

MODELO MICROMECAÍNICO PARA EL LÍMITE FATIGA BAJO CARGA BIAIXIAL

A. Navarro, C. Vallengano, V. Chaves

Dpto. Ing. Mecánica y de los Materiales. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.
Avda. Camino de los Descubrimientos, s/n. 41092. Sevilla.
E-mail: navarro@us.es

RESUMEN.

El presente trabajo presenta una extensión al caso de fatiga biaxial con carga proporcional de un modelo micromecánico de crecimiento de grietas pequeñas basado en el bloqueo de dislocaciones en las barreras microestructurales del material (e.g. bordes de grano, límites de fase, etc.). El modelo considera una microgrieta sometida a un estado biaxial de tensiones con la zona plástica bloqueada en un borde de grano. La grieta, su zona plástica y la zona de bloqueo en la barrera se modelan mediante la técnica de dislocaciones distribuidas, empleando sendas arreglos de dislocaciones de borde y de tornillo para reproducir el modo mixto de apertura de la grieta. La formulación obtenida permite establecer fácilmente la condición de activación de flujo plástico más allá de los primeros límites de granos del material, lo que se traduce a nivel macroscópico en la obtención de un criterio para determinar el límite fatiga biaxial. El criterio propuesto se compara con resultados experimentales disponibles en la literatura, en particular éste reproduce satisfactoriamente el clásico criterio de la elipse de Gough.

ABSTRACT.

This paper presents the extension to biaxial proportional loads of a short crack growth model based on the blocking of dislocations at grain boundaries. The model considers a small inclined crack and its associated plastic zones blocked in a grain boundary and within a plane biaxial stress field. Two distributions of dislocations are employed to account for the climb and glide components of displacements. The conditions for activation of dislocations sources in the neighbouring grain are established and this leads to a biaxial limit criterion which reproduces the well-know Gough's ellipse.

PALABRAS CLAVE: Fatiga biaxial, Límite de fatiga, Dislocaciones distribuidas

1 INTRODUCCIÓN

Prácticamente todos los componentes de máquina presentan estados de tensión y deformación multiaxial cíclica en su funcionamiento normal. La aparición de estos estados puede estar motivada bien por la propia geometría del cuerpo (existencia de concentradores de tensión o entallas) o bien por la naturaleza multiaxial de la propia carga. La mayoría de estos componentes son susceptibles de fallo por fatiga y por lo tanto existe un interés grande en entender la respuesta ante ese tipo de sollicitaciones.

Uno de los trabajos pioneros y fundamentales, por su extensión y ejecución cuidadosa, en el área de fatiga multiaxial fue llevado a cabo por los investigadores Gough *et al.* [1, 2]. El estudio estuvo motivado por la necesidad de desarrollar métodos de diseño de ejes de transmisión de potencia sometidos a carga de flexión rotativa combinada con torsión. De hecho el método de cálculo de ejes comúnmente usado hoy día y recogido, por ejemplo, en la norma americana de ejes ANSI/ASME B106.1M-1985 [3] se basa claramente en los resultados experimentales de Gough.

Se realizaron ensayos en una máquina resonante desarrollada expresamente para ese trabajo, capaz de aplicar

flexión y torsión alternativas y con posibilidad de controlar también tensiones medias para los dos tipos de carga. Se utilizaron aceros dúctiles y fundiciones de uso (entonces, 1950) en la industria aeronáutica y de automoción. Se emplearon diversos tratamientos térmicos para obtener una gama muy amplia de microestructuras (ferrita-perlita, perlita, cementita esferoidal, etc.). Un total de 14 materiales distintos. Se emplearon asimismo probetas cilíndricas tanto macizas como huecas y con y sin concentraciones de tensión. Para hacerse una idea de la extensión del trabajo basta citar que en [2] se recogen los resultados de los ensayos de no menos de 200 curvas S-N. Para cada material y tipo de probeta investigado se determinaron los rangos de tensiones aplicables para obtener una cierta vida utilizando siete valores del cociente entre la tensión de flexión y la tensión de torsión aplicadas ($\pm f / \pm q$). Se presentaron los resultados en forma de curvas en el plano $f - q$. La figura 1 muestra una curva típica. Dos ecuaciones distintas se ajustaban bien a los puntos experimentales: un cuadrante de elipse (línea continua en la figura)

$$\frac{f^2}{b^2} + \frac{q^2}{t^2} = 1 \quad (1)$$

y un arco de elipse (línea de trazos en la figura)

$$\frac{q^2}{t^2} + \frac{f^2}{b^2} \left(\frac{b}{t} - 1 \right) + \frac{f}{b} \left(2 - \frac{b}{t} \right) = 1 \quad (2)$$

donde $\pm b$ es límite de fatiga a flexión y $\pm t$ el límite de fatiga a torsión.

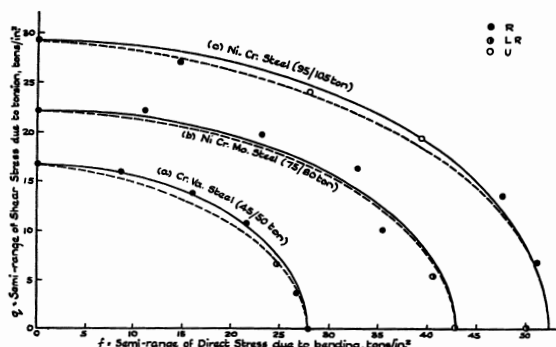


Figure 1. Resultados experimentales típicos de Gough *et al.*

Es importante remarcar que estas ecuaciones tienen una base puramente empírica. Se pretendía recoger la forma general de diversos criterios de fallo estático y plástificación, pero modificados para tener en cuenta que las relaciones entre los límites elásticos a tracción y torsión determinados experimentalmente para sus materiales no se ajustaban de forma consistente a ninguno de los valores predichos por las teorías consideradas, por lo que se optó dejar dicha relación como un parámetro libre a determinar experimentalmente (véase [2, pp.35-40]). Los autores señalan explícitamente que no se pretendió obtener la curva que daba el mejor ajuste a los siete puntos experimentales en cada caso, sino que se utilizaron para los dos extremos los valores experimentalmente obtenidos de los límites de fatiga para flexión pura y para torsión pura. Sólo en un caso no se hizo así, justamente el acero al Cr-Ni al que se refiere la curva superior de la figura 1.

La diferencia entre el cuadrante y el arco de elipse depende de la relación b/t . Para materiales con una relación b/t cercana a 2, las curvas son muy similares. En los materiales ensayados, los valores de esta relación oscilaron entre 1.1 para una de las fundiciones y 1.93 para uno de los aceros más dúctiles en los ensayos con probetas sin concentración de tensión. El rango de variación fue de entre 1.02 y 1.65 en el caso de ensayos con probetas entalladas. Gough *et al.* infieren de sus resultados que el comportamiento de los materiales dúctiles se ajusta mejor mediante el cuadrante de elipse, mientras que el de los materiales más frágiles y el de piezas entalladas se aproxima mejor mediante el arco de elipse.

2 CRITERIOS DE FATIGA MULTIAXIAL

En una reciente revisión Papadopoulos *et al.* [4] clasifican los criterios más usados en tres categorías: aproxima-

maciones basadas en el concepto del plano crítico, aproximaciones basadas en los invariantes del tensor de tensiones y aproximaciones basadas en promedios de los indicadores de tensión en un volumen elemental de material (incluyendo aquí la llamada aproximación mesoscópica). Los parámetros usados en los criterios basados en la idea de un plano crítico son la tensión normal y las tensiones cortantes en un cierto plano en el que se supone que se desarrollará la grieta crítica de fatiga. Las diferencias entre los diversos criterios propuestos se refieren a qué plano crítico considera cada autor y a qué combinación de fuerzas normales y tangenciales a dicho plano se toma para definir la condición límite de fatiga. Entre los criterios más usados en esta categoría se encuentra el de Brown y Miller, que distingue entre estados tensionales que pueden generar grietas tipo A que crecen principalmente a lo largo de la superficie y grietas tipo B que crecen hacia dentro del espécimen y son por tanto más dañinas. Este criterio es además en cierta forma el precursor de todos los de este tipo. Otros de los más usados de este grupo son el criterio de McDiarmid [5], el de Mataké [6] y el de Findley [7]. Los dos primeros postulan que el plano crítico es aquel en que la amplitud cíclica de la tensión tangencial alcanza un valor máximo. En el de Findley, el plano crítico es aquel en que una cierta combinación lineal entre la amplitud de la fuerza tangencial y la máxima tensión normal al plano alcanza el valor máximo. En los tres criterios la función que define el límite de fatiga es, a su vez una combinación lineal de la tensión tangencial y la máxima tensión normal (los coeficientes de esas funciones lineales se supone que son propiedades del material).

Los criterios basados en los invariantes del tensor de tensiones son los primeros en aparecer históricamente, como una mera aplicación a fatiga de los bien conocidos criterios de plástificación de metales. En particular el criterio de von Mises, basado en el segundo invariante del tensor desviador, está en el origen de casi todos los criterios de este tipo. Es indudable la existencia de similitudes entre el proceso de fatiga y el proceso inicial de plástificación en el límite elástico. En particular los modelos de apilamiento de dislocaciones que se utilizan para explicar la dependencia tipo Hall-Petch del límite de fatiga y del límite elástico con la inversa de la raíz cuadrada del tamaño de grano son similares desde el punto de vista matemático. Por otro lado hay, lógicamente, diferencias. Una diferencia potencialmente muy importante entre un criterio de plástificación y un criterio de fatiga es el papel que juega en uno u otro caso la tensión hidrostática. Es bien sabido que, al menos para tensiones hidrostáticas moderadas, éstas no intervienen en el proceso de plástificación de metales. Sin embargo, en fatiga una tensión hidrostática de compresión perpendicular a la incipiente grieta puede provocar que ésta se encuentre cerrada, al menos parcialmente, y reducir drásticamente su velocidad de crecimiento. Por el contrario, una tensión hidrostática de tracción puede acelerar enormemente la velocidad de propagación y reducir significativamente la vida. Resulta claro, por tanto, que de alguna forma los

criterios de plastificación clásicos deben ser modificados para intentar tener en cuenta las tensiones hidrostáticas. Las propuestas más usadas en este sentido son las de Sines [8] y la de Crossland [9]. Ambas son muy similares. El límite de fatiga multiaxial está definido por una combinación lineal de la raíz cuadrada del segundo invariante calculado con las amplitudes experimentadas en cada ciclo por las componentes del tensor desviador y de un segundo sumando que depende de la tensión hidrostática. En particular, en el caso de Sines este segundo factor es el valor medio en el ciclo de la tensión hidrostática, mientras que en el caso de Crossland lo que se utiliza es el valor máximo alcanzado por la tensión hidrostática. Estos criterios son mucho más fáciles de utilizar que los anteriormente descritos y son por ello mucho más empleados en la práctica. Uno de los defectos que tienen es que, aunque permiten identificar dentro de un componente los puntos más solicitados y potencialmente más peligrosos desde el punto de vista de fatiga, no dan ninguna información sobre la orientación potencial de la grieta naciente.

El tercero y más reciente grupo de criterios multiaxiales de fatiga está basado en lo que sus autores denominan la aproximación mesoscópica [10, 11]. De acuerdo con estos autores y utilizando su terminología, el comportamiento a fatiga de metales puede explorarse a diferentes escalas. Por un lado está la escala de medio continuo o escala macroscópica, que es la utilizada en los criterios definidos en los dos grupos descritos anteriormente. En el otro extremo está la escala que ellos denominan microscópica y que es la escala de las dislocaciones. Entre los niveles macro- y micro- existe una región intermedia que es la escala de los granos de un agregado metálico. Se trata de encontrar una relación entre las tensiones y deformaciones al nivel macroscópico y al nivel microscópico. Conviene señalar que los métodos de promediado son bien conocidos en disciplinas como el estudio del comportamiento de materiales compuestos, por ejemplo. La diferencia principal y la originalidad introducida en estos criterios de fatiga es el sentido del paso de uno a otro nivel: en el estudio de composites se intenta calcular las propiedades macroscópicas a partir de las microscópicas mientras que en estos criterios de fatiga hay que ir al revés. Se intenta ver qué ocurre a nivel de ciertos granos a partir de las tensiones a nivel del volumen elemental del agregado. El paso en ese sentido, por tanto, requiere normalmente hipótesis adicionales y muy especiales. En el criterio pionero en este grupo, el propuesto por Dang Van [10] al principio de los setenta, se argumenta que los granos más solicitados deben sufrir deformación plástica localizada pero deben alcanzar un estado de "elastic shakedown", en el cual no se produce acumulación adicional de deformación plástica, si no se va a producir el fallo por fatiga. Otro de los criterios más conocidos dentro de esta categoría es el de Papadopoulos [11] que relaciona la resistencia a fatiga con el promedio de la deformación plástica acumulada en los cristales que plastifican dentro del volumen elemental.

Como ha podido observarse, ninguno de los criterios nor-

malmente usados en la práctica utiliza cuantitativamente el hecho de que el proceso inicial de fatiga a esos niveles está asociado con el crecimiento de microgrietas. Por supuesto, se sabe que las grietas están ahí, pero simplemente no se disponía de las herramientas (analíticas) que pudieran "manejar" esas grietas en el sentido de describir su crecimiento y su fuerte interacción con la microestructura. Se supone de una manera implícita que esas grietas, de longitudes menores que un grano, no deben perturbar significativamente el campo de tensiones o deformaciones en la zona de interés, entendidos estos campos de tensiones o deformaciones como medias macroscópicas en un elemento de volumen que contiene numerosos granos. De esta forma se espera que esas tensiones o deformaciones se puedan correlacionar de forma efectiva con la vida del componente y por ello los criterios de fatiga multiaxial se formulan como combinaciones más o menos afortunadas de tensiones o deformaciones. Creemos que el desarrollo de las técnicas de Mecánica de Fractura Microestructural cambiará ese panorama y contribuirá a dar una base física más firme a las herramientas de diseño a fatiga necesarias en la práctica industrial. Precisamente este artículo describe la extensión al caso biaxial proporcional de un modelo de crecimiento de microgrietas basado en la teoría de distribución de dislocaciones. Se presenta a continuación una descripción muy esquemática de este tipo de modelos.

3 MODELO DE CRECIMIENTO DE MICROGRIETAS. CASO MONOAXIAL

A partir del modelo BCS, Navarro y de los Ríos [12, 13] desarrollaron un modelo para crecimiento de microgrietas por fatiga en sólidos sin entallas. Los autores suponen que el desplazamiento plástico debido a fatiga tiene lugar en bandas de deslizamiento rectilíneas que van a lo largo de los granos del sólido. Se supone que la microgrieta surge en aquel grano que, por su tamaño y orientación cristalográfica, presenta más facilidad para la formación de bandas de deslizamiento persistentes. La grieta y la zona plástica asociada a ella se extienden hasta alcanzar la primera barrera microestructural, generalmente un límite de grano, donde permanece bloqueada hasta que la grieta alcanza una longitud crítica tal que en la barrera se alcanza una tensión local capaz de activar el deslizamiento en el siguiente grano. El proceso de crecimiento y bloqueo en la barrera se va produciendo grano a grano, de modo que la zona plástica avanza a saltos, de acuerdo con lo observado experimentalmente en grietas pequeñas. Se predice un ritmo de propagación de grieta oscilante pero con amplitudes cada vez menores conforme avanza la grieta. La grieta, su zona plástica y la barrera se representa mediante una distribución continua de dislocaciones.

En las Figuras 2 y 3 se muestra una representación esquemática del modelo. Se considera un sólido infinito de un metal, con un tamaño medio de grano D , sometido a tensión uniforme τ y con una grieta de longitud $2a$ en su interior. Se admite que la grieta ha sido nucleada en el interior de un grano y que su zona plástica ha crecido

hasta alcanzar i granos, con $i = 1, 3, 5, \dots$. Delante de los dos bordes de grieta se encuentran sus zonas plásticas asociadas, que se están bloqueadas al final de un grano por la barrera. La posición del límite de grano sera $iD/2$, que representa el numero de medios granos atravesados por la zona plástica de cada uno de los lados. Las tensiones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ representan la resistencia al movimiento de dislocaciones en la grieta, zona plástica y barrera respectivamente. La barrera microestructural se modela mediante una pequeña zona de longitud r_0 ($r_0 \ll D$), que representa el tamaño típico de la interfase entre granos o la distancia típica a la que se encuentran las fuentes de dislocaciones activables en el grano siguiente.

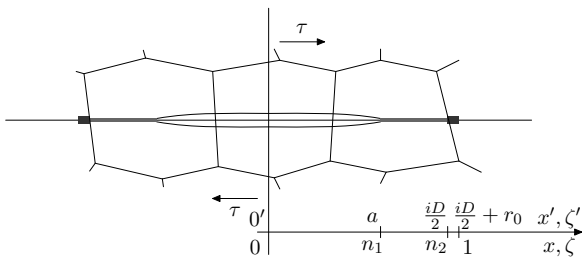


Figure 2. Grieta, zona plástica y barrera en un medio infinito.

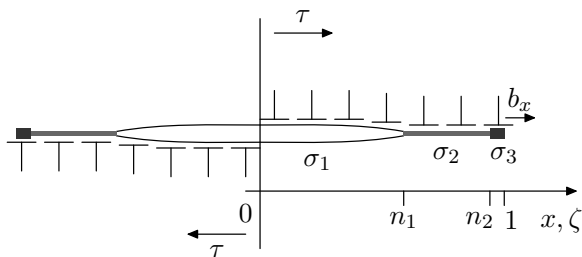


Figure 3. Modelado mediante dislocaciones.

La ecuación que determina el equilibrio de dislocaciones es una ecuación integral tipo Cauchy. Especificando que la solución en tensiones derivada de esta ecuación debe ser acotada en todo el campo se puede obtener una relación que permite calcular en cualquier instante la tensión en la barrera σ_3 . Puede verse que a medida que la grieta va creciendo la tensión σ_3 necesaria para mantener el equilibrio va aumentando y alcanza su valor máximo cuando la grieta ha alcanzado justamente la barrera. Considerando que no hay interferencia entre las caras de la grieta ($\sigma_1 = 0$) y para la grieta al borde la barrera ($n_1 = n_2 = (iD/2)/(iD/2 + r_0) \simeq 1$) se obtiene:

$$\sigma_3 = \frac{1}{\cos^{-1} n_2} \left[\frac{\pi}{2} \tau \right] \quad (3)$$

El paso de la grieta al siguiente grano se producirá si la tensión σ_3 alcanza un valor crítico tal que posibilite la activación de fuentes de dislocaciones. La condición crítica

de activación se escribe como

$$\frac{\sigma_3^i}{m_i^*} = \tau_c^i \quad (4)$$

donde m_i^* es un factor de orientación cristalográfica que proyecta la tensión σ_3 en el plano y dirección de deslizamiento de una fuente de dislocaciones en el grano adyacente y τ_c^i es la tensión crítica necesaria para activar la fuente. Las dos ecuaciones anteriores permiten obtener la tensión aplicada mínima necesaria τ_{Li} para activar deslizamiento plástico en el siguiente grano (se emplea la aproximación $\cos^{-1} n_2 = (2(1 - n_2))^{1/2} \approx 2(r_0^i/iD)^{1/2}$):

$$\tau_{Li} = \frac{4}{\pi} m_i^* \tau_c^i \left(\frac{r_0^i}{iD} \right)^{1/2} \quad (5)$$

El límite de fatiga se obtiene formalmente para $i = 1$ en la ecuación anterior,

$$\tau_{FL} = \frac{4}{\pi} m_1^* \tau_c^1 \left(\frac{r_0^1}{D} \right)^{1/2} \quad (6)$$

En la práctica, lógicamente, no se miden τ_c^1 y r_0^1 y se calcula τ_{FL} , sino que se hace al revés. Esta observación, aparentemente trivial, es, sin embargo, la clave para aplicar el modelo a situaciones reales más complicadas, como, por ejemplo, el caso de piezas con entallas: si somos capaces de formular la relación entre la tensión en la barrera y la tensión aplicada sobre la grieta (i.e., la ecuación equivalente para el problema bajo estudio a la relación (3) escrita más arriba para el problema infinito), podremos sustituir en la condición de activación (la equivalente a (4)) los términos *microscópicos* por las expresiones que los relacionan con el límite de fatiga del material (ecuación (6)), obteniendo así una expresión que permitirá obtener el límite de fatiga de la pieza entallada en función del límite de fatiga del material [14, 15].

4 EXTENSION AL CASO BIAXIAL PROPORCIONAL

Cuando la carga es biaxial se hace necesario considerar dos distribuciones de dislocaciones, una con los vectores de Burgers perpendiculares a la grieta (climb) y otra paralela a la grieta (glide). Además, la dirección de crecimiento de la grieta no es conocida a priori (ver figura 4). La tensión tangencial sobre las fuentes de dislocaciones tiene componentes provenientes de ambos conjuntos de dislocaciones. La condición de activación que permite determinar si la grieta va a superar la primera barrera, que es la condición para límite de fatiga, se escribe, por tanto, de la manera siguiente:

$$\frac{\sigma_3^1}{m_{\sigma_1}^*} + \frac{\tau_3^1}{m_{\tau_1}^*} = \tau_c^1 \quad (7)$$

$m_{\sigma_1}^*$ y $m_{\tau_1}^*$ son los coeficientes de orientación que permiten calcular la tensión cortante en el plano de deslizamiento y en la dirección de deslizamiento de la fuente de dislocaciones a partir de la tensiones de barrera correspondientes a las dos distribuciones.

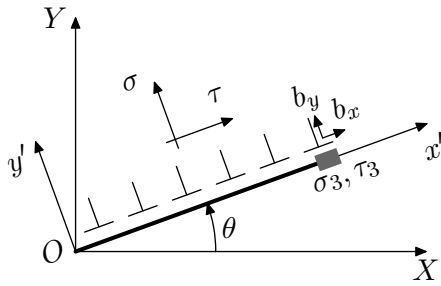


Figure 4. Modelo para carga biaxial

Al igual que en el caso monoaxial, resolviendo las ecuaciones de equilibrio de los dos conjuntos de dislocaciones en el caso acotado, pueden obtenerse las relaciones entre las tensiones σ_3^1 y τ_3^1 en la barrera y las tensiones σ y τ que actúan en el plano de la grieta. En el caso presente son exactamente iguales a la escrita más arriba (3), por lo que la condición de activación puede ponerse como

$$\frac{1}{\cos^{-1} n_2} \frac{\pi}{2} \left[\frac{\tau}{m_{\tau 1}^*} + \frac{\sigma}{m_{\sigma 1}^*} \right] = \tau_c^1 \quad (8)$$

Esta ecuación puede aún escribirse de una manera más reveladora, utilizando de nuevo la aproximación $\cos^{-1} n_2 = (2(1 - n_2))^{1/2} \approx 2(r_0^i/iD)^{1/2}$ y reordenando términos

$$\frac{\tau}{\tau_L} + \frac{\sigma}{\sigma_L} = 1 \quad (9)$$

donde $\tau_L = \frac{4}{\pi} m_{\tau 1}^* \tau_c^1 \left(\frac{r_0^1}{D} \right)^{1/2}$ y $\sigma_L = \frac{4}{\pi} m_{\sigma 1}^* \tau_c^1 \left(\frac{r_0^1}{D} \right)^{1/2}$. La ecuación anterior describe una recta que divide el plano σ - τ en dos regiones (ver figura (5)). Combinaciones de tensiones por encima de esta línea provocaran la activación de fuentes de dislocaciones y por lo tanto determinaran la propagación de grieta más allá de la barrera hasta producir el fallo. Por el contrario, por debajo de esta línea las grietas crecerán hasta la barrera, pero, al no activarse deslizamiento plástico detrás de la barrera, las grietas quedarán paradas allí en tanto en cuanto no se aumenten las tensiones.

Veamos ahora cómo relacionamos, via σ_L y τ_L , los parámetros microscópicos del material y los límites de fatiga a tracción y torsión. Esto se consigue fácilmente analizando los ensayos correspondientes mediante el círculo de Mohr.

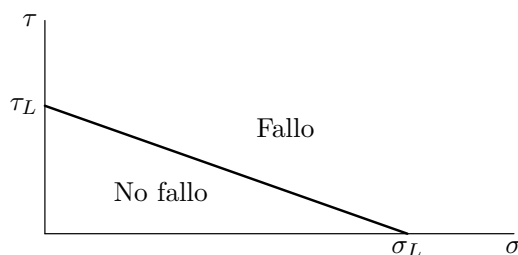


Figure 5. Criterio de activación biaxial

4.1 Ensayo de torsión pura

En la Figura 6 se muestra el círculo de Mohr para un ensayo de torsión pura. El material es sometido a una tensión de torsión en fatiga. La máxima tensión cíclica aplicable en este ensayo sin que se produzca el fallo por fatiga, o, de otra forma, la mínima tensión que hay que aplicar para que se produzca el fallo, es, naturalmente, el límite de fatiga a torsión, que, utilizando la notación de Gough *et. al.* empleada en la Introducción, se representa por la letra *t*. Cuando la tensión de torsión aplicada en el ensayo sea igual a *t*, el círculo de Mohr será, pues, tangente a la recta del criterio microscópico de activación.

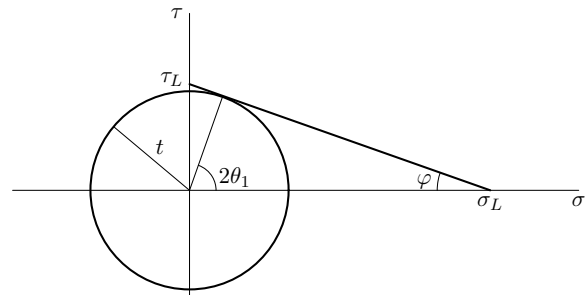


Figure 6. Círculo de Mohr en torsión.

4.2 Ensayo de tracción pura

En la Figura 7 se muestra el círculo de Mohr para el ensayo de tracción pura. El valor de la tensión de tracción aplicada en el ensayo que hace que el círculo de Mohr sea tangente a la recta del criterio microscópico es, en este caso, el límite de fatiga a tracción, que representamos por la letra *b*.

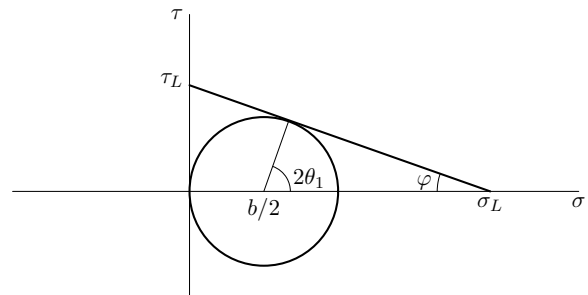


Figure 7. Círculo de Mohr en tracción.

A partir de las dos figuras anteriores, se obtienen fácilmente las siguientes relaciones que permiten calcular τ_L y σ_L a partir de los límites de fatiga a tracción y torsión *b* y *t* (siendo $\bar{\alpha} = b/t$)

$$\sigma_L = \frac{b}{2 - \bar{\alpha}} \quad \tau_L = \frac{b}{2\sqrt{\bar{\alpha} - 1}} \quad (10)$$

4.3 Ensayo de flexión y torsión combinadas

Consideremos a continuación un ensayo de fatiga a flexión y torsión combinadas. La tensión normal apli-

cada es $f \leq b$ y se trata de determinar la tensión cortante q mínima que es necesario aplicar para que se produzca el fallo por fatiga. La figura 8 muestra el círculo de Mohr en este caso. Por el punto del eje horizontal de abscisa $f/2$ se traza la perpendicular a la línea del criterio microscópico de activación. La intersección con esta línea proporciona el radio del círculo de Mohr que determina al cortar al eje vertical el valor buscado de la tensión cortante q . De acuerdo con esto, el radio del círculo que determina el límite de fatiga biaxial es tal que se verifica la siguiente ecuación

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{\frac{f^2}{4} + q^2}}{\sigma_L - \frac{f}{2}} = \frac{\tau_L}{\sqrt{\tau_L^2 + \sigma_L^2}} \quad (11)$$

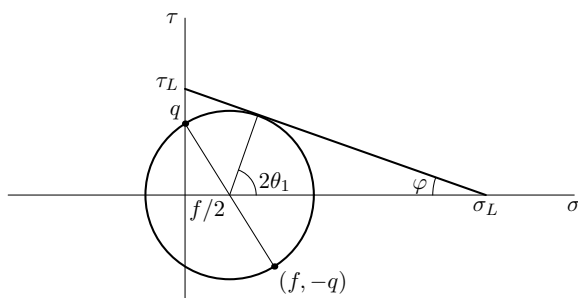


Figure 8. Ensayo de flexión y torsión combinadas.

Puede comprobarse que si se sustituyen en la ecuación anterior las expresiones obtenidas más arriba para las tensiones τ_L y σ_L en función de b y t (ecuación (10)) se obtiene exactamente la expresión recogida en la ecuación (2).

Se concluye, por tanto, que el modelo micromecánico descrito predice de forma teórica el arco de elipse propuesto en base a datos experimentales por Gough *et. al.*. Naturalmente, esto refleja la utilidad de los modelos micromecánicos de crecimiento de grietas pequeñas que los autores han venido desarrollando. Pero es importante dejar claro que hay otras teorías que llevan a la misma ecuación obtenida aquí. De hecho, el propio Gough [2, p.40], después de insistir una vez más en que tanto el arco de elipse como el cuadrante de elipse fueron adoptados con una base puramente empírica, señala que ya en aquel momento se habían propuesto hasta tres explicaciones distintas predecían el arco de elipse. No es posible discutir estas tres teorías aquí por falta de espacio.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la financiación recibida para este trabajo a través del proyecto DPI2005-04077 del Plan Nacional de I+D del Ministerio de Educación.

REFERENCIAS

- [1] Gough, H.J. (1950), Engineering Steels Under Combined Cyclic and Static Stresses, *J. Appl. Mechanics*, Vol. 50, pp.113-125
- [2] Gough, H.J., Pollard, H.V. and Clenshaw, W.J. (1951), Some Experiments on the Resistance of

Metals to Fatigue under Combined Stresses, *Ministry of Supply, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, London: His Majesty's Stationary Office, 1951. 141+XII páginas.

- [3] ANSI/ASME B106.1M-1985 Standard, *Design of Transmission Shafting*
- [4] Papadopoulos, I. V., Davoli, P., Gorla, C., Filippini, M., Bernasconi, A. (1997) A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metal, *Int. J. Fatigue*, Vol. 19, No. 3, 219-235.
- [5] McDiarmid, D. L. (1991) A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 14, 429-453.
- [6] Mataka, K. (1977) An explanation of the fatigue limit under combined stress, *Bull. Jap. Soc. Mech. Engrs.*, Vol. 20, 257-265.
- [7] Findley, W. N. (1959) A theory of the Effect of the Mean Stress on Fatigue of Metals under Combined torsion and Axial Load or Bending, *J. Engng. Ind.*, Vol. 81, 301-306.
- [8] Sines, G. (1959) Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses, *Metal Fatigue*, McGraw Hill, Chapter 7, 145-169.
- [9] Crossland, B. (1956) Effect of Large Hydrostatic Pressures on the Torsional fatigue Strength of an Alloy Steel, *Proc. of the Int. Conf. On the Fatigue of Metals*, I. Mech E., London, 138-149
- [10] Dang Van, K. (1973) Sur la résistance à la fatigue des métaux, Thèse de Doctorat en Sciences, Science et Techniques de l'Armement., 14, 647-722.
- [11] Papadopoulos, I. V. (1995) A High-Cycle Fatigue Criterion Applied in Biaxial and Triaxial Out-of-Phase Stress Condition, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 18, 79-91.
- [12] Navarro, A. y de los Rios, E.R. (1988) Short and Long Fatigue Crack Growth: a Unified Model, *Phil. Mag.*, Vol. 57(1), pp 15-36.
- [13] Navarro, A. y de los Rios, E.R. (1992) Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 437, 375-390 (1992).
- [14] Vallellano, C., Navarro, A. y Domínguez, J. (2000) Fatigue Crack Growth Threshold Conditions at Notches. Part I: Theory, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 23, 113-121.
- [15] Vallellano, C., Navarro, A. y Domínguez, J. (2000) Fatigue Crack Growth Threshold Conditions at Notches. Part II: Generalization and Application to Experimental Results, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 23, 123-128.