

**ROTURA EN MODO MIXTO DE PMMA A -60°C PRODUCIDA POR ENTALLAS EN U****F. J. Gómez<sup>1</sup>, M. Elices<sup>1</sup>, F. Berto<sup>2</sup>, P. Lazzarin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Ciencia de Materiales, E.T.S. de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, C/ Profesor Aranguren s/n,  
28040 Madrid, España.  
E-mail: jgomez@mater.upm.es

<sup>2</sup>Department of Management and Engineering,  
University of Padova  
Stradella S.Nicola 3.  
36100 Vicenza (Italy)

**RESUMEN**

El objetivo de la presente comunicación es desarrollar un procedimiento que permita predecir la rotura de geometrías entalladas en U, sometidas a sollicitación en modo mixto, en materiales elástico-lineales. Para ello se proponen dos teorías: el criterio de densidad de energía crítica media y el modelo cohesivo. Los dos modelos predicen la carga máxima que soporta un sólido entallado sometido a distintos tipos de sollicitación. Para verificar el procedimiento, se ha llevado a cabo un programa experimental de ensayos de rotura por flexión en tres puntos de probetas entalladas en U de PMMA a -60°C. En todos los casos las predicciones de los modelos propuestos concuerdan con los valores experimentales obtenidos.

**ABSTRACT**

The purpose of this investigation is to analyze a method that predicts the failure of geometries with U-notches in linear elastic materials under mixed mode sollicitation. Two models have been proposed: the strain energy density criterion and the cohesive model. Both of them predict the maximum load that support a U-notched solid subjected to several type of sollicitation. In order to verify the method, an experimental program of U-notched solid fracture test has been carried out in PMMA at -60°C. In all cases predictions of the proposed models agree with experimental values.

**PALABRAS CLAVE:** Entallas en U, modo mixto, PMMA.

**1. INTRODUCCIÓN**

Los elementos estructurales con defectos geométricos tipo entalla son elementos débiles con alto riesgo de rotura frágil. Para garantizar su integridad, es necesario un procedimiento que permita evaluar la carga máxima que resisten. Cuando el defecto que origina la rotura es una fisura, el valor máximo de la carga se calcula a partir de la singularidad tensional; en un material elástico y lineal, la fisura se propaga cuando el factor de intensidad de tensiones es igual a la tenacidad de fractura del material [1]. En una geometría lisa, sin defectos, la carga máxima se obtiene cuando la tensión alcanza la resistencia a tracción. Las entallas son casos intermedios entre los dos límites anteriores, donde la Mecánica de Fractura y el análisis tradicional de estructuras no son aplicables y son necesarios criterios alternativos.

Para resolver este problema se han propuesto diferentes modelos y teorías de rotura [2-7], entre las que se encuentra el criterio de rotura de densidad de energía crítica media [8-10] y la teoría de la fisura cohesiva

[11]. Las teorías propuestas han sido verificadas en entallas en forma de U y de V, en materiales frágiles y cuasifrágiles y sollicitación en modo I. Bajo sollicitación en modo mixto el problema es más complejo, la máxima tensión principal mayor no se produce en el plano de simetría de la probeta y su posición depende de la relación entre los factores de intensidad de tensiones generalizados correspondientes a modo I y modo II.

En el presente trabajo se proponen dos procedimientos para calcular la carga máxima que resiste una geometría entallada: el criterio de densidad de energía crítica [8-10] y la teoría de la fisura cohesiva [11]. Los dos criterios dependen exclusivamente de dos parámetros: la tenacidad y la resistencia a tracción.

En sólidos entallados en U en materiales frágiles o cuasifrágiles, solamente existen en la bibliografía resultados correspondientes a sollicitación en modo I. Los autores han llevado a cabo un programa experimental de ensayos de rotura por flexión en tres puntos de probetas entalladas en U sometidas a

solicitación en modo mixto, en polimetilmetacrilato, PMMA, a  $-60^{\circ}\text{C}$ .

A continuación se analizan las dos teorías propuestas, se expone el programa experimental realizado, y se comparan las predicciones teóricas de ambos modelos, que concuerdan con los resultados experimentales.

## 2. CRITERIO DE DENSIDAD DE ENERGÍA CRÍTICA

Lazzarin y Berto [8-10] han propuesto el criterio de densidad de energía crítica media para estudiar la rotura producida por entallas en materiales frágiles. Según este criterio, la carga máxima se produce cuando el valor medio de la densidad de energía sobre una zona próxima a la raíz de la entalla alcanza un valor crítico,  $W_c$ . La región en la que se calcula la media tiene forma circular con espesor constante,  $R_0$ , independientemente de la geometría y del tipo de sollicitación.

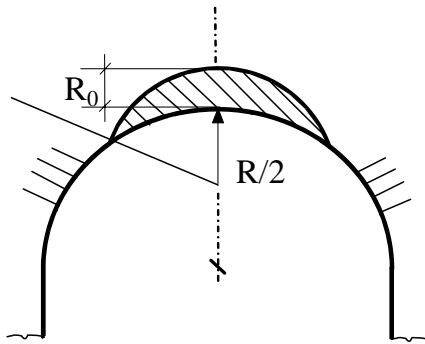


Figura 1. Región crítica donde se calcula el valor medio de la densidad de energía en entallas en U en modo I

En una entalla en forma de U, de radio R, sometida a sollicitación en modo I, la zona crítica es una lúnula circular centrada en el eje de simetría y cuyo centro dista  $R/2$  de la raíz de la entalla [9]. Dicho centro coincide con el origen de coordenadas del campo tensional inicialmente propuesto por Creager y Paris [12] para entallas en U y desarrollado posteriormente para cualquier valor del ángulo de entalla por Lazzarin y Tovo [13].

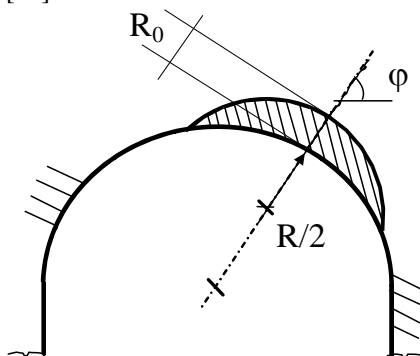


Figura 2. Región crítica donde se calcula el valor medio de la densidad de energía en entallas en U en modo mixto.

En modo mixto la aplicación del criterio se ha realizado girando la zona crítica (figura 2) de tal modo que el centro de la lúnula quede alineado con el punto del contorno donde se produce la máxima tensión principal mayor y con el centro de la entalla. La transformación mantiene la forma y el espesor  $R_0$ .

El criterio de densidad de energía crítica media requiere dos constantes del material  $R_0$  y  $W_c$  que se determinan a partir del valor de la tenacidad,  $K_{IC}$ , y la resistencia a tracción,  $\sigma_u$ , [7-10]. La densidad de energía crítica media  $W_c$  es:

$$W_c = \frac{I \sigma_u^2}{2 E} \quad (1)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material. El valor de  $R_0$  se determina en deformación plana, a partir de la siguiente expresión [7]:

$$R_0 = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_u} \right)^2 \quad (2)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. En tensión plana la expresión correspondiente es [9]:

$$R_0 = \frac{(5-3\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_u} \right)^2 \quad (3)$$

La carga máxima que resiste una geometría entallada, según predice este criterio de rotura, se obtiene modelizando el problema numéricamente por el método de los elementos finitos. El código comercial empleado en los cálculos ha sido ANSYS 9.0<sup>®</sup>. Para todas las geometrías analizadas se han realizado dos modelizaciones. Un primer cálculo para determinar el punto del contorno de la entalla donde se produce la máxima tensión principal mayor, y un segundo con una malla que incluye la región crítica en forma de lúnula. En esta segunda malla se ha obtenido el valor de la carga aplicada que da lugar a la densidad de energía crítica.

## 3. MODELO COHESIVO

El modelo cohesivo o la teoría de la fisura cohesiva caracteriza el proceso de daño que precede a la fractura como una fisura que transmite cargas entre sus labios. La tensión transmitida está relacionada con el desplazamiento de apertura de dichos labios a través de una función del material, denominada curva de ablandamiento [14-17].

La fisura cohesiva se inicia cuando la máxima tensión principal alcanza un valor crítico denominado resistencia cohesiva  $f_t$ . A partir de ese momento se forma una fisura capaz de transmitir cargas,

perpendicular a la dirección principal correspondiente a la máxima tensión. Cuando la carga se aplica de forma monótona, sin cambiar las condiciones de contorno durante el ensayo se puede comprobar que la tensión transmitida,  $\sigma$ , es normal al plano de la fisura y es función exclusivamente del desplazamiento de apertura  $w$  [18].

El material queda caracterizado por la ecuación constitutiva y la curva de ablandamiento que gobierna el comportamiento de la zona cohesiva. En este trabajo se propone una curva de ablandamiento sencilla, la curva rectangular, dependiente de dos parámetros, la resistencia cohesiva  $f_t$  y el área bajo la curva, la energía de fractura  $G_F$ . Se ha tomado como resistencia cohesiva la resistencia a tracción y la energía de fractura se ha obtenido a partir de la tenacidad del material de fractura del material  $K_{IC}$ .

$$G_F = \frac{K_{IC}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (4)$$

La aplicación del modelo a geometrías entalladas, permite predecir la carga de rotura de elementos de cualquier forma, tamaño y tipo de sollicitación. Al igual que en el criterio de densidad de energía crítica, todas las geometrías estudiadas se han modelado numéricamente por el método de los elementos finitos, empleando el código COFE, desarrollado en el departamento de Ciencia de los Materiales de la Universidad Politécnica de Madrid por los profesores Jaime Planas y José María Sancho.

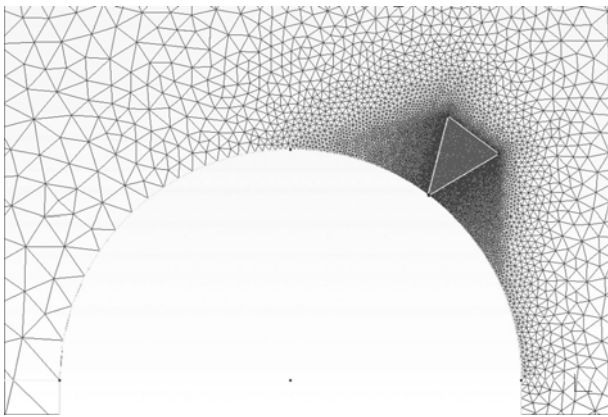


Figura 3. Detalle de las mallas empleadas en los cálculos con la teoría de la fisura cohesiva. ( $R=1$  mm)

Como se ha indicado en los párrafos anteriores, la fisura cohesiva se inicia donde la máxima tensión principal se iguala a la resistencia cohesiva  $f_t$ , y la dirección de la fisura es perpendicular a la dirección principal correspondiente a dicha tensión principal. La posición y la dirección inicial de la fisura cohesiva son conocidas aunque no lo es su evolución posterior. Por este motivo, en el punto de máxima tensión se ha introducido una región en forma de triángulo isósceles, cuyo ángulo desigual es  $45^\circ$  y su altura es paralela a la dirección de

fisuración inicial. Esta zona se ha mallado con elementos triangulares especiales en los que se ha implementado la teoría de la fisura cohesiva por medio de la técnica de la fisura embebida [19]. Las mallas están formadas por elementos triangulares lineales cuyo tamaño se ha disminuido en la zona fisurable ( $4 \mu\text{m}$ ). Todos los cálculos son bidimensionales en deformación plana.

#### 4. PROGRAMA EXPERIMENTAL

El material elegido para realizar esta investigación ha sido polimetilmetacrilato (PMMA), un polímero amorfo y transparente con comportamiento elástico y lineal hasta rotura a  $-60^\circ\text{C}$ . Las propiedades mecánicas de este material se recogen en la tabla 1 [11]

Tabla 1. Propiedades mecánicas del PMMA a  $-60^\circ\text{C}$ .

Módulo de elasticidad	$E =$	$5.05 \pm 0.04$ GPa
Resistencia a tracción	$\sigma_u =$	$128.4 \pm 0.1$ MPa
Tenacidad de fractura	$K_{IC} =$	$1.7 \pm 0.1$ MPa $\text{m}^{1/2}$
Coefficiente de Poisson	$\nu =$	$0.40 \pm 0.01$

Se ha llevado a cabo un amplio programa experimental de ensayos de rotura por flexión en tres puntos de probetas entalladas en U con distintos radios y diferentes tipos de sollicitación. La forma, dimensiones y modo de aplicación de la carga aparecen en la figura 4. En todos los casos el espesor,  $B$ , fue 14 mm, la profundidad de entalla,  $a$ , 14 mm, y el canto,  $W$ , 28 mm.

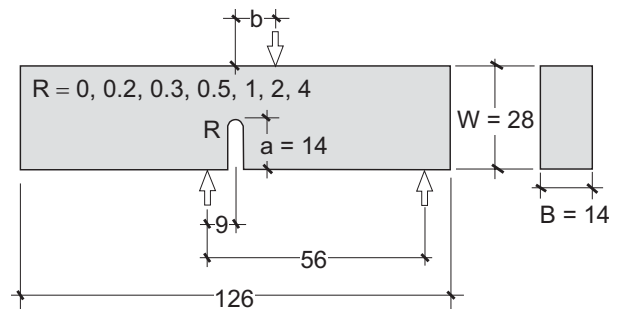


Figura 4. Geometría y sistema de aplicación de carga. Cotas en mm ( $b=9, 18, 27$  y  $36$  mm).

Con objeto de conseguir diferentes tipos de sollicitación, se varió la posición del punto de aplicación de carga (figura 4), considerando cuatro valores de la distancia de dicho punto al eje de simetría de la probeta,  $b = 9, 18, 27, 36$  mm. En los cuatro tipos de sollicitación anteriores se estudiaron 7 valores distintos del radio del fondo de entalla  $R = 0, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0$  y  $4.0$  mm. Para cada configuración se ensayaron 3 probetas, llevando a cabo 84 ensayos de rotura.

Las entallas se mecanizaron con herramientas específicamente diseñadas para cada radio. Para evitar

que durante el mecanizado la temperatura en la raíz fuera elevada, el corte se realizó de forma escalonada y lenta. El avance de la profundidad de entalla en los cinco últimos escalones de corte fue de 0.1 mm, refrigerando de forma continua con agua con taladrina.

Los ensayos se realizaron en una máquina servohidráulica Instron 8803, midiendo la carga aplicada, con una célula de carga Instron de 5/10 kN de capacidad con un error de  $\pm 0.5\%$  del fondo de escala; y el desplazamiento del punto de aplicación de carga con un inductivo MTS de  $\pm 1$  mm de recorrido con un error 0.15% del fondo de escala. El dispositivo de ensayo se colocó en el interior de una cámara ambiental Instron a  $-60^\circ\text{C}$ . La medida de la temperatura se realizó con un termopar tipo K colocado en la superficie de las probetas próximo a la zona central.

Para conseguir la temperatura de  $-60^\circ\text{C}$  todos los ensayos se llevaron a cabo en tres fases: una primera fase de enfriamiento, realizada en control de carga, durante 30 minutos de duración aproximadamente, una segunda fase de estabilización de la temperatura durante 45 minutos también en control de carga, y por último el ensayo de rotura en control de desplazamiento manteniendo constante la temperatura. En esta última fase la velocidad de ensayo fue de 0.05 mm/min.

## 5. RESULTADOS

A partir de las constantes del material que aparecen en la tabla 1 se han calculado los parámetros del criterio de densidad de energía crítica y de la teoría de la fisura cohesiva.

Tabla 2. Parámetros de las teorías de rotura aplicadas.

$W_c =$	1.69 MJ/m <sup>3</sup>
$R_0 =$	0.035 mm
$f_t =$	128 MPa
$G_F =$	480 N/m

Todas las geometrías del apartado anterior se han modelizado por el método de los elementos finitos, realizando tres mallas para cada una de ellas. En un primer cálculo se ha obtenido el punto del contorno de la entalla donde se produce la máxima tensión principal. La posición de este punto queda determinada por el ángulo  $\varphi$ , definido en la figura 2. Dicho valor aparece en la tabla 3, donde se compara con los valores experimentales medios observados en las probetas rotas.

Conocido el valor del punto de iniciación de la rotura se han construido dos nuevas mallas: una primera con una lúnula sobre la entalla, alrededor del punto de iniciación de la rotura, para aplicar el criterio de densidad de

energía crítica; y una segunda con una región triangular en el mismo punto y elementos especiales donde se ha implementado la teoría de la fisura cohesiva.

Tabla 3. Punto de iniciación en el contorno de la entalla.

R [mm]	b [mm]	$\varphi$ Exp	$\varphi$ FEM
4	36	35.6	35.0
4	27	34.0	35.0
4	18	36.1	34.8
4	9	27.8	28.0
2	36	36.0	36.5
2	27	37.0	37.0
2	18	36.3	36.5
2	9	30.9	31.0
1	36	38.6	37.3
1	27	37.0	38.3
1	18	38.1	37.8
1	9	34.8	33.1
0.5	36	38.2	38.0
0.5	27	37.0	38.1
0.5	18	37.0	38.0
0.5	9	33.1	34.2
0.3	36	44.7	38.0
0.3	27	45.8	38.0
0.3	18	46.3	38.0
0.3	9	34.8	35.0
0.2	36	35.5	38.0
0.2	27	36.0	39.0
0.2	18	39.3	37.8
0.2	9	39.8	37.8
0	36	39.2	41.5
0	27	43.1	41.5
0	18	40.4	42.0
0	9	37.3	40.0

Los resultados de los cálculos numéricos realizados se han comparado con los valores experimentales de carga máxima obtenidos, encontrando una buena concordancia entre ambos. (Figura 5)

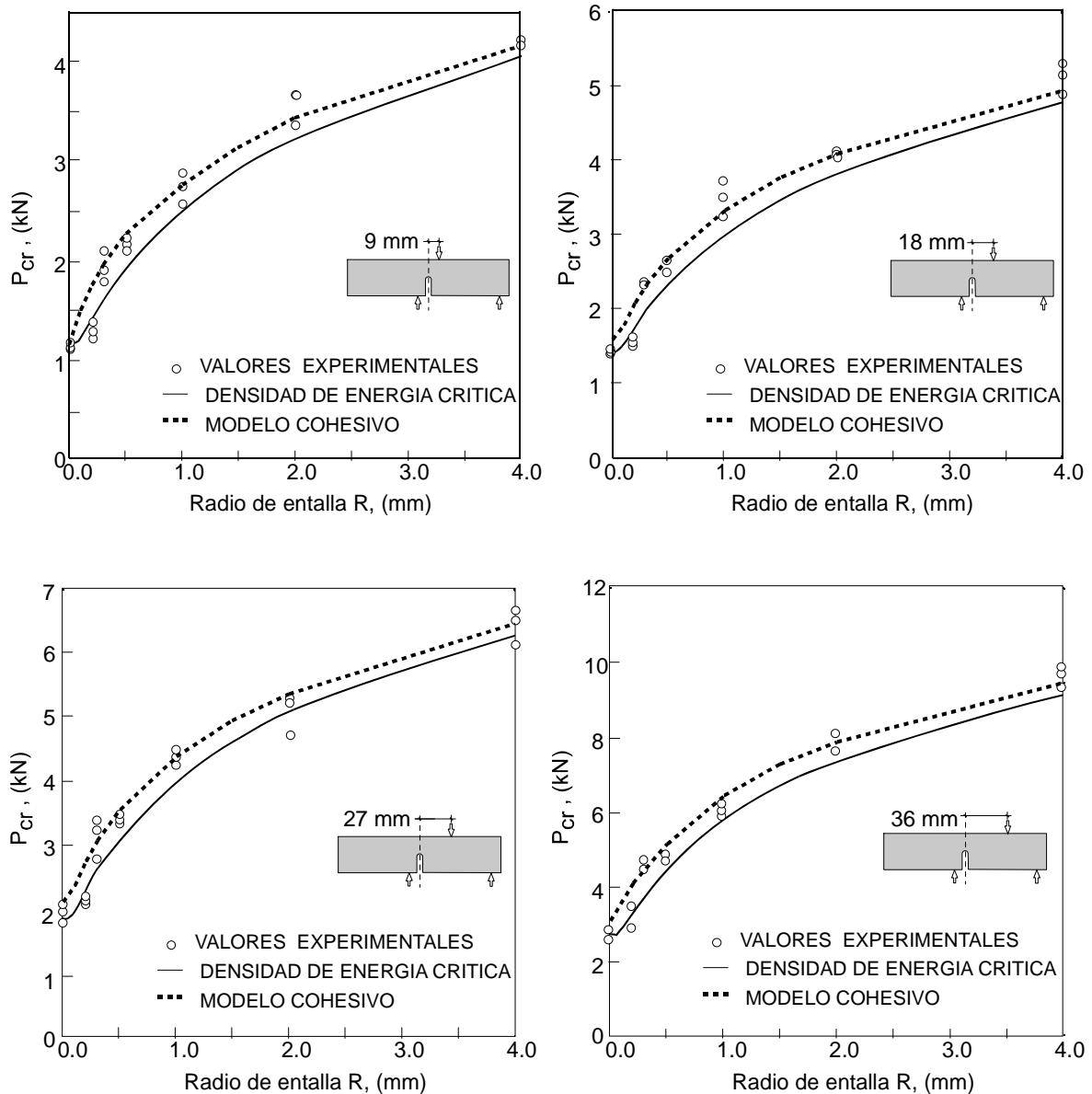


Figura 5. Valores numéricos y experimentales de la carga de rotura para distintos valores del radio de entalla y del punto de aplicación de carga.

## 6. CONCLUSIONES

Las dos teorías analizadas predicen el comportamiento mecánico en rotura de sólidos entallados en U en modo mixto en PMMA a  $-60^{\circ}\text{C}$ . Aportan dos procedimientos para predecir la carga máxima que soporta un sólido entallado de material elástico lineal sometido a cualquier tipo de sollicitación.

Se ha llevado a cabo un programa experimental compuesto por 84 ensayos de rotura por flexión en tres puntos de probetas entalladas en U, donde se han considerado 4 tipos de sollicitación y en cada uno de ellos 7 valores del radio de entalla.

El criterio de densidad de energía crítica media y la teoría de la fisura cohesiva han sido extendidas a entallas en U bajo sollicitación en modo mixto.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Ciencia la financiación recibida a través del proyecto ENE2005-06478/CON

## REFERENCIAS

- [1] Elices M., "Mecánica de la Fractura aplicada a sólidos elásticos bidimensionales", Departamento

- de Ciencia de Materiales. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. U.P.M. (1996).
- [2] Carpinteri, A., "Stress singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners", *Engineering Fracture Mechanics*, 26, pag 143-155, 1987.
- [3] Dini, D., Hills, D., "Asymptotic characterisation of nearly-sharp notch root stress fields", *International Journal of Fracture*, 130, pag. 651-666, 2004.
- [4] Seweryn, A., "Brittle fracture criterion for structures with sharp notches", *Engineering Fracture Mechanics*, 47, pag 673-681, 1994.
- [5] Taylor, D., "Predicting the static strength of ceramic materials", *Engineering Fracture Mechanics*, 71, pag 2407-2416, 2004.
- [6] Leguillon, D., "Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch", *European Journal of Mechanics and Physics A/Solids*, 21, pag 61-72, 2002.
- [7] Yosibash, Z., Bussiba, A. and Gilad, I., "Fracture criteria for brittle elastic materials", *International Journal of Fracture*, 125, pag 307-333, 2004.
- [8] Lazzarin, P., Zambardi, R., "A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped notches", *International Journal of Fracture*, 112, pag 275-298, 2001.
- [9] Lazzarin, P., Berto, F., "From Neuber's elementary volume to Kitagawa and Atzori's diagrams: an interpretation based on local energy", *International Journal of Fracture*, 135, pag L33-L38, 2005.
- [10] Berto, F., Lazzarin, P., "Relationships between J-integral and the strain energy evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt V-notches", *International Journal of Solids and Structures*, (in press).
- [11] Gómez, F.J., Elices, M., Planas, J., "The cohesive crack concept: application to PMMA at  $-60^{\circ}\text{C}$ ", *Engineering Fracture Mechanics*, 72, pag 1268-1285, 2005.
- [12] Creager, M., Paris, P.C., "Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking", *International Journal of Fracture Mechanics*, 3, pag 247-252, 1967.
- [13] Lazzarin, P., and Tovo, R., "A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches", *International Journal of Fracture*, 78, pag 3-19, 1996.
- [14] Dugdale, D.S., "Yielding of steel sheets containing slits", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 8, pag 100-108, 1960.
- [15] Barenblatt, G.I., "The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture", *Advance Applied Mechanics*, 7, pag 55-129, 1962.
- [16] Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement Concrete Res*, 6, pag 773-782, 1976.
- [17] Elices, M., Guinea, G.V., Gómez, F.J., Planas, J., "The cohesive zone model: advantages limitations and challenges", *Engineering Fracture Mechanics*, 69, pag 137-163, 2002.
- [18] Gálvez, J.C., Cendón, D.A., Planas, J. "Influence of shear parameters on mixed-mode fracture of concrete", *International Journal of Fracture*, 118, pag 163-189, 2002.
- [19] Sancho, J.M., Planas, J., Cendón, D.A., Reyes, E. and Gálvez, J.C., "An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture", *Engineering Fracture Mechanics*, 74, pp. 75-86, 2007.