

## ANÁLISIS COMPARATIVO DE DOS MODELOS PARA LA PROGRAMACIÓN Y EVALUACIÓN DE ENSAYOS DE FATIGA

E. Castillo<sup>1</sup>, A. Fernández Canteli<sup>2</sup>, M. López Aenlle<sup>2</sup>, A. Ramos<sup>2</sup>, R. Koller<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Cantabria.  
Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander  
castie@unican.es

<sup>2</sup>Dpto de Construcción e Ingeniería de Fabricación. Universidad de Oviedo.  
Campus de Viesques, s/n, 33203-Gijón  
e-mail: afc@uniovi.es

<sup>3</sup>Empa, Laboratorio Federal Suizo de Ensayo de Materiales e Investigación.  
Überlandstrasse 129, 8600 Dübendorf, Suiza  
Roland.Koller@empa.ch

### RESUMEN

En este trabajo, se analizan comparativamente dos metodologías para la planificación y evaluación de ensayos de fatiga: la primera de ellas basada en un método de los escalones modificado, que postula una distribución de Weibull para el rango de tensiones para un número fijo de ciclos, en lugar de la distribución normal considerada en el método convencional, y la segunda basada en el modelo de regresión para todo el campo S-N desarrollado por Castillo et al. Los dos modelos se aplican a los resultados de un programa experimental de fatiga llevado a cabo en el Empa (Laboratorio Federal Suizo de Ensayos de Materiales e Investigación) con el fin de determinar la distribución del rango de tensión para un límite de ciclos dado. Finalmente se valoran los resultados obtenidos según ambas metodologías.

### ABSTRACT

In this work, two approaches for planning and evaluating fatigue results are analyzed and compared: The first of them is based on a modified up-and-down method that assumes a Weibull distribution for the stress ranges for given number of cycles rather than the normal distribution used in the conventional method. The second one uses the regression model developed by Castillo et al. that defines the whole S-N field. Both models are used in the analysis of the results obtained from a fatigue experimental program carried out at the Empa (Swiss Federal Laboratories of Materials Testing and Research) with the aim of determining the stress range distribution for a limit number of cycles. Finally, a comparison between both approaches is then performed.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Fatiga e Interacción con el Medio Ambiente.

**PALABRAS CLAVE:** Fatiga, campo S-N, modelos de evaluación.

### 1. INTRODUCCIÓN

La optimización de programas de fatiga, que implica problemas como planificación, ensayo y evaluación de resultados es un asunto de importancia para los laboratorios de ensayo de materiales y un tema frecuente en la bibliografía, al que se enfrentan desde hace ya tiempo los grupos de investigación que trabajan en el campo de fatiga.

En la comunidad investigadora hay una creencia generalizada de que no existe ningún modelo específico que resuelve de manera satisfactoria todos los problemas arriba mencionados, es decir, completo. Sin embargo, el llamado método de los escalones [1,2,3]

está reconocido como un procedimiento útil para el estudio de las propiedades de materiales en fatiga, no sólo por parte de los investigadores más prácticos de los laboratorios de ensayos sino también de los medios universitarios. Esto puede ser debido a la simplicidad asociada a la estrategia de ensayos y a la técnica de evaluación asociada al método de los escalones, que es sencilla de entender y de aplicar en la práctica. A pesar de la información parcial y limitada que proporciona el método de los escalones, consistente en la determinación del rango de tensiones para un número límite de ciclos dado, se considera, creemos injustificadamente, que el método suministra una información sobre fatiga suficiente y fiable para el cálculo en la práctica ingenieril.

Entre las limitaciones del método de los escalones figura la hipótesis de una distribución normal (o logarítmico-normal) del rango de tensiones, que no está justificada por el análisis estadístico de datos reales [4,5]. Por otro lado, los resultados correspondientes a la región de fatiga de alto número de ciclos, es decir, la verdaderamente implicada en el método de los escalones, debe ser complementada con resultados en la zona de vida media en fatiga si pretende determinar el campo completo S-N para su uso en el actual cálculo de vida en fatiga.

En este trabajo, se presenta una estrategia alternativa de ensayos de fatiga, desarrollada por los autores [4], basada en un modelo de regresión Weibull, y la consiguiente estimación de parámetros. El modelo permite determinar el campo completo S-N, pudiendo incorporar en el análisis los resultados procedentes de diferentes tamaños de probeta [5]. En primer lugar, se presentan someramente los dos modelos considerados aquí, es decir, el basado en el método de los escalones y el de regresión se presentan, justificándose en el método de los escalones el considerar una distribución de Weibull para el rango de tensiones, lo que conduce a lo que se puede denominar método Weibull de los escalones. A continuación, se procede a la evaluación, según las dos metodologías, de los resultados obtenidos en el programa experimental de fatiga desarrollado en el Empa (Laboratorio Federal Suizo de Ensayos de Materiales e Investigación) y se realiza un análisis comparativo. Tras lo cual se analiza la aplicabilidad y fiabilidad resultante y se discuten las ventajas y limitaciones de ambos métodos. Por último se presentan las conclusiones de la investigación.

**2. EL MÉTODO NORMAL Y EL MÉTODO WEIBULL DE LOS ESCALONES**

El método de los escalones, desarrollado por Dixon and Mood, y aplicado inicialmente para resolver problemas de sensibilidad en temas de agricultura, se relaciona con variables que no son factibles de ser medidas directamente [1]. El método encontró más tarde aplicación en programas de fatiga para la estimación probabilística del, impropriadamente, llamado *límite de endurancia* en la región de alto número de ciclos, para un cierto número de ciclos hasta la rotura [2,3]. El uso del método de los escalones en el análisis de fatiga está justificado porque la distribución del rango de tensión, como variable determinante, no puede ser determinada físicamente de forma directa para un número de ciclos fijado. En lugar de ello, el método propone una metodología para proporcionar, indirectamente, la información buscada. Un valor inicial del rango de tensión junto con un escalón constante del rango de tensión son las magnitudes relevantes a elegir. El resultado del ensayo, entendido como rotura o no-rotura, se usa en el siguiente ensayo, de modo que el rango de tensión se reduce si el ensayo precedente desemboca en una rotura, o se incrementa, si la probeta sobrevive al límite de ciclos elegido. La distribución de

probabilidad discreta resultante se evalúa suponiendo una distribución normal para el rango de tensión o su logaritmo, en clara contradicción con la evidencia física. La consideración de una distribución de Weibull en el método de los escalones elimina la limitación física de la versión convencional, pero el método mantiene sin alteración el resto de inconvenientes.

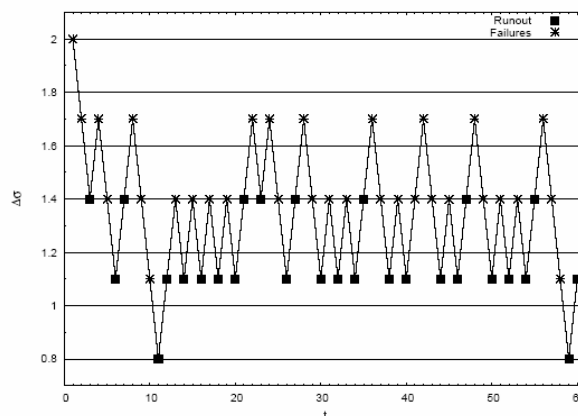


Figura 1. Ilustración del método de los escalones utilizando resultados de Dixon-Mood [1] con cinco niveles de carga.

Aunque esta metodología es adecuada para estimar el valor medio del rango de tensión, no lo es para determinar probabilidades de rotura bajas, como se requiere en la práctica, ya que, debido a la estrategia inherente al método, la mayor parte de los resultados se acumulan en la zona de la mediana, mientras que sólo se proporcionan un escaso número de ensayos en las zonas de percentiles bajos. Como resultado, y a pesar de las mejoras aportadas por diferentes investigadores (ver referencias en [3]), los percentiles bajos se determinan con un considerable grado de incertidumbre. Aparte de esto, se necesita un conocimiento previo de las propiedades de fatiga del material para conseguir una razonable elección del valor inicial del rango de tensión y del tamaño del escalón. Una elección no óptima de ambas magnitudes causa problemas en la evaluación, al introducir incertidumbre en la estimación de la desviación típica de la distribución normal y, en casos, exige un número de ensayos adicionales, lo que incrementa el coste del programa experimental. En consecuencia, esta técnica no es válida para determinar el rango de tensión para cualquier número de ciclos hasta la rotura más allá del límite de ciclos fijado en los ensayos.

Puesto que el análisis en el método de los escalones en su versión estándar se realiza en base a la hipótesis de una distribución normal, no debería ser aplicado en el análisis de vida en fatiga, dado que ésta está sustentada por una distribución de Weibull. Debido a esto, se propone y desarrolla aquí un nuevo método que permite la estimación de los parámetros del modelo de los escalones con independencia de la distribución supuesta.

El método de los escalones puede ser modelado mediante una cadena de Markov, ver Chao y Fuh [6]. Los estados se asocian a los rangos de tensión y las probabilidades de transición son las probabilidades de alcanzar los niveles adyacentes.

Sea  $p_{it}$  la probabilidad del ensayo número  $t$  realizado al rango de tensión  $\Delta\sigma_i$ , es decir., supongamos que  $t = 1, 2, \dots, n$  es el número de ensayo y el índice  $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  está asociado a un rango de tensión  $\Delta\sigma_i$ , donde el nivel de referencia inicial es  $i = 0$ . En este caso tenemos la siguiente ecuación de transición:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ p_{2,t+1} \\ p_{1,t+1} \\ p_{0,t+1} \\ p_{-1,t+1} \\ p_{-2,t+1} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ p_{2,t} \\ p_{1,t} \\ p_{0,t} \\ p_{-1,t} \\ p_{-2,t} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\alpha_2 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha_0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha_{-1} & 0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha_{-2} & 0 & \alpha_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

que en forma compacta se puede escribir como:

$$p_{t+1} = p_t T, \quad (2)$$

donde  $p_t$  es una matriz que da la probabilidad de la función de masa asociada al escalón  $t$  del ensayo, y  $T$  es la matriz de probabilidad de transición. De acuerdo con ello tenemos:

$$p_t = p_0 T^t, \quad (3)$$

donde  $p_0$  es la probabilidad inicial, es decir, las probabilidades asociadas al primer ensayo (si de manera determinista se decide comenzar en el nivel  $i = 0$ , se trataría de una matriz con todo ceros excepto un 1 en la posición  $i = 0$ ). Dado que las probabilidades  $\alpha_i$  de niveles muy altos y muy bajos tienden, respectivamente, a 1 y a 0, la ecuación (1) para un valor dado de  $i = k$  puede sustituirse por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} p_{k,t+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{2,t+1} \\ p_{1,t+1} \\ p_{0,t+1} \\ p_{-1,t+1} \\ p_{-2,t+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{-k,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{2,t} \\ p_{1,t} \\ p_{0,t} \\ p_{-1,t} \\ p_{-2,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{-k,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}^t \quad (4)$$

donde

$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1-\alpha_2 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-\alpha_0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha_{-1} & 0 & \alpha_{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha_{-2} & 0 & \alpha_{-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz infinita  $T$  puede ser reemplazada por una matriz finita. Esta aproximación es preferible a la propuesta por Chao y Fuh [6] ya que mantiene una de las características del modelo de los escalones consistente en el hecho de que algunos rangos de tensión no son posibles para los escalones impares y otros tampoco lo son para los pares.

Los valores esperados del número de ensayos realizados a todos los niveles se pueden calcular como sigue. Siendo  $X_t$  una matriz de filas que contiene como elementos,  $x_{it}$ , el número de ensayos llevados a cabo en el rango de tensión  $\Delta\sigma_i$  tras  $t$  etapas del método de los escalones. El valor esperado,  $E(X_t)$  de  $X_t$ , incluyendo la etapa inicial es:

$$E(X_t) = p_0 (I + T + T^2 + \dots + T^t). \quad (5)$$

Como la matriz  $T$  puede escribirse:

$$T = C Q C^{-1}, \quad (6)$$

donde  $Q$  es una matriz diagonal que contiene sus autovalores y  $C$  es una matriz que contiene como columnas los autovectores, la ecuación (5) puede escribirse como:

$$E(X_t) = p_0 C (I + Q + Q^2 + \dots + Q^t) C^{-1} = p_0 C U C^{-1}, \quad (7)$$

donde  $U$  es una matriz diagonal cuyos elementos son

$$u_{ii} = \begin{cases} \frac{\lambda_i^{t+1} - 1}{\lambda_i - 1} & \text{if } \lambda_i \neq 1 \\ t + 1 & \text{if } \lambda_i = 1 \end{cases}. \quad (8)$$

y  $\lambda_i$  son los autovalores de  $Q$ .

### 2.1 Ejemplo de aplicación

Consideramos aquí el caso particular de 5 niveles con probabilidades extremas (1 y 0) para  $\alpha_i$  en los niveles exteriores para los que resulta:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha_{-1} & 0 & \alpha_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha_1\alpha_{-1}}{(-1+\alpha_1)(-1+\alpha_{-1})} & 1 & \frac{\alpha_1\alpha_0}{-1+\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}} & \frac{\alpha_1\alpha_0}{-1+\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{\alpha_1\alpha_0\sqrt{\alpha_{-1}\alpha_0(-1+\alpha_1+\alpha_{-1})}}{(-1+\alpha_0)(-1+\alpha_{-1})} & \frac{\alpha_1\alpha_0\sqrt{\alpha_{-1}\alpha_0(-1+\alpha_1+\alpha_{-1})}}{(-1+\alpha_0)(-1+\alpha_{-1})} \\ 1 & \frac{\alpha_{-1}}{-1+\alpha_{-1}} & 1 & \frac{\alpha_0(-1+)}{-1+\alpha_1+\alpha_{-1}} & \frac{\alpha_0}{-1+\alpha_1+\alpha_{-1}} \\ -1 & 0 & 1 & -\sqrt{\alpha_{-1}\alpha_0(-1+\alpha_1+\alpha_{-1})} & \sqrt{\alpha_{-1}\alpha_0(-1+\alpha_1+\alpha_{-1})} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

y

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-(-1)^{1+t}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-\sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}})^{1+t}-1}{-\sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}})^{1+t}-1}{\sqrt{\alpha_0-\alpha_1\alpha_0+\alpha_{-1}-\alpha_0\alpha_{-1}}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Nótese que éste es prácticamente el caso de Dixon y Mood [1], en que  $\alpha_2 = 0.999767 \cong 1$  y  $\alpha_{-2} = 0.006210 \cong 0$ .

2.2 Estimación de parámetros

Un método natural para la estimación de los parámetros es el método de máxima verosimilitud, en el que la verosimilitud del camino observado en los ensayos del método de los escalones se maximiza con respecto a los

parámetros a estimar [7]. Una alternativa a este método consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre los niveles esperados y observados, ver [4], es decir:

$$\text{Minimizar } Q = [ E ( X_{ij} ( \theta ) ) - r_i - s_i ]^2, \tag{13}$$

$\theta$

que tras la consideración de (7) y(8) conduce a:

$$\text{Minimizar } [ C( \theta ) U( \theta ) C^{-1}( \theta ) - r_i - s_i ]^2. \tag{14}$$

$\theta$

Para ilustrar el método, lo aplicamos a los datos de Dixon y Mood de la figura 1 suponiendo una distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  para el límite de endurancia. En este caso el problema de optimización, dado por la expr. (14) se convierte en:

$$\text{Minimizar } [C(\mu, \sigma) U(\mu, \sigma) C^{-1}(\mu, \sigma) - r_i - s_i]^2. \quad (15)$$

La solución de este problema, implementado en Mathematica es:

$$Q = 0.357; \hat{\mu} = 1.319; \hat{\sigma} = 0.187. \quad (16)$$

La matriz de covarianza de los estimadores se puede obtener fácilmente mediante el método *bootstrap* [8,9]. Tras 10.000 simulaciones se obtienen los siguientes intervalos de confianza del 0.95 para  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente:

$$(1.238, 1.393) \text{ y } (0.123, 0.299) \quad (17)$$

y una matriz de covarianza:

$$\begin{pmatrix} 0.00162 & -0.00162 \\ -0.00001 & 0.00232 \end{pmatrix} \quad (18)$$

A partir de las simulaciones se deduce también la siguiente información:

$$\begin{aligned} \text{Bias} [\hat{\mu}] &= -0.0016; \text{MSE} [\hat{\mu}] = 0.00162; \\ \text{Bias} [\hat{\sigma}] &= -0.0100; \text{MSE} [\hat{\sigma}] = 0.00242; \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. EL MODELO DE CASTILLO ET AL.

Castillo y Fernández Canteli [4] propusieron un modelo de Weibull para el análisis de los resultados de fatiga, que permite incluir probetas de diferente tamaño en la evaluación (ver [5]). La solución del modelo para el campo S-N, considerando un elemento de longitud  $L_i$  solicitado bajo un rango de tensión constante  $\Delta\sigma$ , viene dada por:

$$(\log N - B)(\log \Delta\sigma - C) = D \left[ \left( -\frac{L_0}{L_i} \log(1 - P) \right)^{1/A} - E \right], \quad (20)$$

donde  $N$  es la vida de fatiga medida en ciclos,  $\Delta\sigma$  el rango de tensión,  $P = F(\log N; \Delta\sigma)$  la probabilidad de rotura,  $L_0$  la longitud de referencia,  $L_i$  la longitud de probeta y  $A, B, C, D$ , y  $E$  los parámetros del modelo a estimar, con los siguientes significados (ver fig. 2):

$A$ : Parámetro de forma.

$B$ : Valor umbral o número límite de ciclos  $N$ .

$C$ : Valor umbral de  $\Delta\sigma$  o límite de endurancia.

$D$ : Factor de escala.

$E$ : Parametro que define la posición de la curva límite o curva de probabilidad cero.

Como se muestra en la fig. 2, las curvas de isoprobabilidad, es decir, las curvas que unen los puntos que representan la misma probabilidad de rotura, están representadas por hipérbolas equiláteras. La expresión analítica del campo S-N permite la predicción probabilística del número de ciclos hasta la rotura bajo carga de amplitud constante. La función de distribución de la vida en fatiga  $N$  al rango de tensión  $\Delta\sigma_k$  resulta:

$$F(\log N; \Delta\sigma_k) = 1 - \exp \left[ -\frac{L_i}{L_0} \left( \frac{(\log N - B)(\log \Delta\sigma - C)}{D} + E \right)^A \right]. \quad (21)$$

La curva correspondiente al percentil cero representa el número mínimo posible de ciclos hasta la rotura por fatiga para diferentes valores de  $\log \Delta\sigma$  y es, por tanto, el mismo para todas las longitudes. Este modelo ha sido estudiado y aplicado con éxito a diferentes casos de vida en fatiga tales como alambres y torones con diferente longitud, hormigón armado, etc. (ver Castillo et al. [4,5]).

Es interesante notar que la transformación

$$V = (\log N - B)(\log \Delta\sigma - C), \quad (22)$$

conduce a una variable normalizada  $V$  que permite identificar los parámetros del modelo con los de la distribución de Weibull normalizada:

$$F(N; \Delta\sigma) = 1 - \exp \left[ -\frac{L_i}{L_0} \frac{V - \lambda_k}{\delta_{ik}} \right]^{\beta_k}, \quad (23)$$

al rango de tensión  $\Delta\sigma_k$ :

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta\sigma_k) &= B - \frac{ED}{\log \Delta\sigma_k - C}, \\ \delta(\Delta\sigma_k) &= \frac{D}{\log \Delta\sigma_k - C} \left( \frac{L_0}{L_i} \right)^{1/A}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\beta(\Delta\sigma_k) = A.$$

La estimación de los parámetros se hace en dos etapas. En la primera, se estiman  $B$  y  $C$ , mientras que el resto de parámetros, es decir,  $A, D$  y  $E$  se calculan en el segundo paso. Castillo et al. [4,5,10] han propuesto diferentes métodos matemáticos de solución.

Los programas experimentales de fatiga, generalmente, implican la presencia de resultados de ensayos en los que la probeta ha alcanzado el número límite de ciclos

fijado, sin rotura, o ensayos en los que la rotura se produce por causas accidentales no imputables a un proceso normal de fatiga. Este tipo de datos se denomina datos censurados o supervivientes. En el modelo propuesto es posible recurrir a técnicas estadísticas específicas, como por ejemplo el algoritmo E-M, basado en un proceso iterativo para tratar datos censurados en el análisis estadístico.

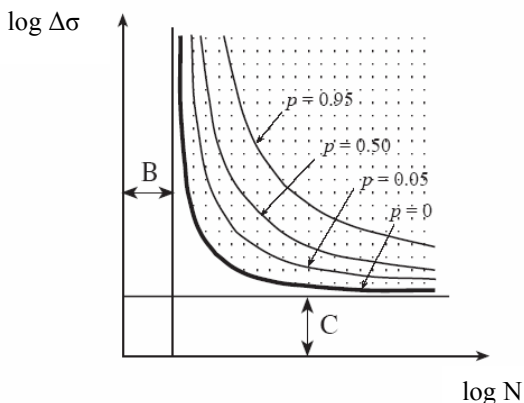


Figura 2. Campo S-N con las curvas de percentiles que representan la misma probabilidad de rotura.

#### 4. PROGRAMA EXPERIMENTAL Y RESULTADOS DE EVALUACION

Con el fin de comparar los análisis de fatiga proporcionados por el modelo de regresión de Castillo et al. [4,5] con los del método de los escalones se llevó a cabo un programa experimental en el Empa (Laboratorio Federal Suizo de Ensayos de Materiales e Investigación en Dübendorf, Zurich) en el que se aplicaron dos estrategias diferentes. El objetivo de la primera consistió en definir el campo S-N completo, mientras que en el segundo, el estudio se restringe a la distribución del rango de tensión para un número límite de 2 millones de ciclos. El número de probetas se limitó a 20 para ambas metodologías.

El material utilizado fue un acero de baja aleación 42CrMo4 (número de material codificado DIN-1.7225) con un valor nominal de la tensión de rotura,  $R_m = 1097$  MPa, y un límite elástico,  $R_{p,0.2} = 1059$  MPa. Este tipo de material se emplea en construcción estructural debido a su satisfactorio comportamiento mecánico y a fatiga. Para los ensayos se utilizaron máquinas *vibrophone* de alta frecuencia. El montaje del ensayo y la probeta permitieron alcanzar un máximo de 142 Hz. Todos los ensayos se realizaron bajo rango de tensión constante para una relación  $R = \sigma_{min} / \sigma_{max} = 0.1$  del nivel de tensión. La temperatura en las probetas se controló en todo momento con el fin de el mecanismo de rotura no quedara afectado durante el ensayo.

En la planificación del programa de ensayos para la determinación del campo S-N se empleó la denominada estrategia *en cascada* [7]. Como el objetivo principal

del programa consistía en comparar los resultados de la resistencia a fatiga mediante ambos métodos para un número límite de ciclos de 2 millones, los resultados están predominantemente concentrados en la zona baja de la curva S-N. Nótese que esto favorece al método de los escalones en la comparación con el modelo de regresión e impide aplicar en este caso la estrategia óptima.

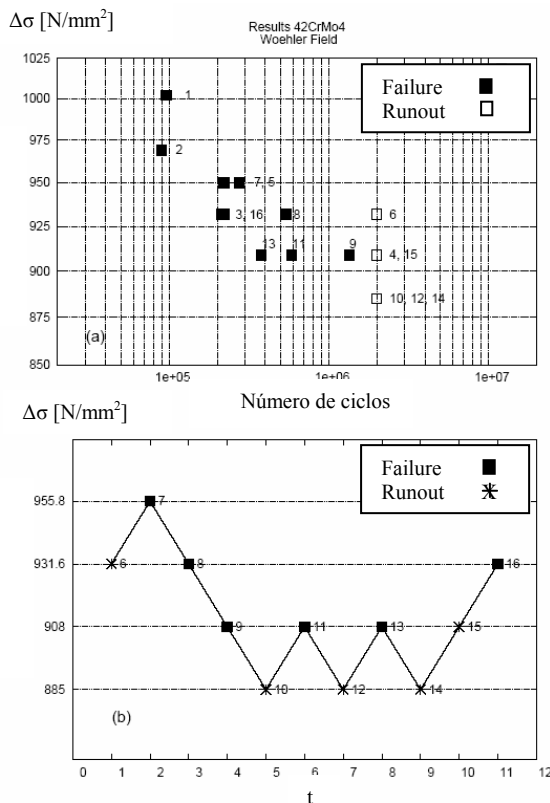


Figura 3. Resultados para el material 42CrMo4: a) campo S-N y b) secuencia de escalones.

En consecuencia, resulta un incremento innecesario del número de ensayos y un aumento de la duración de los mismos, junto con una merma de la fiabilidad al definir el campo S-N. Para proporcionar la información previa necesaria en el método de los escalones se realizaron 5 ensayos, en la primera fase del programa experimental para conseguir una estimación inicial del campo S-N que permita suministrar el salto en el rango de tensión entre los ensayos y el rango de tensión inicial.

El nivel inicial del método de los escalones se tomó directamente de los resultados obtenidos con el modelo de regresión, mientras que la amplitud del escalón se estimó a partir del rango de tensión comprendido entre las curvas de los cuantiles correspondientes a  $P = 0,75$  y  $0,25$ . Se realizó un mínimo de 10 ensayos adicionales para garantizar una fiabilidad razonable.

En la figura 3 se muestran los resultados de fatiga obtenidos en el plan de ensayos de la curva S-N y en la secuencia del programa de los escalones. Los ensayos se etiquetan con el número del ensayo para una fácil

identificación. En la solución del método de los escalones se utilizaron el programa GAMS y el lenguaje R [11] tal como se describe en la sección (2). Las técnicas descritas en la sección (3) se aplicaron en la estimación de parámetros del modelo de regresión. El programa GAMS se utilizó para resolver el problema de optimización.

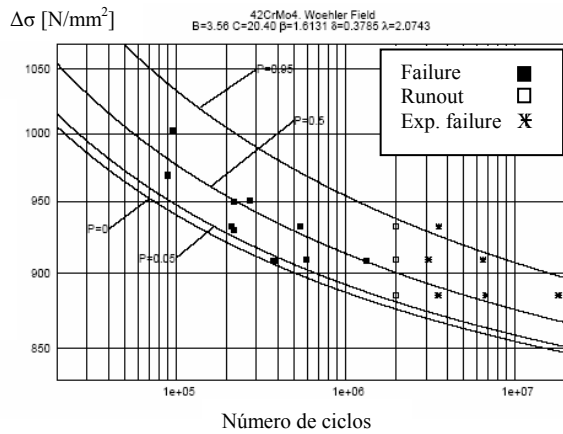


Figura 4.: Campo S-N estimado con el modelo de regresión para un acero 42CrMo4.

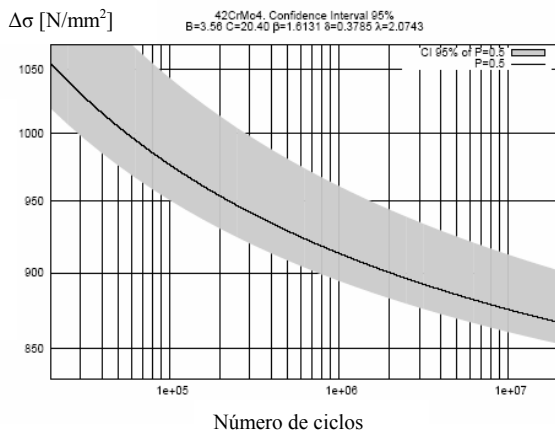


Figura 5. Curva del cuantil P=0.5 e intervalo de confianza del 95% estimados en el modelo de regresión para un acero 42CrMo4.

#### 4.1 Utilizando el método de los escalones clásico y el de Weibull

La media y la desviación típica del método clásico de los escalones calculadas considerando una distribución normal según el método de los mínimos cuadrados, ver sección 2, son:

$$\mu(\log \Delta\sigma) = 20.628 \quad ; \quad \sigma(\log \Delta\sigma) = 0.0249 \quad ,$$

donde  $\Delta\sigma$  está dado en Pascales. Tras aplicar el método bootstrap utilizando Matlab y GAMS, con 2.000 simulaciones, estos valores permanecen dentro de los siguientes intervalos de confianza de 0.95 para  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente:

(20.607, 20.650) y (0.0025, 0.047) .

Alternativamente, suponiendo una distribución de Weibull en la evaluación del método de los escalones y recurriendo al método de máxima verosimilitud, los parámetros obtenidos fueron:

$$\beta = 1.598 \quad , \quad \delta = 0.0435 \quad , \quad \lambda = 20.590 \quad .$$

De nuevo, se aplicó el método del *bootstrap* para definir los intervalos de confianza para  $\beta$ ,  $\delta$  y  $\lambda$ , resultando, respectivamente:

(1.3607, 21.92), (0.035, 0.093) y (20.55, 20.59) .

#### 4.2 Utilizando el modelo de Castillo et al.

Mediante el empleo del modelo de regresión considerando los 15 resultados, se obtuvieron las siguientes estimaciones para los parámetros:

$$B=3.57, \quad C=20.40, \quad \beta = 1.61, \quad \delta = 0.38 \quad \text{y} \quad \lambda = 2.07 \quad .$$

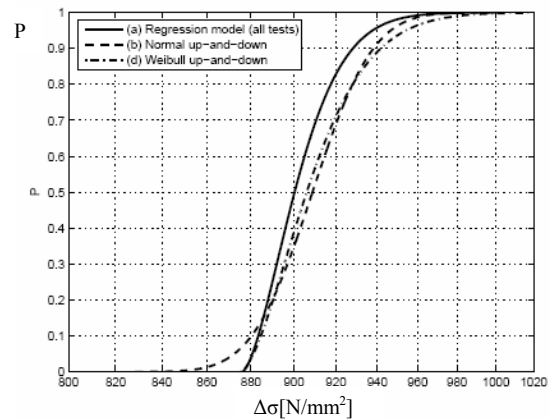


Figura 6. Funciones de distribución ajustadas a los resultados de fatiga con ambos modelos para un acero 42CrMo 4

En la figura 4 se muestra el campo S-N estimado juntamente con los resultados de los ensayos de fatiga. La bondad de los estimadores de los parámetros se contrastó con la técnica *bootstrap*: Se realizaron 2.000 simulaciones utilizando Java y GAMS. De este modo, se obtuvieron 2.000 valores de los parámetros de los que se dedujeron los valores correspondientes de la curva  $P = 0.5$ , ver figura 5.

#### 4.3 Análisis de los resultados

La tabla 1 muestra los resultados del límite de durancia para las probabilidades de rotura  $P = 0.05$  y  $0.5$  resultantes de los tres métodos considerados; en general, los resultados muestran una buena correspondencia. De hecho, las dos distribuciones Weibull obtenidas, ver fig. 6, una deducida con el modelo de escalones y la otra con el modelo de regresión coinciden prácticamente para  $P=0$ . La diferencia más significativa observada se produce para

el extremo inferior entre la distribución normal y las otras distribuciones de Weibull, debido al carácter no acotado de la distribución normal.

Las pequeñas discrepancias observadas entre la f.d.d del modelo de regresión y las f.d.d.s del método de los escalones podrían ser debidas a los cinco ensayos adicionales iniciales utilizados en el modelo de regresión, mientras que en el método de los escalones aquéllas fueron sólo utilizadas para obtener el rango de tensión inicial y la amplitud del escalón. El resultado puede quedar influido también por el modo en el que se utiliza la información de los ensayos: Contrariamente al modelo de regresión, el modelo de los escalones considera los resultados de forma elemental y limitada, sólo como *rotura* o *superviviente*, sin hacer uso de la información del número de ciclos resultante del ensayo.

Tipo de Modelo	Límite de durancia en [MPa] para $2 \cdot 10^6$ ciclos	
	$P = 0.05$	$P = 0.5$
Modelo de regresión	880	900
Modelo de escalones (distribución normal)	869	910
Modelo de escalones (distribución Weibull)	881	906

Tabla 1. Límite de durancia deducido a partir de los dos modelos para un acero 42CrMo4.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un nuevo modelo del método de los escalones, basado en una distribución triparamétrica de Weibull, para la estimación del límite de durancia para un cierto número de ciclos. El modelo representa una alternativa al método de los escalones clásico basado en una distribución normal.

Las distribuciones estadísticas obtenidas para el rango de tensiones a un número de ciclos dado en un programa de fatiga se calculan según el método de escalones clásico, el método de escalones modificado con Weibull y un modelo de regresión del campo S-N, propuesto por los autores. Los resultados concuerdan aceptablemente.

Sin embargo, queda claro, que el modelo de regresión propuesto es manifiestamente superior a las dos variantes del método de los escalones en lo concierne a la información sobre el cálculo del límite de fatiga, el coste y la duración del programa de ensayos y la posibilidad de utilización de los resultados obtenidos. Así mientras que el modelo de regresión conduce a la definición probabilística de todo el campo S-N, el interés de ambas variantes del método de los

escalones se centra en la distribución probabilística del rango de tensión para un número fijo de ciclos, que, generalmente, está acotado entre 2 y 10 millones de ciclos, debido a limitaciones de coste. Además, la información previa necesaria en el método de los escalones, tal como el rango de tensión inicial y la amplitud del escalón han sido proporcionados por el modelo de regresión.

En cualquier caso, ambos métodos basados en distribuciones de Weibull, el modelo de regresión y el de los escalones modificado, suministran estimaciones más fiables para percentiles de rotura bajos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo parcial dado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) (proyectos DPI 2002-04172 y BIA 2005-07802) del Ministerio Español de Educación y Ciencia.

## REFERENCIAS

- [1] Dixon, W.J., Mood, A.M., "A method for obtaining and analyzing sensitivity data". J. Amer. Statist. Assoc. Nr. 60, pág. 967-1078, 1948.
- [2] Deubelbeiss, E., "Dauerfestigkeitsversuche mit einem modifizierten Treppenstufenverfahren". Materialprüfung, Vol. 16, pág. 240-244, 1974.
- [3] Hück, M., Schütz, W., Zenner, H. *Ansatz und Auswertung von Treppenstufenversuchen im Dauerfestigkeitsbereich*. Industrieanlagen-Betriebsgesellschaft mbH, Bericht B-TF-7428. 1978.
- [4] Castillo, E., Fernández Canteli, A., "A general regression model for lifetime evaluation and prediction". Int. Journal of Fracture, Nr. 107, pág. 117-137, 2001.
- [5] Castillo, E., López Aenlle, M., Ramos, A., Fernández Canteli, A., Esslinger, V., Kieselbach, R., "Length effect on the fatigue strength of prestressing wires and strands. Analysis of the independence model". Int. J. of Fatigue. To be published.
- [6] Chao, and Fuh, "Bootstrap methods for the up and down test on pyrotechnics sensitivity analysis". Statistica Sinica, pág. 1-21, 2001.
- [7] Castillo, E., Ramos, A., López Aenlle, M., Fernández Canteli A., "A sensitivity analysis of a fatigue model as a tool to redefine test strategies". Proc. of the 5<sup>th</sup> Int. Conference Fatigue 2003 of the Engineering Integrity Society. Cambridge, UK April 2003.
- [8] Chernick, M.R., *Bootstrap methods*. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, 1999.



[9] Effron, B., Tibshirami, R.J., *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall/CRC, 1993.

[10] Castillo, E., Fernández Canteli, A., Hadi, A.S., “On fitting a fatigue model to data” *Int. J. of Fatigue*, Nr. 21, pág. 97-106, 1999.

[11] Ihaca, R., Gentleman, R., “R: A language for data analysis and graphics”. *J. of Compt. Nad Graphical Statistics*, Nr. 5 (3), pág. 299-314, 1999.