

DESARROLLO Y APLICACIONES MESOMECAÑICAS EN HORMIGÓN DE UNA LEY CONSTITUTIVA DE JUNTA CON ENVEJECIMIENTO

C.M. López¹, A. Idiart¹, I. Carol¹

¹ Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartográfica y Geofísica
ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, 08034 Barcelona. España
E-mail: carlos.maria.lopez@upc.edu, ignacio.carol@upc.edu, andres.idiart@upc.edu

RESUMEN

En el análisis numérico del comportamiento mecánico de materiales cuasifrágiles mediante el MEF, con frecuencia resulta conveniente el empleo de elementos junta sin espesor. Este trabajo se centra en la incorporación de los efectos del envejecimiento, para lo cual se ha desarrollado una ley constitutiva de junta basada en la teoría de la elasto-plasticidad, que utiliza conceptos de la Mecánica de Fractura a fin de establecer el reblandecimiento debido al trabajo disipado en fractura, e incorpora el tiempo como variable para simular el aumento de resistencia (madurez). En primer lugar se presenta la formulación detallada de la ley constitutiva y un ejemplo de verificación. A continuación se presentan aplicaciones a nivel mesoestructural en 2D para hormigón. Se muestran resultados del ensayo de compresión uniaxial en condiciones cuasi-estáticas a distinta edad de carga y, finalmente, se presentan resultados de la retracción por secado del hormigón mediante un análisis acoplado higro-mecánico (HM).

ABSTRACT

In the numerical analysis of the mechanical behavior of quasi-brittle materials using FEM, the use of *zero-thickness* interface elements is often of convenience. In this work, the incorporation of the aging effects into the analysis is presented. To this end, an elasto-plasticity based constitutive law has been developed, in which concepts from Fracture Mechanics are introduced in order to establish the softening behavior due to the work dissipated in fracture processes, and time is incorporated in the model to simulate increasing strength with time (maturity effect). First, a detailed description of the formulation of the constitutive law is presented, along with a verification example. In addition, some applications at a meso-level for concrete in 2D are also included. Results from the simulation of several uniaxial compression tests for different loading ages, carried out under quasistatic conditions, are shown. Finally, an application to a coupled hygro-mechanical (HM) analysis of the drying shrinkage of concrete is presented.

PALABRAS CLAVE: Ley constitutiva de junta, Fractura en hormigón, Mesoestructura.

1. INTRODUCCIÓN

En el análisis numérico de problemas ingenieriles mediante el método de los elementos finitos (MEF), con frecuencia resulta conveniente el empleo de elementos junta sin espesor a fin de representar adecuadamente las discontinuidades y la fisuración. Este tipo especial de elemento permite integrar de un modo natural el "*Fictitious Crack Model*" (modelo de la fisura ficticia) de Hillerborg [1]. Las estructuras de hormigón fisuradas conservan aún una capacidad resistente considerable a causa de algunos fenómenos localizados en las discontinuidades, tales como el comportamiento de reblandecimiento, deslizamientos friccionales o entrelazamientos de áridos. La bibliografía recoge diferentes propuestas de leyes de interfases con acoplamiento de los efectos normal/corte y que incorporan conceptos de fractura [2-5]. Dentro del grupo de investigación de la UPC se ha trabajado intensamente desde hace años en el desarrollo de leyes constitutivas de interfase. En este trabajo la atención se

centra en la incorporación en el modelo de los efectos del envejecimiento y su aplicación en el análisis mesomecánico de algunos aspectos del comportamiento diferido del hormigón.

En la sección 2 se presenta en detalle la formulación de la ley de junta, cuya verificación se muestra en la sección 3. Luego, la ley constitutiva se emplea en elementos junta que se incluyen en estudios específicos del hormigón a nivel meso-estructural 2D mediante el MEF. En la sección 4.1 se muestran resultados de ensayos de compresión uniaxial en condiciones cuasi-estáticas a distinta edad de carga, y en la sección 4.2 se presentan resultados de la retracción por secado del hormigón mediante un análisis acoplado higro-mecánico (HM) del problema de difusión no lineal de humedad en el mortero. El acoplamiento HM se ha implementado mediante una estrategia en "*staggered*", en la que se emplea una misma malla de EF para ambos problemas.

2. LEY CONSTITUTIVA DE JUNTA

La ley constitutiva de junta con envejecimiento tiene como punto de partida una formulación propuesta originalmente en [6], posteriormente modificada y mejorada en [7-8]. El comportamiento está formulado en términos de las componentes normal y tangencial de las tensiones en el plano medio de la junta, $\sigma = [\sigma_N, \sigma_T]^t$ y los desplazamientos relativos correspondientes $u = [u_N, u_T]^t$ (t = transpuesta). El modelo, basado en la teoría de la elasto-plasticidad, utiliza conceptos de la Mecánica de Fractura a fin de establecer el reblandecimiento debido al trabajo disipado en fractura, e incorpora el tiempo como variable para tener en cuenta el aumento de resistencia con el paso del tiempo. La superficie de rotura se define mediante una hipérbola de tres parámetros en el espacio de las tensiones, expresada de la siguiente forma:

$$\sigma_T^2 - (c - \sigma_N \cdot \tan \phi)^2 + (c - \chi \cdot \tan \phi)^2 \tag{1}$$

donde χ es la resistencia a tracción y los parámetros c y $\tan \phi$ de la asíntota representan la cohesión aparente y el ángulo de fricción interna, respectivamente. Los valores iniciales de las variables de estado, $\chi_0(t_0)$, $c_0(t_0)$ y $\tan \phi_0$, son constantes que determinan una configuración inicial de la superficie de rotura representada por la curva "0" en la Fig. 1. Una vez iniciada la fisuración, la superficie de rotura se contrae mediante el decrecimiento de los parámetros de la hipérbola en función de unas leyes basadas en el trabajo consumido en procesos de fractura, W^{cr} . Para controlar el proceso de evolución de F , el modelo también posee dos parámetros que representan la energía de fractura clásica en modo I, G_F^I (tracción pura) y un segundo modo denominado Modo IIa definido bajo corte y alta compresión sin dilatancia, G_F^{IIa} . Para tracción pura la superficie de rotura final viene dada por una hipérbola con vértice en el origen (curva "2" en la Fig. 1). En el estado de evolución final para el cual $c = 0$ y $\tan \phi = \tan \phi_r$, la superficie de fractura queda definida por un par de líneas rectas que representan un estado de fricción pura residual (curva "3" en la Fig. 1).

Para tener en cuenta la madurez del material (aumento de resistencia con el paso del tiempo detectado en ensayos experimentales), se introduce el tiempo como variable de evolución de los parámetros χ , c , y G_F^I del modelo (G_F^{IIa} se adopta proporcional a G_F^I) mediante una función exponencial (Fig. 2), expresada por:

$$f = A \cdot f(t_0) \cdot \left[1 - \exp \left(-k \cdot \left(\frac{t}{t_0} \right)^p \right) \right]; A = (1 - e^{-k})^{-1} \tag{2}$$

en la cual p y k son dos coeficientes que permiten controlar la forma de la curva y la ubicación del punto

de inflexión $t_0 = 28$ días (edad a la que habitualmente se refieren las propiedades mecánicas del hormigón). De esta manera, la superficie de rotura para una determinada edad inicial de carga se expande con el tiempo como se muestra en la curva "1" de la Fig. 1. Por lo tanto, la posición actualizada de la superficie de rotura dependerá de la combinación resultante de la evolución del estado de cargas y el paso del tiempo. El modelo es no asociado y la dilatancia disminuye progresivamente con el nivel de compresión y con la degradación de la junta, efectos que son tenidos en cuenta mediante una reducción de la componente normal de la regla de flujo.

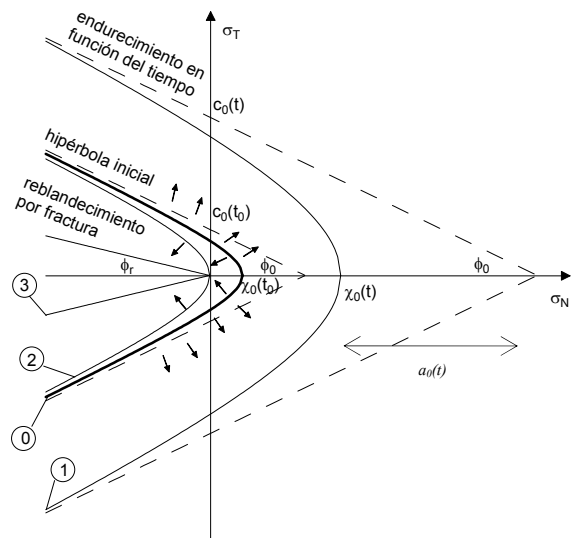


Figura 1. Evolución de la superficie de rotura: reblandecimiento por trabajo de fractura y aumento de resistencia por paso del tiempo (envejecimiento).

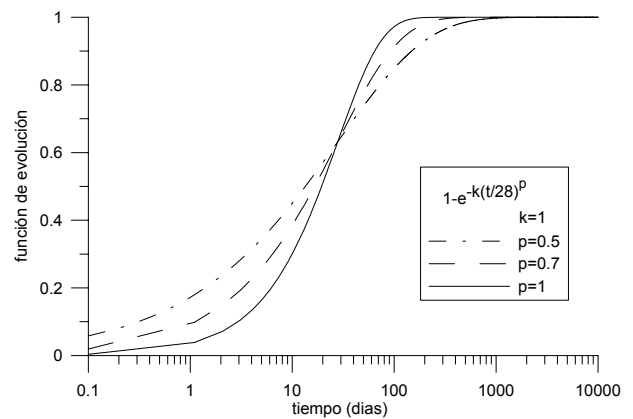


Figura 2. Evolución normalizada de los principales parámetros del modelo en función del tiempo.

2.1. Variable interna basada en el trabajo disipado en el proceso de fractura

El trabajo disipado en procesos de fractura (W^{cr}) se define de la siguiente manera:

$$dW^{cr} = \sigma_N \cdot \delta u_N^{cr} + \sigma_T \cdot \delta u_T^{cr} \quad , \text{ si } \sigma_N \geq 0 \tag{3a}$$

$$dW^{cr} = \sigma_T \cdot \delta u_T^{cr} \cdot \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \cdot \tan \phi}{\sigma_T} \right| \right), \text{ si } \sigma_N < 0 \quad (3b)$$

en las cuales δu_N^{cr} y δu_T^{cr} representan incrementos de desplazamientos relativos de la apertura de fisura en las direcciones normal y tangencial, respectivamente. Estas expresiones implican que en la zona de tracción/corte todo el trabajo disipado en la junta proviene de procesos de fractura, mientras que en la zona de compresión/corte la contribución a W^{cr} viene dada por el trabajo de corte al que se le resta el de fricción pura.

Como los parámetros de energía dependen del tiempo, la variable interna resulta conveniente expresarla de la forma:

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{dW^{cr}}{G_F^I(t)}, \text{ con } 0 \leq \xi_1 \leq 1 \quad (4)$$

Para la evolución de los parámetros que dependen de $dW^{cr}/G_F^{IIa}(t)$, se puede emplear la misma variable interna ya que se ha adoptado por simplicidad una relación constante entre $G_F^{IIa}(t)$ y $G_F^I(t)$ dada por la relación entre los parámetros $G_F^{IIa}(t_0)/G_F^I(t_0)$, lo cual equivale a asumir iguales valores de los coeficientes de la expresión (2).

2.2. Evolución de los parámetros

La evolución de χ y de c se define en función del trabajo disipado en procesos de fractura y el paso del tiempo. La evolución de χ se expresa como:

$$\chi = \chi_0(t) \cdot (1 - S(\xi_\chi)) \quad (5a)$$

en donde:

$$\chi_0(t) = A \cdot \chi_0(t_0) \cdot \left[1 - e^{-k_\chi \cdot (t/t_0)^{p_\chi}} \right] \quad (5b)$$

$$S(\xi_\chi) = \frac{e^{-\alpha_\chi \cdot \xi_\chi}}{1 + (e^{-\alpha_\chi} - 1) \cdot \xi_\chi} ; \xi_\chi = \xi_1 \quad (5c)$$

$$G_F^I(t) = A \cdot G_{F0}^I(t_0) \cdot \left[1 - e^{-k_G \cdot (t/t_0)^{p_G}} \right] \quad (5d)$$

La función S provee una familia de curvas de diferente evolución según el valor del coeficiente α_i que se adopte. Para obtener una adecuada evolución del parámetro c resulta conveniente definirlo indirectamente a través de χ , $\tan \phi$, y el parámetro a que representa la distancia horizontal entre el vértice de la hipérbola actualizada y sus asíntotas (Fig. 1), cuya relación viene dada por la expresión:

$$c = (\chi + a) \cdot \tan \phi \quad (6)$$

Por lo tanto, la evolución de c puede expresarse como:

$$c = (\chi_0(t) \cdot (1 - S(\xi_\chi)) + a_0(t) \cdot (1 - S(\xi_a))) \cdot \tan \phi \quad (7a)$$

en la cual:

$$a_0(t) = A \cdot a_0(t_0) \cdot \left[1 - e^{-k_a \cdot (t/t_0)^{p_a}} \right] \quad (7b)$$

$$\xi_a = \xi_1 \cdot G_F^I(t_0) / G_F^{IIa}(t_0) \quad (7c)$$

En este trabajo se considera un $t_0 = 28$ días (tiempo en el que generalmente se establecen las propiedades mecánicas del hormigón), que es por lo tanto, la edad de referencia de los parámetros de entrada del modelo.

Por su parte, para el ángulo de fricción interna los parámetros $\tan \phi_0$ y $\tan \phi_r$ son independientes del paso del tiempo, y su evolución se define de la siguiente forma:

$$\tan \phi = \tan \phi_0 - (\tan \phi_0 - \tan \phi_r) \cdot S(\xi_\phi) \quad (8a)$$

$$\xi_\phi = \xi_1 \cdot G_F^I(t_0) / G_F^{IIa}(t_0) \quad (8b)$$

2.3. Formulación

Empleando la hipótesis de descomposición aditiva de los desplazamientos relativos totales de la junta, u_i , en una componente reversible (elástica), u_i^{el} , y otra irreversible, u_i^{cr} , la relación constitutiva de la junta viene dada por la expresión:

$$\sigma_i = K_{ij}^0 \cdot u_j^{el} = K_{ij}^0 \cdot (u_j - u_j^{cr}) \quad (9)$$

en donde K_{ij}^0 representa la matriz de rigidez elástica de la junta (matriz diagonal), y en la que para elementos de interfase sin espesor, generalmente sus módulos normal y tangencial se interpretan como coeficientes de penalización con unos valores muy elevados.

La componente irreversible de los desplazamientos relativos puede escribirse como:

$$\delta u_j^{cr} = \delta \lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_j} \quad (10)$$

en la cual el multiplicador plástico, $\delta \lambda$, puede ser determinado a partir del estado de carga actuante, mediante las condiciones de *Kuhn-Tucker*:

$$\delta \lambda \geq 0; \delta F \leq 0; \delta F \delta \lambda = 0 \quad (11)$$

Cuando $\delta \lambda > 0$ (incremento de carga elasto-plástico), la condición de consistencia de *Prager* nos permite establecer que:

$$\delta F = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \right|_{\lambda, t = cte} \cdot \delta \sigma_i - H \Big|_{\sigma, t = cte} \cdot \delta \lambda + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\sigma, \lambda = cte} \cdot \delta t = 0 \tag{12}$$

en la cual:

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{\sigma, t = cte} = - \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \xi_q} \cdot \frac{\partial \xi_q}{\partial u_j^{cr}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_j} \tag{13}$$

es el parámetro de reblandecimiento (*softening*) plástico, y p_i se refiere a los parámetros de la superficie de rotura. Nótese que la ecuación (13) siempre es un valor negativo que provoca una contracción de la superficie F , conducida por la variación de los parámetros de la hipérbola en función de la variable interna. Por su parte, el término:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \tag{14}$$

genera un aumento de resistencia elástica como consecuencia del efecto de envejecimiento de los parámetros χ y c de la hipérbola. Combinando las ecuaciones (9), (10) y (12), podemos expresar el multiplicador plástico como:

$$\delta \lambda = \frac{n_k K_{kj}^0 \cdot \delta u_j + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \cdot \delta t}{H + n_p K_{pq}^0 m_q} ; \mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} ; \mathbf{m} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \tag{15}$$

Finalmente, la ecuación constitutiva que establece la relación entre las tensiones y los desplazamientos relativos de la junta se puede expresar de la siguiente manera:

$$\delta \sigma_i = \left[K_{ij}^0 - \frac{K_{ik}^0 m_k n_l K_{lj}^0}{H + n_p K_{pq}^0 m_q} \right] \cdot \delta u_j - \frac{K_{ij}^0 m_j \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial t} \cdot \delta t}{(H + n_p K_{pq}^0 m_q)} \tag{16}$$

3. VERIFICACIÓN CONSTITUTIVA

Se analiza un ensayo de corte/compresión en el que se aplica en primer término un valor constante de la tensión de compresión (-1 MPa) a las edades de carga de 28 y 280 días y, posteriormente, se incrementa progresivamente el desplazamiento relativo de corte manteniendo constante la compresión. En la Fig. 3 se presentan los resultados en términos de las tensiones y los desplazamientos relativos de corte. Para las curvas de carga instantánea se puede apreciar el comportamiento obtenido, con un mayor valor de pico para la edad t_0 de 280 días, como cabía esperar. Luego del valor máximo se produce una rama de

reblandecimiento que tiende a una tensión de corte residual que corresponde al efecto friccional puro. Por otro lado, para la edad $t_0 = 28$ días, en 3 puntos distintos de su curva de reblandecimiento, se suspende el incremento de carga y se deja transcurrir el tiempo hasta los 280 días, para finalmente retomar el proceso de carga hasta sus valores residuales. Se puede apreciar en la Fig. 3 que en el transcurso del tiempo sin incremento de carga se produce un aumento de resistencia (que se aprecia por ejemplo entre los puntos 4 y 5) debido a la madurez de los parámetros $\chi_0(t)$ y $c_0(t)$, hasta un segundo valor de pico, en cada caso inferior a los valores de reblandecimiento de la curva instantánea de $t_0 = 280$ días, en una mayor relación en la medida que se avanza en la curva de reblandecimiento. Esto es debido a la característica tipo “daño” (irreversible) de la variable interna del proceso, que depende del trabajo disipado en el proceso de fractura y del estado actualizado (función del tiempo) del parámetro de energía de fractura involucrado. En el sector superior derecho de la figura se muestran las superficies de rotura correspondientes a cada uno de los puntos señalados en las curvas.

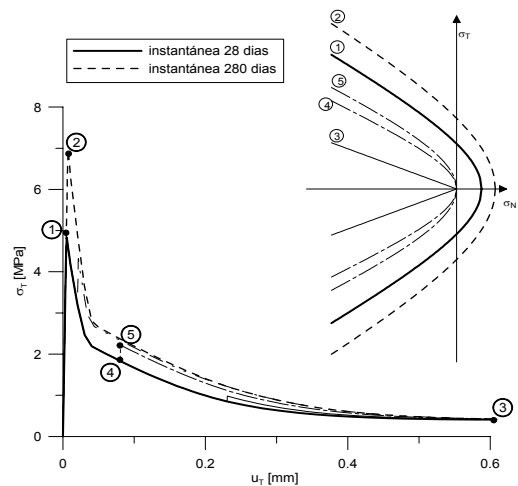


Figura 3. Comportamiento constitutivo de junta en función del tiempo en un ensayo de corte bajo compresión constante.

4. APLICACIONES MESOESTRUCTURALES

El modelo consiste en representar de manera explícita las principales fases componentes de la estructura interna heterogénea del material. Una probeta de hormigón se representa en 2D mediante inclusiones irregulares correspondientes a los áridos de mayor tamaño rodeadas por una matriz representativa del comportamiento del mortero y los áridos de menor tamaño. Los áridos y la matriz se discretizan mediante elementos finitos triangulares, pero mientras que a los áridos se les asigna un comportamiento elástico lineal, para la matriz de mortero se considera una ley constitutiva visco-elástica con envejecimiento mediante el modelo de la “cadena de Maxwell”. A fin de posibilitar la no linealidad de comportamiento,

mecanismos de rotura y fisuración, etc., la malla incluye elementos junta sin espesor que se distribuyen a lo largo de todos los contactos entre elementos árido-mortero (interfase) y entre algunos de los contactos de la matriz, con el fin de representar las principales direcciones potenciales de fisuración. A los elementos junta se les asigna la ley constitutiva con envejecimiento presentada en la sección 2 (a fines comparativos se incluye más adelante un ejemplo con la junta sin envejecimiento).

4.1. Simulación del efecto de envejecimiento (madurez)

Para contrastar la respuesta del modelo mesomecánico en cuanto a los efectos del envejecimiento, se han llevado a cabo ensayos numéricos de compresión uniaxial con carga instantánea impuesta a diferentes edades. El procedimiento consiste en imponer desplazamientos uniformes verticales de valor creciente en los nodos de la cara superior de la muestra (los nodos del lado inferior permanecen fijos en dicha dirección), mientras que los desplazamientos transversales se dejan libres. Los ensayos se llevaron a cabo en tensión plana y las tensiones medias (nominales) en los bordes superior e inferior de la malla se obtienen sumando las correspondientes reacciones nodales y dividiéndolas por el tamaño de la muestra. En la Fig. 4 se presentan las curvas tensión-deformación promedio para varias edades de carga t_0 , graficadas hasta el valor de su carga máxima. Se puede apreciar en la figura que con el incremento de la edad de carga se producen dos efectos. Por un lado, el aumento del módulo de elasticidad de las curvas debido al envejecimiento de la ley visco-elástica de los elementos continuos del mortero. Por otro lado, también se genera un aumento de la resistencia (valor de pico) propiciado por la nueva formulación de la ley constitutiva de junta que permite un crecimiento de los parámetros χ y c de la superficie de rotura con el paso del tiempo. En el ejemplo mostrado se han adoptado unos valores de los parámetros de la función exponencial de la Fig. 2, que ajustan con una buena concordancia la fórmula de resistencia en el tiempo dada en la normativa española [9].

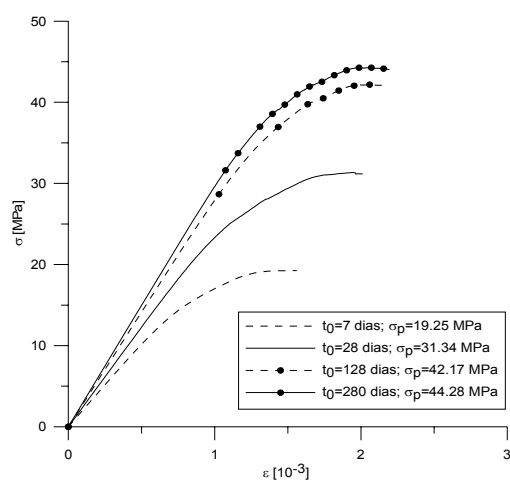


Figura 4. Curvas tensión-deformación nominal instantánea para distintas edades de carga t_0 .

4.2. Retracción por secado del hormigón

El acoplamiento higro-mecánico (HM) se ha implementado mediante una estrategia en "staggered", que relaciona dos códigos independientes, de manera que sucesivamente el resultado del problema de difusión se utiliza como entrada en el análisis mecánico y el de este último, como entrada en el primero, hasta alcanzar una tolerancia prefijada. En ambos análisis se emplea una misma malla de EF con elementos junta sin espesor y nudos dobles, cuya formulación para el caso de difusión puede consultarse en [10].

Para el problema de difusión se imponen unas condiciones de borde de $H = 0.5$ sobre los nodos de los bordes laterales, y no se permite el flujo de humedad en las superficies inferior y superior. La condición inicial ($t_0 = 28$ días) prescribe que $H(t_0) = 1$ en todos los nodos. En la Fig. 5 se presentan resultados de la difusión de humedad para tres edades distintas del problema acoplado y comportamiento constitutivo de las interfases con y sin envejecimiento. También se incluye el análisis desacoplado para contrastar con los nuevos resultados. Para cada uno de los casos, se observa que el frente de secado avanza hacia el centro de la muestra a medida que pasa el tiempo, de una forma más acentuada en los análisis acoplados especialmente en el caso de junta sin envejecimiento, en el que cabe esperar una mayor fisuración.

En la Fig. 6 se muestra la evolución de la fisuración en las juntas, en las cuales el espesor de línea representa la energía disipada en el proceso de fractura, correspondiente al análisis acoplado y junta con envejecimiento para los tiempos de 20, 200 y 10000 días. Se puede observar, como cabía esperar, un frente de fisuración perpendicular a cada uno de los bordes laterales que progresa hacia el interior de la muestra. También se aprecia que a medida que progresa el secado, se generan fisuras en el interior siguiendo una dirección radial a los áridos, tal como se ha observado recientemente en ensayos experimentales [11].

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado detalladamente la formulación y verificación de una ley constitutiva de junta que permite tener en cuenta, además de un reblandecimiento por trabajo de fractura, también el envejecimiento (madurez) del material con el paso del tiempo. Esto ha permitido tener en cuenta la variación de resistencia con el aumento de la edad de carga, t_0 , detectada en las curvas experimentales tensión-deformación del hormigón. El modelo se ha empleado exitosamente como ley constitutiva de los elementos junta que se incluyen en la representación a nivel meso-estructural 2D del material. Se han obtenido interesantes resultados del problema de la retracción por secado del hormigón mediante un análisis acoplado higro-mecánico.

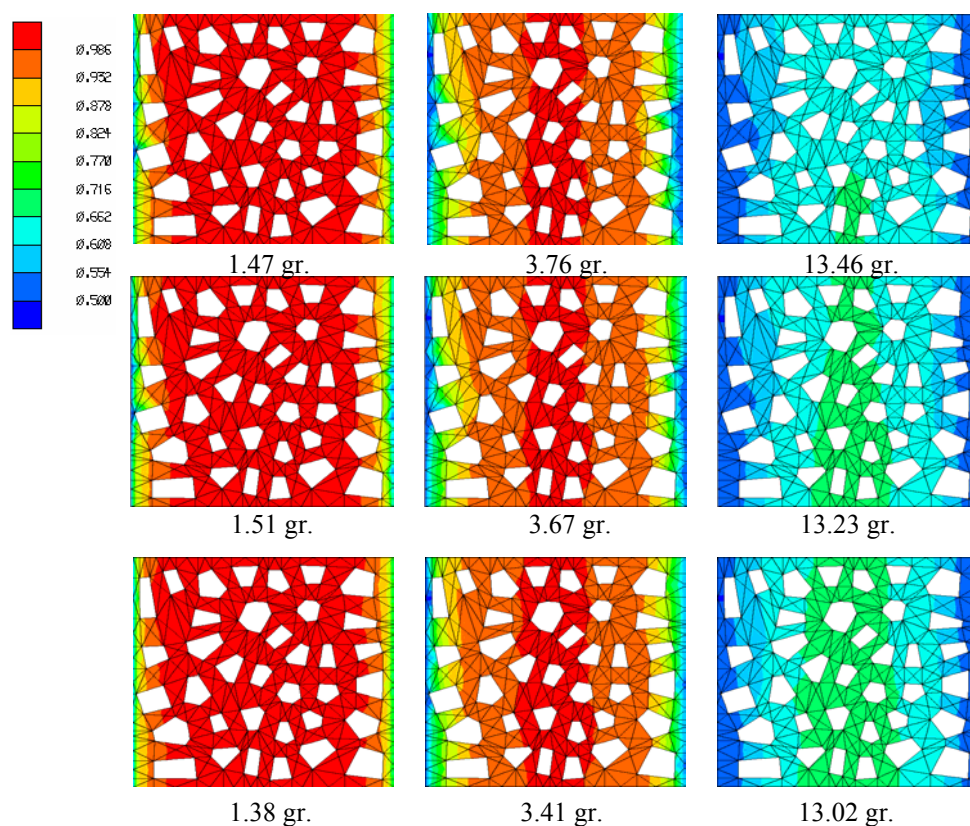


Figura 5. Distribuciones de HR y pérdida total en peso para 20, 200 y 10000 días (izquierda a derecha); análisis acoplado con juntas sin (arriba) y con (medio) envejecimiento, y análisis desacoplado (abajo).

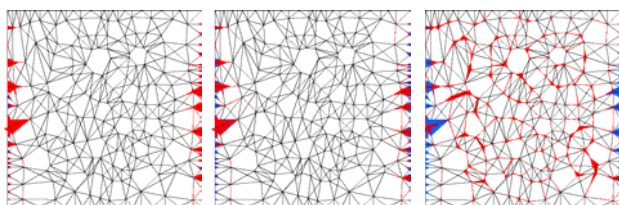


Figura 6. Análisis acoplado con envejecimiento: energía de fractura disipada en las juntas a 20, 200, y 10000 días (izquierda a derecha).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al MEC (Madrid) y al Ministerio de Fomento (Madrid) la ayuda recibida a través de los proyectos de investigación BIA2006-12717 y 80015/A04, respectivamente. El segundo autor agradece la beca FPI concedida por el MEC.

REFERENCIAS

- [1] Hillerborg, A., Modéer, M. y Petersson, P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Elements", *Cem. & Concr. Res.*, 6(6), 773-81, 1976.
- [2] Hohberg, J., *Multimechanism plasticity with coupled damage in tension and shear*, Owen, Oñate, Hinton, eds., *Comp. Plast. III*, Barcelona, v2, 1503-14, 1992.
- [3] Lotfi, H. R., *Finite element analysis of fracture of concrete and masonry structures*, PhD Thesis, Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1992.
- [4] Stankowski, T., Runesson K. y Sture, S., "Fracture and slip of interfaces in cementitious composites. I: Characteristics; II: Implementation". *J. Engng. Mech. ASCE*, 119, 292-327, 1993.
- [5] Weihe, S., König, M. y Kröplin, B., "A treatment of mixed mode fracture in debonding". *Comp. Mat. Sci.*, 3, pp. 254-262, 1994.
- [6] Carol, I. y Prat, P.C., "A Statically Constrained Microplane for the Smearred Analysis of Concrete Cracking", *Comp. Aided Anal. & design of Concr. Struct.*. En Bicanic y Mang, (Eds), 919-30, 1990.
- [7] Carol, I., Prat, P.C. y López, C.M., "A normal/shear cracking model. Application to discrete crack analysis", *J. of Engng. Mech.*, 123(8), 765-73, 1997.
- [8] Carol, I., López, C.M. y Roa, O., "Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 52, 193-215, 2001.
- [9] EH-91. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado, Ministerio de Obras Públicas y Transporte, Madrid, 1991.
- [10] Segura, J.M. y Carol, I., "On zero-Thickness Interface Elements for Diffusion Problems", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 28(9), 947-62, 2004.
- [11] Bisschop, J., van Mier, J.G., "Effect of aggregates on drying shrinkage microcracking in cement-based composites", *Mat. & Struct.*, 35, 453-61, 2002.