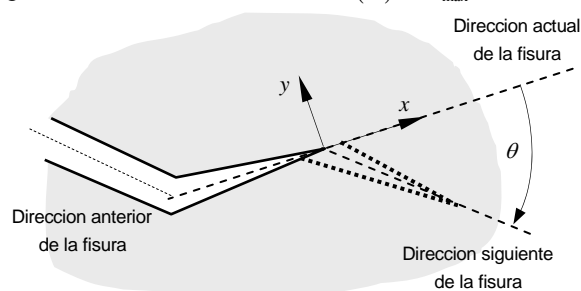


Figura 4: Crecimiento infinitesimal desde el frente de una fisura macroscópica

Existen diferentes alternativas para computar la función $G(\alpha)$; en la referencia [15] se recogen hasta 5 métodos; quizá, la alternativa más directa es la que se expone a continuación. A partir de la situación de la Figura 4, siendo K_I y K_{II} los factores de intensidad de tensiones correspondientes a la fisura macroscópica para las condiciones de sollicitación dadas, los valores correspondientes cuando se añade una pequeña fisura infinitesimal orientada según un ángulo α , $k_I(\alpha)$ y $k_{II}(\alpha)$, puede expresarse como:

$$k_I(\alpha) = \frac{1}{4} \left[3 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] K_I - \frac{3}{4} \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] K_{II} \quad (6)$$

$$k_{II}(\alpha) = \frac{1}{4} \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] K_I + \frac{1}{4} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] K_{II} \quad (7)$$

La expresión de la tasa de liberación de energía a partir de $k_I(\alpha)$ y $k_{II}(\alpha)$ es la que se presenta en (8); a partir de ella resulta relativamente sencillo obtener el ángulo de propagación $\theta = \alpha$ puesto que sólo resta obtener su máximo, de acuerdo con (9). Una posibilidad interesante pasa por desarrollar una expresión analítica

para (8) a partir de (6) y (7), de la cual obtener sus raíces numéricamente, comprobando que se cumple (9).

$$G(\alpha) = \frac{k_I^2(\alpha) + k_{II}^2(\alpha)}{E} \quad (8)$$

$$\left. \frac{dG(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\theta} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d^2G(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\theta} \leq 0 \quad (9)$$

La máxima desviación de la trayectoria se produce cuando la sollicitación es en modo II, $K_I = 0$; introduciendo las expresiones (6) y (7) particularizadas para este caso en la fórmula (8) y posteriormente maximizando se llega, evitando soluciones triviales, al mismo resultado que por el procedimiento de la MTC. Por ello, debe tenerse en cuenta que sólo es necesario localizar el máximo de $G(\alpha)$ para valores comprendidos en el intervalo $\pm 70.54^\circ$, como se ilustra en la Figura 5.

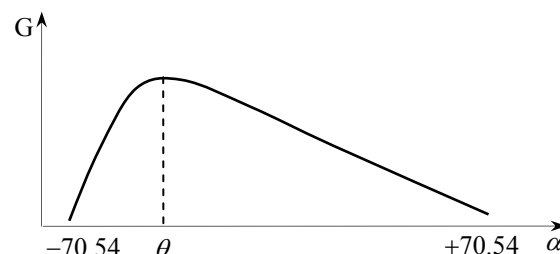


Figura 5: Curva $G(\alpha)$ para el criterio de la máxima tasa de liberación de energía [15]

3.3. Criterio de la mínima densidad de energía de deformación.

Sih [16] considera que valores elevados de la densidad de energía, W_e , tienden a dificultar el crecimiento de la fisura. Por ello, puede asumirse que la grieta se desarrolla en la dirección que minimiza esta energía. Sea w la densidad de energía de deformación, definida como $w = (dW_e/dV)$. Esta cantidad es proporcional al cuadrado de las tensiones y, dado que las tensiones presentan una singularidad del tipo $r^{-1/2}$, la singularidad de w es de la forma r^{-1} . Por lo tanto, el llamado factor de densidad de energía de deformación, que se define como $S = r \cdot w$ permanece acotado en el frente de fisura. La expresión analítica de esta cantidad es

$$S = r \cdot w = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (11)$$

donde los coeficientes vienen definidos como

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G} [(3 - 4\nu - \cos\theta)(1 + \cos\theta)]$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi G} 2\text{sen}\theta [\cos\theta - 1 + 2\nu]$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G} [2(1 - 2\nu)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)]$$

La dirección de propagación coincide con el valor del ángulo θ , comprendido en el intervalo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, que minimiza la función S , Figura 6 [16]. Desde el punto de vista computacional el algoritmo ha sido preparado para barrer el ángulo θ y localizar el mínimo de la función S . Para el caso de una sollicitación pura en modo II el método MDED predice un ángulo de valor $\theta = \pm \arccos(0.5 - \nu)$.

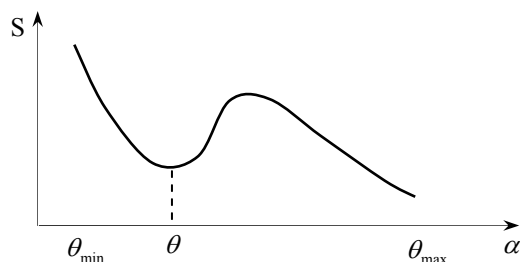


Figura 6. Factor de densidad de energía de deformación en función de α [16]

6. SIMULACION DE LA PROPAGACIÓN

Como se ha comentado anteriormente, el objetivo del presente trabajo es analizar el efecto de la plastificación del material en la simulación de la trayectoria. Para poder comparar los resultados se ha efectuado un análisis de predicción de trayectoria considerando el material como elástico lineal, o como elasto-plástico.

6.1 Resultados de la simulación con modelo de material elástico lineal

La bibliografía consultada [16] y en las simulaciones efectuadas se ha podido constatar que para mallados suficientemente refinados y en régimen elástico lineal, los tres algoritmos de avance presentados ofrecen resultados muy similares. Se han cotejado diferentes tamaños de elemento de fisura y de elemento de malla global apreciándose una escasa repercusión en la curva seguida por la fisura.

En la Figura 7 se comparan la trayectoria experimental con las predicciones del modelo de elementos finitos (en este caso, según el método de MTC), considerando un modelo de material elástico lineal. Existe una mínima discrepancia entre las trayectorias en las dos caras de la probeta debido a las ligeras heterogeneidades del material junto con las inevitables imperfecciones geométricas y experimentales. Sin embargo solo se presenta una curva para mayor claridad. El rasgo más destacable, sin embargo, viene dado por la discrepancia entre resultados experimentales y las predicciones numéricas de la trayectoria de la fisura. Como se puede apreciar, las simulaciones subestiman el efecto desviador de la trayectoria inducido por el taladro. Este efecto se aprecia con mayor nitidez en la Figura 8, donde aparece la pieza en su totalidad.

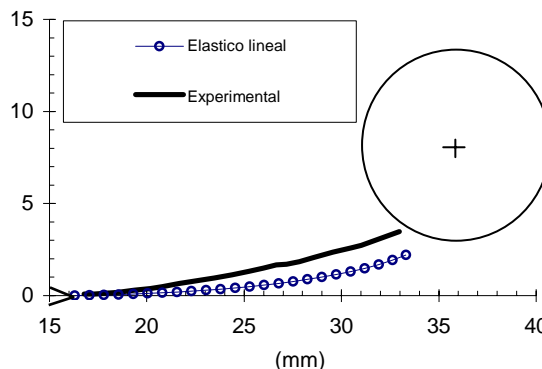


Figura 7. Comparación de resultados numéricos y experimentales

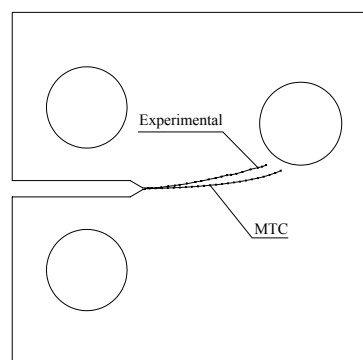


Figura 8. Comparación entre resultados numéricos y experimentales

Cabe preguntarse acerca del origen de la mencionada discrepancia. Una primera posibilidad contemplada justificaría el efecto como una consecuencia del ángulo de salida en el caso experimental; pudiera ser que, en el proceso de fabricación de la entalla sobre la probeta de aluminio, ésta hubiera quedado orientada accidentalmente con un cierto ángulo de partida que, desde un principio condicionara la trayectoria final. En ese sentido, el modelo numérico ha sido modificado de forma que permita contemplar diferentes ángulos de salida. El efecto del ángulo de partida se atenúa rápidamente, creciendo las dos fisuras de forma paralela, y separadas una distancia mínima que para el caso de 30° de ángulo de salida inicial en lugar de 0° es de tan solo 0.2 mm.

6.2. Resultados de la simulación con modelo de material elasto-plástico.

Dado el comportamiento elasto-plástico del material utilizado, la explicación más razonada de la diferencia observada la podemos encontrar como consecuencia de las plastificaciones inevitables en el frente de fisura durante el proceso experimental.

En este sentido, se ha realizado el cálculo por elementos finitos considerando un modelo de material bilineal

elástico-perfectamente plástico, de acuerdo con las constantes mecánicas del aluminio empleado recogidas en la Tabla 1. Como se puede apreciar en la Figura 9, incluso este modelo de material tan simplista supone una mejora considerable de las predicciones. De nuevo la diferencia que se aprecia en la parte final del avance, entre simulación y experimentación, es debida a la alteración que la presencia próxima del taladro origina sobre los estados tensionales. En esta situación, las plastificaciones presentes, de gran entidad, inhabilitan a los FITs como parámetros representativos del proceso.

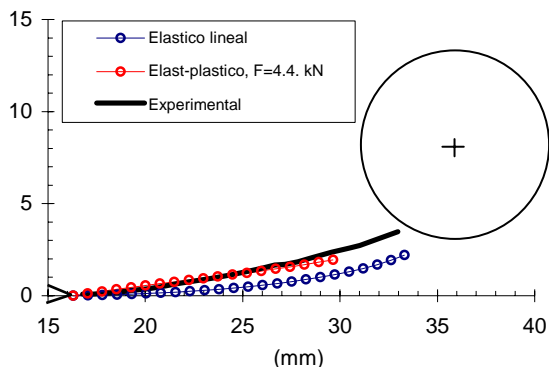


Figura 9. Comparación de los resultados empíricos y numéricos considerando también plasticidad

7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han analizado los modelos numéricos predictivos de la trayectoria seguida por una fisura en una pieza bidimensional en condiciones de sollicitación mixta. Como conclusiones más relevantes del mismo cabe destacar las siguientes:

Los principales procedimientos de predicción de trayectoria no presentan grandes diferencias entre sí, para mallados suficientemente densos.

En el caso de materiales que presente cierto grado de ductilidad la predicción de la seguida por la fisura durante su propagación debe estimarse considerando el comportamiento elasto-plástico del mismo. La hipótesis simplista según la cual se asume un comportamiento puramente elástico del material puede conducir a resultados no realistas. En este sentido, se recomienda considerar siempre el comportamiento plástico del material, incluso ante sollicitaciones moderadas.

Debe mencionarse que este trabajo supone sólo una primera etapa que deberá ser completada incluyendo, además, un procedimiento de estimación del número de ciclos resistido por el componente. De esta manera se dispondrá de una herramienta de estimación de la vida residual, lo cual supone un objetivo de relevancia desde el punto de vista práctico.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Shih, C.F., de Lorenzi, H.G., German, M.D., "Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements", *International Journal of Fracture*, 12, pp. 647-651, 1976.
- [2] Rybicki, E.F., Kanninen, M.F., "A Finite Element Calculation of Stress-Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral", *Engineering Fracture Mechanics*, 9, pp. 931-938, 1977.
- [3] Raju, I.S., "Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements", *Engineering Fracture Mechanics*, 28, 251-274, 1987.
- [4] Nikishkov, G.P., Atluri, S.N., "Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-Dimensional Crack by the Equivalent Domain Integral Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 1801-1821, 1987.
- [5] Dodds, R.H. Jr., Vargas, P.M., "Numerical Evaluation of Domain and Contour Integrals for Nonlinear Fracture Mechanics", Report, Dept. of Civil Engineering, U. of Illinois, Urbana-Champaign, 1988.
- [6] Irwin, G.R.: "Plastic zone near a crack and fracture toughness" Proc. 7th Sagamore Conf., p. IV-63 (1960).
- [7] Ansys Inc. User Manual. (2006)
- [8] Shih, C.F., de Lorenzi, H.G., German, M.D., "Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements", *International Journal of Fracture*, 12, pp. 647-651, 1976.
- [9] R.S. Barsoum (1976) On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 10, 25-37.
- [10] Raju, I.S., "Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements", *Engineering Fracture Mechanics*, 28, 251-274, 1987.
- [11] Dodds, R.H. Jr., Vargas, P.M., "Numerical Evaluation of Domain and Contour Integrals for Nonlinear Fracture Mechanics", Report, Dept. of Civil Engineering, U. Illinois, Urbana-Champaign, 1988.
- [12] Bittencourt, T.N., Wawrzynek, P.A., Ingraffea, A.R., Sousa, J.L.A., "Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems", *Eng. Fract. Mech.* 55, pp. 321-334, 1996.
- [13] Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R., "The Stress Analysis of Cracks Handbook. Third Edition", ASME International (2000).
- [14] Erdogan, F., Sih, G.C., "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *ASME J: Basic Eng.*, 85, pp. 519-527, 1963.
- [15] Bouchard, P.O., Bay, F., Chastel, Y., "Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192, pp. 3887-3908, 2003.
- [16] Sih, G.C., Macdonald, B., "Fracture mechanics applied to engineering problems-strain energy density fracture criterion", *Engrg. Fract. Mech.*, 6, pp. 361-386, 1974.