

**DETERMINACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD DE EJES CON FISURAS DE FRENTE ELÍPTICO****L. Rubio, B. Muñoz**

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Universidad Carlos III de Madrid, Avda. de la Universidad, 30, 28911 Leganés, Madrid, España.  
E-mail: lrubio@ing. uc3m.es  
Tfno: 91 624 94 03. Fax: 91624 94 30

**RESUMEN**

La presencia de una fisura en un elemento mecánico provoca el aumento de la flexibilidad del elemento produciéndose cambios en su comportamiento que pueden traducirse en incremento de los desplazamientos transversales y disminución de las frecuencias de vibración, entre otros. En la mayoría de los trabajos en los que se estudia el comportamiento de ejes fisurados, se supone que la fisura tiene el frente recto, sin embargo la experiencia muestra que las fisuras de fatiga que aparecen en ejes suelen presentar un frente aproximadamente elíptico. Existen abundantes expresiones que relacionan la flexibilidad de un eje de sección circular con una fisura transversal de frente recto. Sin embargo, el estudio de la flexibilidad en el caso de fisuras con frente elíptico, no ha sido tan exhaustivo, encontrándose algún ejemplo de expresiones aproximadas para la misma. En este trabajo se obtienen, partiendo de ajustes polinómicos del factor de intensidad de tensiones, expresiones de la flexibilidad de un eje con fisura elíptica en función del tamaño y de la forma de la misma en diferentes condiciones.

**ABSTRACT**

Cracks in mechanical components produce changes in their behaviour like increases of displacements or decreases of frequencies due to the flexibility increase. Most of the works related to the analysis of the behaviour of cracked shafts consider the front of the transversal fatigue cracks to be straight, but experience says that the front of these kind of cracks is approximately elliptical. Many expressions have been given for the compliance of a cracked shaft with a straight front. It is not the same for the case of elliptical front for which one example of approximate expressions for compliance has been developed. In this work, the compliance coefficients for cracked shafts have been obtained, based on the polynomial fitting of the stress intensity factors, taking into account the size and shape of the elliptical cracks.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Métodos Analíticos y Numéricos.

**PALABRAS CLAVE:** Flexibilidad, Ejes, Fisuras de frente elíptico

**1. INTRODUCCIÓN**

En un eje giratorio las fisuras crecen en planos perpendiculares a la dirección de éste, como consecuencia de la fatiga provocada por el carácter cíclico de los esfuerzos a los que está sometido. Con el fin de detectar su presencia e identificar tanto su posición como su tamaño, diversos estudios se han llevado a cabo a lo largo de los años, desde los primeros trabajos de Gasch [1], en los que se intenta relacionar el comportamiento mecánico de los ejes fisurados y la presencia de las fisuras.

El análisis del comportamiento de ejes fisurados sometidos a esfuerzos de flexión y tracción combinados es un tema de gran importancia en los distintos campos de la ingeniería por el problema que comporta la rotura catastrófica de los mismos, tanto en el caso de ejes sometidos a cargas estáticas, como en el de ejes giratorios en los que el problema se complica debido a la apertura y cierre de la fisura. En la mayoría de los trabajos en los que se estudia el comportamiento de ejes fisurados, se supone que la fisura tiene el frente recto, sin embargo la experiencia muestra que las fisuras de fatiga que aparecen en ejes suelen presentar un frente aproximadamente elíptico.

Como es bien conocido, la presencia de una fisura en un elemento mecánico provoca el aumento de la flexibilidad local del elemento produciéndose cambios en su comportamiento estático y dinámico que pueden traducirse en incremento de los desplazamientos, disminución de las frecuencias de vibración y modificación de las órbitas que describen sus secciones, entre otros. Existen abundantes expresiones que relacionan la flexibilidad de un eje de sección circular con una fisura transversal de frente recto (por ejemplo [2, 3]). Sin embargo, el estudio de la flexibilidad de ejes con fisuras de frente elíptico, no ha sido tan exhaustivo, encontrándose algún ejemplo de expresiones aproximadas para la misma, [4], cuyos resultados difieren de los que cabría esperar.

En este trabajo se han obtenido expresiones de la flexibilidad de un eje con fisura elíptica en función del tamaño y de la forma de la misma (relación entre los ejes de la elipse), partiendo de ajustes polinómicos del factor de inten-

alidad de tensiones expresados en función de las mismas variables [5]. Siguiendo el procedimiento general desarrollado por Tharp [6], el eje fisurado se ha modelizado como un elemento con una fisura transversal elíptica sometido a esfuerzos de flexión y de tracción. Con este modelo se han obtenido las expresiones de los coeficientes de flexibilidad para los esfuerzos considerados. El estudio incluye la comparación de los resultados obtenidos con los correspondientes a otras expresiones de la flexibilidad de ejes fisurados desarrolladas por otros autores [4].

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Los cambios en el comportamiento mecánico de un elemento fisurado se producen como consecuencia de una pérdida de rigidez en la sección fisurada o de un aumento de su flexibilidad.



Figura 1: Eje fisurado sometido a flexión y tracción

La presencia de una fisura en un elemento sometido a un esfuerzo de tracción,  $N$  y a un momento flector,  $M$ , (ver figura 1) se puede modelizar admitiendo discontinuidades en los desplazamientos longitudinales,  $\Delta u$ , y en los giros  $\Delta\theta$ , en la sección fisurada relacionados con los esfuerzos transmitidos por ésta mediante [6]:

$$\Delta u = \lambda_{nn}N + \lambda_{mn}M \quad (1)$$

$$\Delta\theta = \lambda_{mm}M + \lambda_{mn}N \quad (2)$$

donde  $\lambda_{ij}$  son los coeficientes de flexibilidad, y donde

$$\Delta u = u_2 - u_1 \quad (3)$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (4)$$

siendo  $u_1$  y  $\theta_1$  el desplazamiento y el giro de la sección a la izquierda de la fisura y  $u_2$  y  $\theta_2$ , el desplazamiento y el giro de la sección a la derecha de la fisura.

Los coeficientes de flexibilidad de un elemento mecánico fisurado se pueden obtener a partir de las expresiones que relacionan la tasa de liberación de energía,  $G$ , con el factor de intensidad de tensiones,  $K_I$ , que en condiciones de deformación plana tiene la forma:

$$G_N = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{I,N}^2 = \frac{N^2}{2} \frac{d\lambda_{nn}}{dA} \quad (5)$$

$$G_M = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{I,M}^2 = \frac{M^2}{2} \frac{d\lambda_{mm}}{dA} \quad (6)$$

donde  $E$  y  $\nu$  son el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente, del material, y donde  $dA$  es el diferencial de área de la fisura.

Integrando estas ecuaciones se obtienen los coeficientes de flexibilidad para esfuerzos de flexión, tracción y combinado de tracción y flexión como:

$$\lambda_{nn} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,N}}{N} \right)^2 dA \quad (7)$$

$$\lambda_{mm} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,M}}{M} \right)^2 dA \quad (8)$$

$$\lambda_{mn} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,N}}{N} \right) \left( \frac{K_{I,M}}{M} \right) dA \quad (9)$$

En estas expresiones  $K_{I,N}$  y  $K_{I,M}$  son los factores de intensidad de tensiones en modo I para los esfuerzos considerados.

Para abordar de manera simplificada el estudio del comportamiento de los ejes fisurados y la obtención de la flexibilidad, la mayoría de los autores (por ejemplo Carpinteri [7]) consideran que las fisuras de fatiga en un eje presentan frente recto. Aunque esta hipótesis es válida y conduce a resultados conservadores, no representa la realidad de los ejes giratorios fisurados, en los que la fisura presenta un frente aproximadamente elíptico (figura 2).

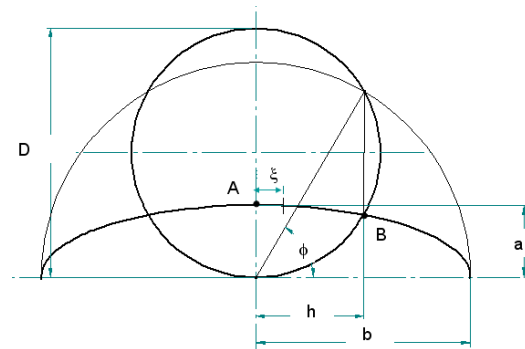


Figura 2: Geometría de transversal de la fisura

Los parámetros característicos de la fisura elíptica son los siguientes:

- $\alpha = \frac{a}{D}$ , longitud característica de la fisura
- $\beta = \frac{a}{b}$ , factor de forma de la fisura ( $\beta = 1$  se corresponde con una fisura de frente semicircular y  $\beta = 0$  de frente recto)

- $\gamma = \frac{s}{h}$ , posición relativa en el frente de la fisura

Con estas consideraciones geométricas,  $dA = 2Sda$ , donde  $S$  es la longitud del arco elíptico entre los puntos  $A$  y  $B$  del frente elíptico, ver figura 2, y viene dado por:

$$S = \int_{\arccos \bar{h}}^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi \quad (10)$$

En donde  $\bar{h}$  representa la relación  $\frac{h}{b}$ .

Los factores de intensidad de tensiones también se deben expresar en términos de la geometría del frente elíptico:

- $K_{I,N} = K_{I,N}(\alpha, \beta, \gamma)$
- $K_{I,M} = K_{I,M}(\alpha, \beta, \gamma)$

Algunos autores han estudiado este problema, dando diferentes expresiones para el factor de intensidad de tensiones como recogen en su trabajo Álvarez et al. [8]. Así Couroneau [9] y Astiz [10], entre otros, lo obtienen por interpolación desde puntos del frente de fisura. Shih y Chen [4] han publicado expresiones para  $K_{I,N}$  y  $K_{I,M}$  particularizadas en los puntos  $A$  y  $B$  y han aproximado con un valor medio los resultados a todo el frente elíptico. En un trabajo posterior los mismos autores [11] han obtenido expresiones cerradas para el factor de intensidad de tensiones. Más recientemente Shin y Cai [5] han obtenido expresiones polinómicas del factor de intensidad de tensiones mejoradas respecto a las expresiones anteriores, según las cuales:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (11)$$

$$F_{I,N} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^2 M_{ijk}(\beta)^i (\alpha)^j (\gamma)^k \quad (12)$$

$$F_{I,M} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^6 \sum_{k=0}^2 N_{ijk}(\beta)^i (\alpha)^j (\gamma)^k \quad (13)$$

Los coeficientes  $M_{ijk}$  y  $N_{ijk}$  de las ecuaciones (12) y (13) pueden encontrarse en el trabajo de Shin y Cai [5].

### 3. COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

A partir del conocimiento de los factores de intensidad de tensiones en términos de los tres parámetros que caracterizan la fisura, ecuaciones (11)-(13), las funciones de

flexibilidad se pueden calcular como se muestra a continuación, tomando como ejemplo el de la flexibilidad para flexión,  $\lambda_{mm}$ .

La tensión máxima en la sección circular debida al momento flector en el eje se puede escribir como:

$$\sigma = \frac{M \frac{D}{2}}{\frac{1}{4} \pi \left(\frac{D}{4}\right)^4} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad (14)$$

sustituyendo (14) en (11) y después en (8), la flexibilidad para flexión toma la forma:

$$\lambda_{mm} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \frac{32^2 \pi a}{\pi^2 D^6} F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \gamma) dA \quad (15)$$

donde

$$dA = dSda = D^2 d\bar{s}d\alpha \quad (16)$$

siendo  $\bar{s} = \frac{S}{D}$ .

Teniendo en cuenta la ecuación (10), la expresión para el diferencial de arco elíptico,  $d\bar{s}$ , será:

$$d\bar{s} = \alpha \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi \quad (17)$$

y sustituyendo en la ecuación (15), la flexibilidad para flexión queda

$$\lambda_{mm} = \frac{4096(1-\nu^2)}{\pi E D^3} \bar{\lambda}_{mm} \quad (18)$$

en donde,

$$\bar{\lambda}_{mm} = \int_0^{\alpha_f} \int_{\arccos \bar{h}}^{\frac{\pi}{2}} F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \gamma) \alpha d\bar{s}d\alpha \quad (19)$$

es el coeficiente de flexibilidad adimensionalizado para flexión, correspondiendo  $\alpha_f$  al cociente  $\frac{a}{D}$  final.

Para poder integrar esta última expresión es necesario establecer una relación geométrica entre  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\bar{h}$ , para lo cual se debe obtener el valor  $\bar{h} = \frac{h}{b}$ , donde  $h$ , figura 2, representa la intersección del contorno exterior circular del eje dado por la expresión:

$$x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (20)$$

con la forma elíptica de la fisura,

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \tag{21}$$

La intersección de las dos curvas permite obtener la expresión de  $\bar{h}$ ,

$$\bar{h} = \beta \left[ \frac{\sqrt{\beta^4 - 4\alpha^2(\beta^2 - 1)} + 2\alpha^2(\beta^2 - 1) - \beta^2}{2\alpha^2(\beta^2 - 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

donde la relación entre  $\bar{h}$  y  $\gamma$  es función del ángulo  $\phi$ , ver figura 2, y viene dada por:

$$\gamma = \frac{1}{\bar{h}} \cos \phi \tag{23}$$

La ecuación (19) se escribirá entonces,

$$\bar{\lambda}_{mm} = \int_0^{\alpha_f} \int_{\arccos \bar{h}}^{\frac{\pi}{2}} H_{I,M}(\alpha, \beta, \phi) d\alpha d\phi \tag{24}$$

donde

$$H_{I,M}(\alpha, \beta, \phi) = \alpha^2 F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \phi) \left[ \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

Los valores de  $\bar{\lambda}_{mm}$ , que se muestran en la figura 3, se han obtenido mediante la integración numérica de la integral doble de la expresión (24) utilizando la regla del trapecio.

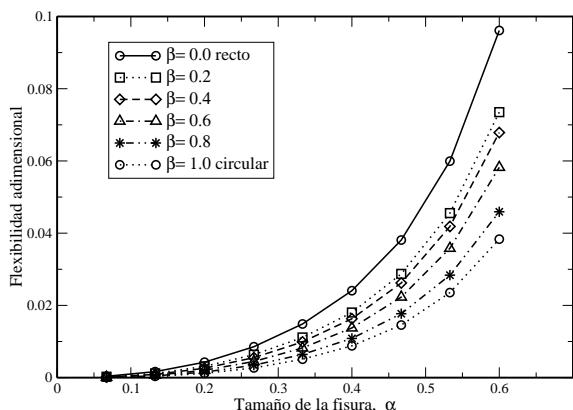


Figura 3: Variación de  $\bar{\lambda}_{mm}$  en función de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$

Esta misma metodología se aplica para la obtención de las funciones de flexibilidad tanto en el caso de tracción,

$\bar{\lambda}_{nn}$ , como en el caso de sollicitación combinada tracción-flexión,  $\bar{\lambda}_{mn}$ . Los resultados obtenidos se recogen en las figuras 4 y 5.

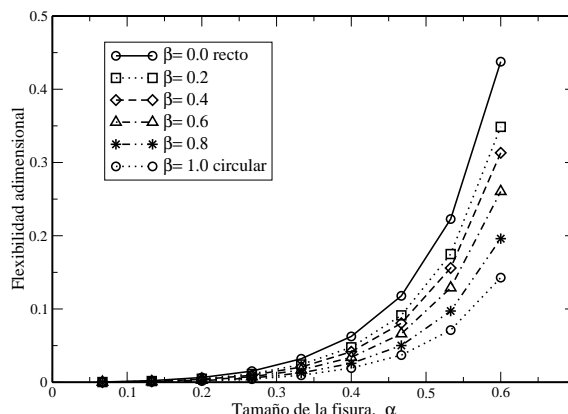


Figura 4: Variación de  $\bar{\lambda}_{nn}$  en función de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$

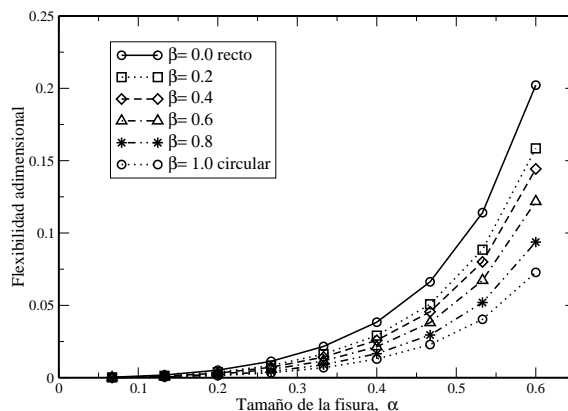


Figura 5: Variación de  $\bar{\lambda}_{mn}$  en función de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$

Como era de esperar, y de acuerdo con resultados de la literatura, la flexibilidad, en todos los casos considerados, aumenta con el tamaño de la fisura y con las formas más rectas del frente de la fisura.

Con estos valores de la flexibilidad para distintas formas de fisura y tamaños, se procede al ajuste polinómico de los coeficientes de flexibilidad para los esfuerzos considerados.

$$\bar{\lambda}_{mm} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q C_{ij}^{mm} \alpha^i \beta^j \tag{26}$$

$$\bar{\lambda}_{nn} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q C_{ij}^{nn} \alpha^i \beta^j \tag{27}$$

$$\bar{\lambda}_{mn} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q C_{ij}^{mn} \alpha^i \beta^j \tag{28}$$

donde  $C_{ij}^{mm}$ ,  $C_{ij}^{nn}$  y  $C_{ij}^{mn}$  son los coeficientes de los ajustes de la flexibilidad adimensional para flexión, tracción

y flexo-tracción, respectivamente y donde  $p$  es el grado del polinomio en  $\alpha$  (tamaño de la fisura), y  $q$  es el grado del polinomio en  $\beta$  (factor de forma de la fisura). El cálculo de los  $n_c = (p + 1)(q + 1)$  coeficientes  $C_{ij}$  de los polinomios de ajuste, se puede abordar haciendo uso de las técnicas de regresión lineal múltiple.

Para la realización de los ajustes se consideraron tamaños de fisura pequeños, de hasta 1/3 del diámetro, que son las fisuras que más interesa detectar e identificar, y todas las formas del frente de la fisura (desde recto a semicircular). En estas condiciones, los mejores ajustes se consiguieron con polinomios de grado 3 en  $\alpha$  y grado 7 en  $\beta$  para flexión con un coeficiente  $R^2 = 0,99994$ ; de grado 4 en  $\alpha$  y grado 6 en  $\beta$  para tracción con  $R^2 = 0,99981$ ; y de grado 4 en  $\alpha$  y grado 6 en  $\beta$  para flexo-tracción con  $R^2 = 0,99976$ . Los coeficientes de estos ajustes se muestran en las tablas 1, 2 y 3.

$C_{ij}^{mm}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	-0.0328	0.0014	1.2435	0.05570	11.3679	0.2236	82.4508
1	0.0012	-0.0056	-0.0313	-0.6587	-0.0843	-18.9255	-1.4211	-86.3086
2	-0.0085	0.035	0.2073	-0.2349	0.7227	15.9576	11.1389	44.4635
3	0.0278	-0.0171	-0.7672	0.2397	-3.8517	-5.2378	-41.8703	-8.5513

Tabla 1: Coeficientes del ajuste polinómico de  $\bar{\lambda}_{mm}$

$C_{ij}^{nn}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0.0008	-0.1517	4.4186	-2.019	20.016	-299.777	104.1732
1	-0.0046	0.0456	-7.0627	15.019	-1.6792	241.0547	-358.253
2	0.038	-0.033	5.4707	-51.227	6.4728	-74.6371	595.4268
3	-0.1247	0.167	-1.6481	83.7178	-50.418	4.1969	-477.628
4	0.197	-1.325	0.4738	-65.826	178.395	-14.6255	148.1668

Tabla 2: Coeficientes del ajuste polinómico de  $\bar{\lambda}_{nn}$

$C_{ij}^{nn}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0.0003	-0.0349	1.6454	-0.882	8.3763	-112.895	44.6274
1	-0.0013	0.0091	-2.4681	6.8427	-0.4015	90.0169	-158.978
2	0.0121	-0.0114	1.7664	-23.501	1.8414	-27.3414	268.2113
3	-0.0373	0.0561	-0.4905	37.6298	-17.399	1.4009	-215.887
4	0.0522	-0.5028	0.2049	-28.61	66.0451	-5.6851	66.8426

Tabla 3: Coeficientes del ajuste polinómico de  $\bar{\lambda}_{mn}$

Asimismo, se han analizado los errores, mostrados en las figuras 6, 7 y 8, cometidos en la estimación de la flexibilidad calculados como:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\lambda}_{ajus} - \bar{\lambda}_{calc}}{\bar{\lambda}_{calc}} \quad (29)$$

Siendo  $\bar{\lambda}_{calc}$  los valores de la flexibilidad obtenida con la integración de los factores de intensidad de tensiones, y  $\bar{\lambda}_{ajus}$  los obtenidos a partir de las expresiones polinómicas de la flexibilidad (ecuaciones 26, 27 y 28).

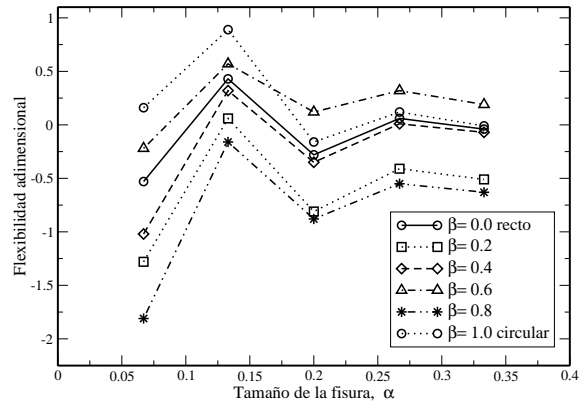


Figura 6: Errores en la estimación de  $\bar{\lambda}_{mm}$

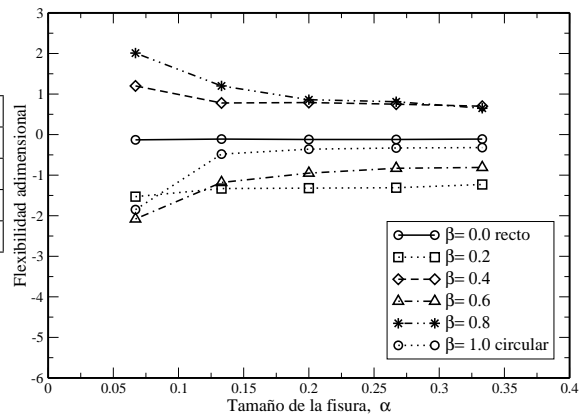


Figura 7: Errores en la estimación de  $\bar{\lambda}_{nn}$

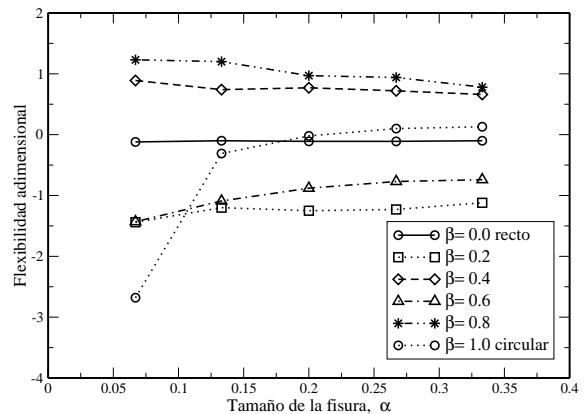


Figura 8: Errores en la estimación de  $\bar{\lambda}_{mn}$

Del análisis de los errores se puede concluir que los polinomios de ajuste obtenidos estiman muy bien, con errores prácticamente en todos los casos inferiores al 2%, la flexibilidad para los tres casos considerados para cualquiera que sea la forma del frente de fisura (desde recto a semicircular). Esto es así para tamaños de fisura pequeños, es decir, para fisuras incipientes cuya determinación e identificación resulta un tema de gran interés.

Por último se ha realizado una comparación, figura 9, entre los valores obtenidos con la función de flexibilidad para flexión propuesta en este trabajo y la propuesta por

Shih y otros [4].

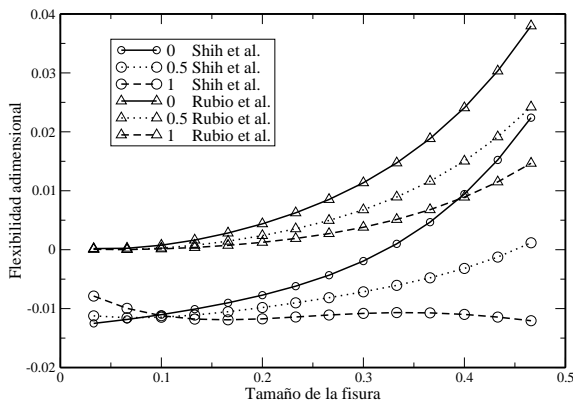


Figura 9: Valores obtenidos con distintas funciones de flexibilidad

De la gráfica 9, se puede concluir que la función de flexibilidad propuesta en este trabajo mejora considerablemente otras funciones propuestas con anterioridad [4], en las que la flexibilidad tomaba valores negativos prácticamente en la totalidad de las formas de frente y en tamaños de fisura pequeños.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han obtenido expresiones polinómicas para las funciones de flexibilidad para tracción, flexión y flexo-tracción de un eje fisurado con sección transversal cilíndrica y con una fisura transversal de frente semi-elíptico. Para llegar a estos resultados se ha partido de las expresiones polinómicas del factor de intensidad de tensiones propuestos previamente en la literatura, realizándose la integración numérica de los mismos a lo largo del frente semi-elíptico caracterizado por los parámetros de forma y profundidad de la fisura. Los resultados obtenidos indican que la flexibilidad aumenta con frentes de fisura rectos, por tanto la utilización de estos valores es conservadora, lo que en términos de estimación de vida útil es perjudicial frente a la utilización de los valores correspondientes a fisuras semi-elípticas. El ajuste de las funciones de flexibilidad a partir de los valores de estas integraciones se ha realizado mediante técnicas de regresión lineal múltiple. Los polinomios obtenidos como expresión de los coeficientes de flexibilidad, aproximan muy bien los valores de la misma como se ha podido demostrar con el cálculo de los errores. De la comparación con otras expresiones de flexibilidad de la literatura se puede concluir que las expresiones propuestas mejoran la estimación para tamaños de fisura pequeños.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Ministerio de Educación y Ciencia la financiación para la realización de este trabajo a través del proyecto DPI2006-09906.

#### REFERENCIAS

- [1] R. Gasch, Dynamic behaviour of a simple rotor with a cross-sectional crack, *Vibrations in rotating machinery, ImechE Conference paper, C178/76*, 1976.
- [2] A.D. Dimarogonas, C. Papadopoulos, Vibrations of cracked shafts in bending, *Journal of Sound and Vibration* 91, pp. 583–593, 1983.
- [3] C.A. Papadopoulos, A.D. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, *Journal of Sound and Vibration* 117 (1), pp. 81–93, 1987.
- [4] Y-S. Shih, J-J. Chen, Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft, *International Journal of Fatigue* 19, pp. 477–485, 1997.
- [5] C.S. Shin, C.Q. Cai, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending, *International Journal of Fracture* 129, pp. 239–264, 2004.
- [6] T.M. Tharp, A finite element for edge-cracked beam columns, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, pp. 1941–1950, 1987.
- [7] A. Carpinteri, Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars, *Engineering Fracture Mechanics* 42, pp. 1035–1040, 1992.
- [8] N. Álvarez, B. González, J.C. Matos, J. Toribio, Factores de intensidad de tensiones y propagación de fisuras por fatiga en geometrías cilíndricas, *Anales de mecánica de la fractura* (23), pp. 333–338, 2006.
- [9] N. Couroneau, J. Royer, Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I, *International Journal of Fatigue* 20, pp. 711–718, 1998.
- [10] M.A. Astiz, An incompatible singular elastic element of two- and three-dimensional crack problems, *International Journal of Fracture* 31, pp. 105–124, 1986.
- [11] Y-S. Shih, J-J. Chen, The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft, *Nuclear Engineering and Design* 214, pp. 137–145, 2002.