

donde λ_k son los exponentes característicos (siendo $\delta=1-\lambda_k$ los órdenes de singularidad en tensiones), $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$ las funciones características, K_k son los Factores de Intensificación de Tensiones Generalizados (FITGs en adelante) y L una longitud característica.

Bajo la hipótesis de deformación plana generalizada ($u_i = u_i(x_\alpha)$, $i=1,2,3$ y $\alpha=1,2$), utilizando el formalismo de Stroh [1,2] de la elasticidad anisótropa, y utilizando una original idea de Ting [3] que utiliza el concepto de matriz de transferencia, se ha desarrollado una herramienta que permite la evaluación de los exponentes y funciones características en esquinas de n materiales con cualquier tipo de ley de comportamiento elástica lineal.

Se supone adhesión perfecta entre los materiales que componen la esquina y se permiten casi todas las condiciones de contorno homogéneas y ortogonales en las caras externas. Se pueden asimismo analizar esquinas "cerradas" en las que no existen caras externas y todos los materiales están unidos entre sí. Los exponentes característicos se obtienen numéricamente de las raíces de la ecuación característica que se obtienen respectivamente para esquinas abiertas y cerradas, de los determinantes:

$$|\hat{\mathbf{K}}_N^{(2)}(\lambda)| = 0 \quad \text{y} \quad |\mathbf{K}_N(\lambda) - \mathbf{I}| = 0, \quad (2)$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad 6×6 , y que dependen exclusivamente de las propiedades elásticas de los materiales que confluyen a la esquina, de la geometría local y de las condiciones de contorno. Los detalles y estructura de la ecuación característica se detallan en Barroso *et al.* [4].

Las mejoras más significativas de la herramienta desarrollada, frente a herramientas precedentes, radican en la capacidad de incluir en los análisis materiales que en el marco del formalismo de Stroh se conocen como materiales degenerados, cuyo manejo en el formalismo es de una complejidad muy superior, ver [5 y 6], y la independencia del tamaño del determinante en la ecuación característica (2) con el número de materiales y las condiciones de contorno.

La herramienta se ha verificado con éxito con numerosos casos de la bibliografía y se ha aplicado a la determinación de exponentes y funciones características en las esquinas multimateriales que típicamente aparecen en uniones adhesivas a solape entre materiales metálicos y materiales compuestos, como la mostrada en la Fig. 1, en la que los puntos indican la presencia de esquinas multimateriales.

Se han considerado las siguientes propiedades ortótropas para el compuesto carbono-epoxy AS4/8552: ($E_{11}=141.3$ GPa, $E_{22}=E_{33}=9.58$ GPa, $G_{12}=G_{13}=5.0$ GPa, $G_{23}=3.5$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$, $\nu_{23}=0.32$) mientras que el adhesivo (isótropo) tiene ($E=3.0$ GPa, $\nu=0.35$) y el

aluminio (también isótropo) tiene ($E=6.867$ GPa, $\nu=0.33$).

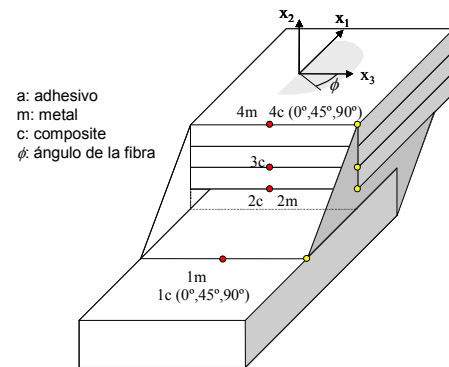


Figura 1. Esquinas en una unión adhesiva.

Algunos resultados obtenidos con el uso de la herramienta, se muestran en la Fig. 2, en la que se han evaluado los exponentes característicos de la esquina trimaterial formada por el extremo de dos láminas del laminado de carbono en contacto con el rebose del adhesivo. En particular, en la Fig. 2 se ha fijado la orientación de la fibra en una de las láminas (135°) mientras que la otra se deja variar entre 0 y 180° , dando para $\phi=135^\circ$ valores nulos, dado que la configuración de esquina desaparece.

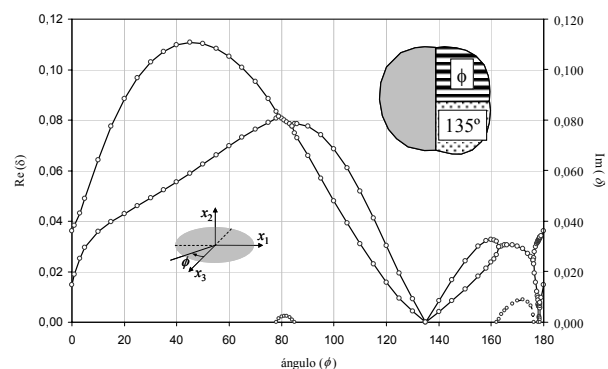


Figura 2. Exponentes característicos.

Como se muestra en la Fig. 2, la herramienta tiene capacidad de evaluar exponentes complejos conjugados. Asimismo, las funciones características, que dan información de la dependencia angular de los desplazamientos y tensiones, se pueden evaluar numéricamente para cada exponente característico, teniendo una información exhaustiva por cada modo (singular o no) de los términos del desarrollo en serie supuesto en (1).

En la Fig. 3 se muestran dichas funciones para el caso ($135^\circ, 90^\circ$) y el primer modo singular $\delta=0.077618$. Los desplazamientos y tensiones mostrados en la Fig. 3 se han normalizado de acuerdo a Pageau *et al.* [7], de tal manera que $\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0}=1/(2\pi)^\delta$.

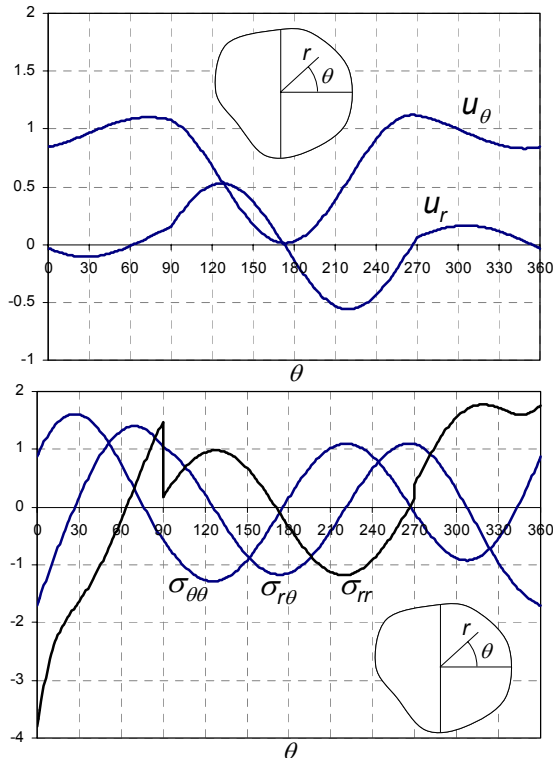


Figura 3. Funciones características.

3. FACTORES DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES GENERALIZADO

Para la evaluación del peso de cada término del desarrollo en serie (1), se va a emplear un método de ajuste por mínimos cuadrados análogo al utilizado por Munz y Yang [8] en el post proceso de los resultados obtenidos por Elementos Finitos. En el procedimiento desarrollado en este trabajo, los FITGs (K_k) se obtienen mediante la minimización de la función de error:

$$\Pi(K_1, \dots, K_k) = \sum_{\alpha=1}^A \sum_{j=0}^N \sum_{n=1}^M [u_{\alpha}^{MEC}(r_n, \theta_j) - u_{\alpha}^{ser}(r_n, \theta_j, K_1, \dots, K_k)]^2 \quad (3)$$

que evalúa la diferencia (al cuadrado) entre la solución asintótica u^{ser} (que tiene como incógnitas sólo a las K_k) y una solución numérica u^{MEC} (evaluada mediante un modelo de Elementos de Contorno, MEC en adelante). La minimización de la función Π (3) mediante el sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{\partial \Pi(K_1, \dots, K_k)}{\partial K_i} = 0, \quad (i=1, \dots, k). \quad (4)$$

da una solución para K_k . En (3) aparecen tres sumatorios: a) el número de aristas (j), b) el número de componentes del campo de desplazamientos ($\alpha=1$ ó 2) y c) el número de puntos (n) donde se evalúa la diferencia entre la solución asintótica en cada arista (j) dada por

(1) y la numérica. Dado que en el modelo numérico utilizado, basado en el MEC, sólo se discretizan los contornos de los materiales, el término "aristas" se refiere precisamente a cuántas de estas interfases entre materiales o caras externas, que confluyen a la esquina, se incorporan a la evaluación del error cuadrático.

Esta herramienta también ha sido verificada con trabajos de referencia publicados. Comentarios muy interesantes acerca de la fiabilidad de muchos de los resultados publicados se pueden encontrar en Helsing y Jonsson [9]. Asimismo, la dificultad para la comparación con trabajos precedentes es alta para casos de esquinas con presencia de materiales no isótropos, dado que en muchos casos no se dispone ni numérica ni analíticamente de las funciones características. Dicha información es fundamental a la hora de estandarizar y normalizar los resultados de los FITGs. En este trabajo se ha seguido la propuesta de Pageau *et al.* [7] para normalizar los resultados de K_k .

Analizando el problema de referencia de Helsing y Jonsson [10] (Fig. 4) se ha realizado adicionalmente un exhaustivo análisis del mejor grupo de nodos en los que realizar el ajuste

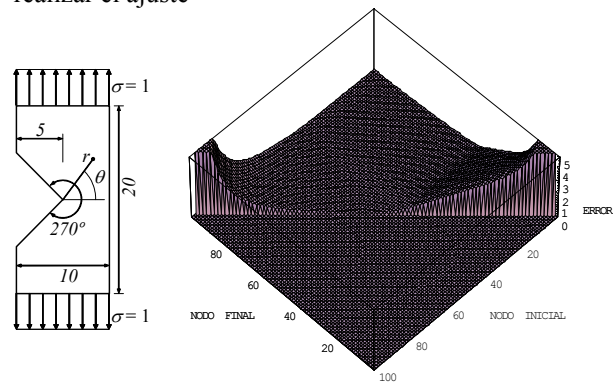


Figura 4. Problema bajo estudio, ref. [10].

En la Fig. 4 se muestra en ordenadas el error (en %) respecto al valor de referencia, para el caso sencillo de una esquina reentrante de 90° en un material isótropo. La gráfica de la derecha muestra los errores asociados a todas las combinaciones de nodos consecutivos en las aristas inclinadas que confluyen al vértice. Se han tomado las dos componentes u_r y u_θ . Los ejes de abscisas representan respectivamente el primer y último nodo en la arista inclinada que confluye al vértice, considerados para el ajuste en la expresión (3).

El gráfico muestra efectivamente como los mayores errores aparecen cuando para el ajuste se utilizan pocos nodos cercanos al vértice, donde los errores asociados a la discretización son mayores y a grupos de nodos alejados del vértice por falta de representatividad del estado tensional asintótico respecto a la dada por (1). En el caso de no disponer de valores de referencia, en problemas nuevos, es imprescindible análisis de convergencia para asegurar la calidad de los resultados.

Otro problema de referencia es el de Qian y Akisanya [11] que se muestra en la Fig. 5, con dos materiales isotropos. Tras la evaluación de los exponentes, funciones características y los FITGs (K_k) obtenidos con la herramienta desarrollada, se comparan en la Fig. 6 los desplazamientos y Fig. 7 las tensiones, obtenidos utilizando (1) con los resultados de [11] y los resultados numéricos del modelo MEC en puntos internos situados a una distancia $r=0.1 h$ del vértice.

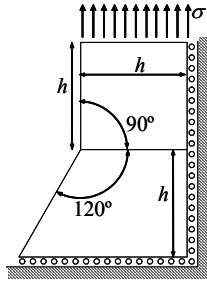


Figura 5. Problema bajo estudio, ref [11].

El ajuste de la representación asintótica y los resultados numéricos es buena en ambos casos, aun si bien se aprecia un mejor ajuste de los resultados obtenidos en este trabajo, que los encontrados con los resultados propuestos en [11].

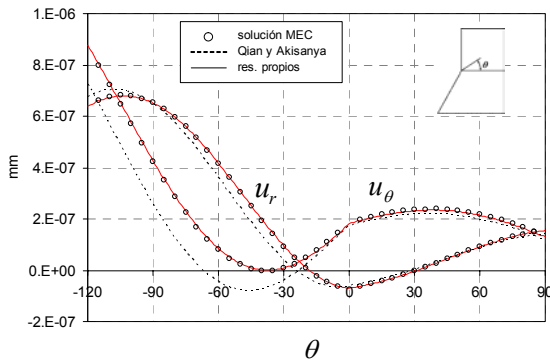


Figura 6. Esquina bimaterial - desplazamientos.

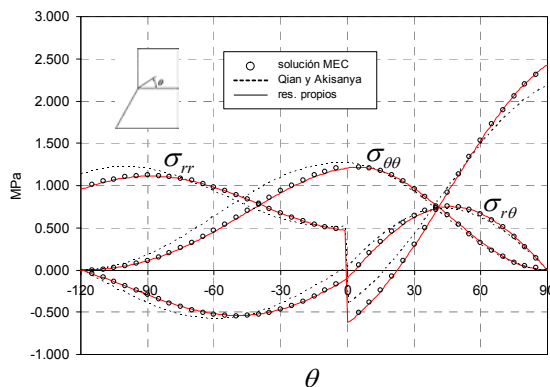


Figura 7. Esquina bimaterial - tensiones.

La herramienta se ha aplicado también a las esquinas multimateriales que se originan en las uniones adhesivas mostradas en la Fig. 1. En concreto, se presenta un análisis de la esquina bimaterial cerrada que

se muestra en la Fig. 8 entre la esquina de la lámina en contacto con la capa de adhesivo y el propio adhesivo. Esta esquina es particular dado que tiene una extrema cercanía (0.1 mm) a la chapa de aluminio (adherente inferior) y se podría cuestionar la representatividad del estado tensional asintótico "lejos" de la esquina.

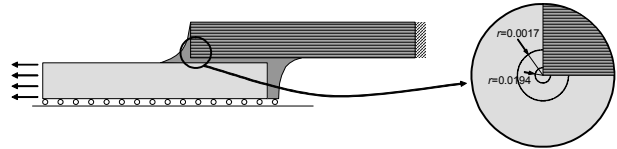


Figura 8. Unión adhesiva y esquina analizada.

Evaluando los exponentes y funciones características y obteniendo, mediante un modelo MEC del problema, los valores de los FITGs, se pueden evaluar las tensiones y desplazamientos en el entorno de la esquina. En particular se han evaluado tensiones y desplazamientos a una distancia de 0.0194 mm de la esquina (que representa un 20% del espesor del adhesivo).

En las Figuras 9 y 10 se muestra la comparación (de u_r y $\sigma_{\theta\theta}$ respectivamente) entre los resultados numéricos y los asintóticos, dados por (1). Se muestra la contribución de cada término del desarrollo independientemente, la suma de los dos primeros términos y de los tres primeros. Se observa que en este caso particular es necesario acudir al menos a una representación del estado asintótico, tanto en desplazamientos como en tensiones, que incorporen tres términos de dicho desarrollo en serie.

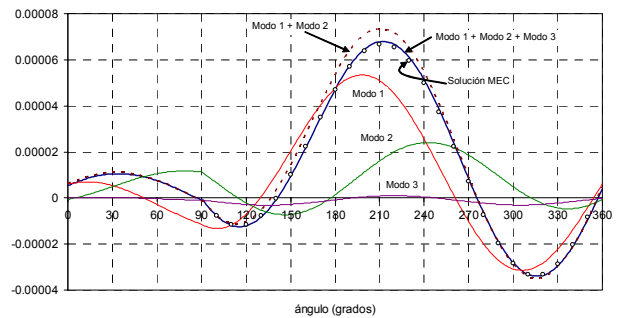


Figura 9. Desplazamiento u_r en la esquina adhesiva.

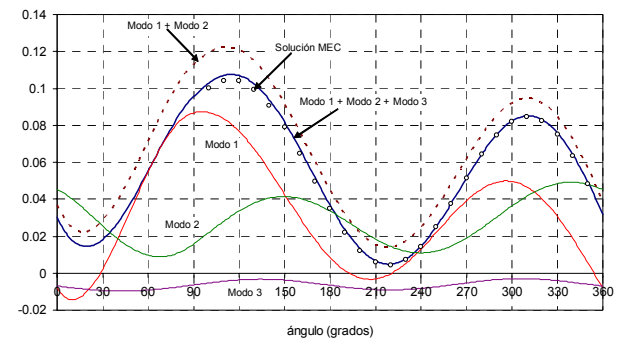


Figura 10. Tensión $\sigma_{\theta\theta}$ en la esquina adhesiva.

La idea preconcebida y muchas veces utilizada de que sólo el término más singular basta para dar un buen

ajuste de las tensiones en el entorno de esquinas, queda por tanto en entredicho en configuraciones como la estudiada.

La herramienta desarrollada tiene capacidad para incluir tantos términos como se desee. Con toda la información disponible, separada por modos (uno asociado a cada término) se puede caracterizar con detalle el estado tensional y es útil para comprender los distintos mecanismos de fallo que se pueden activar, dependiendo de los valores relativos de las K_k en cada modo.

4. ENSAYOS PRELIMINARES

La caracterización de los estados singulares en el entorno de las esquinas multimateriales que aparecen en las uniones adhesivas metal-composite (Fig. 1) permite tratar de justificar los comportamientos de fallo observados experimentalmente. En la Fig. 11 se muestra la geometría ensayada y el instante del ensayo.

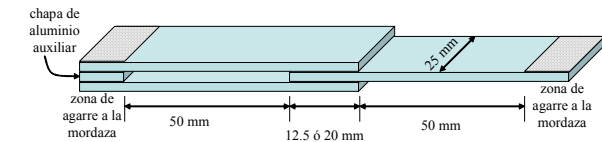


Figura 11. Ensayos sobre las uniones adhesivas.

Tras las roturas, se inspeccionaron las superficies laterales de fractura, encontrándose dos trayectorias principales de fallo, las mostradas en las Figuras 12 y 14 y que se corresponden respectivamente a los fallos encontrados respectivamente en uniones con laminado unidireccional [0°] (Fig. 12) con la fibra orientada en la dirección de la carga y con laminados cruzados [0/90/0] (Fig. 14).

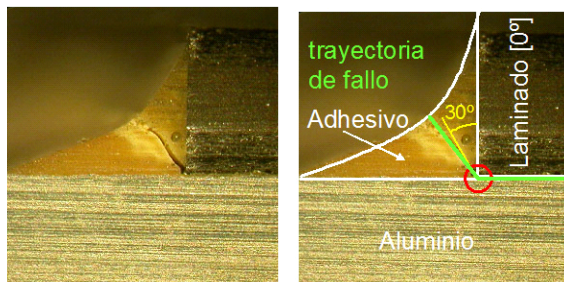


Figura 12. Fallo en laminados [0°].

En la Fig. 12 se observa que la trayectoria de fallo sale de la esquina bimaterial "cerrada" y sale con una orientación de 30° respecto de la vertical.

Evaluando el estado tensional en el entorno de dicha esquina mediante (1) considerando tres términos del desarrollo en serie, se obtiene, para la componente $\sigma_{\theta\theta}$ (la más representativa ante el fallo observado) una distribución (Fig. 13) que tiene su máximo en el entorno del ángulo experimental observado (120° que corresponde con una inclinación de 30° respecto a la vertical).

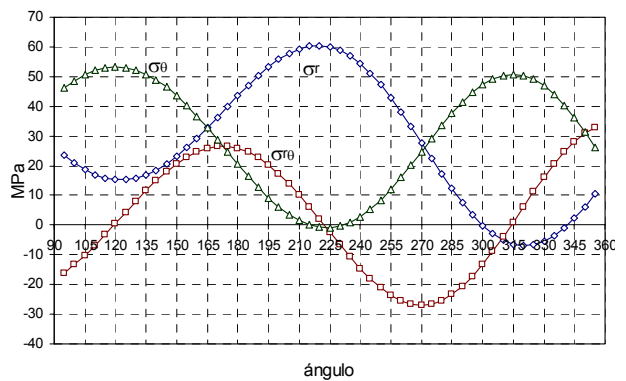


Figura 13. Tensiones en la esquina con laminado [0°].

Para el caso de la esquina trimaterial que se origina en las uniones con un laminado [0/90/0] el fallo observado mayoritariamente (Fig. 14) pasa por la esquina bimaterial analizada anteriormente y progresa por la intercara vertical hasta alcanzar la nueva esquina trimaterial, desde donde cambia de dirección y discurre hacia el adhesivo.

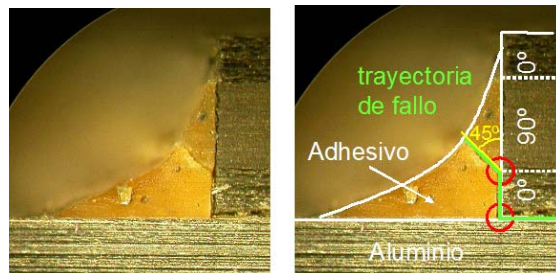


Figura 14. Fallo en laminados [0/90/0].

Un análisis similar al realizado en el caso anterior muestra (Fig. 15) muestra también valores máximos de la tensión $\sigma_{\theta\theta}$ en el entorno del ángulo experimental observado (135° que se corresponde con un ángulo de 45° medido desde la intercara entre el borde del laminado y el rebose de adhesivo).

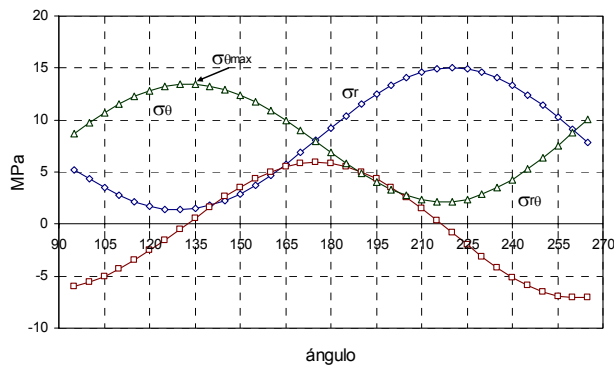


Figura 15. Estado tensional en esquina con [0/90/0].

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una herramienta analítica, basada en el formalismo de Stroh de la elasticidad anisótropa para obtener la representación asintótica del estado tensional.

La representación asintótica del estado tensional así obtenida, que es sólo dependiente de las características geométricas y mecánicas del entorno de la esquina bajo análisis, queda caracterizada por un sumatorio de i términos cuyo peso relativo (K_i) depende de la geometría global y estado de cargas. Para la determinación de dichos valores, se ha empleado un modelo numérico de Elementos de Contorno y se ha desarrollado un procedimiento de cálculo de dichos factores (K_i). El procedimiento desarrollado para el cálculo de K_i se basa en un procedimiento de mínimos cuadrados en desplazamientos que ha demostrado ser muy sencillo en su uso, robusto y preciso en sus resultados (en términos ingenieriles <2% en la gran mayoría de los casos).

El conjunto del trabajo analítico y el numérico ofrece una poderosa herramienta para la caracterización de este tipo de esquinas. La aplicación a las esquinas multimateriales anisótropas que típicamente aparecen en las uniones adhesivas entre metales y materiales compuestos ha puesto de manifiesto la versatilidad y potencia de este tipo de caracterizaciones para la comprensión de los mecanismos de transmisión de cargas a través de dichas esquinas.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la ayuda del Ministerio de Educación y Ciencia (MAT2003-03315) y el suministro de los materiales metálicos y compuestos a SACESA para la realización de los ensayos.

REFERENCIAS

[1] Stroh, A. N. (1958) "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity", *Philosophical Magazines* **3**, pp: 625-646

- [2] Stroh, A. N. (1962) "Steady state problems in anisotropic elasticity", *Journal of Mathematics and Physics* **41**, pp: 77-103
- [3] Ting, T. C. T. (1997) "Stress singularities at the tip of interfaces in polycrystals", *Damage and Failure of Interfaces*, Rossmanith (ed.), Balkema, Rotterdam, pp: 75-82.
- [4] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2003) "Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners", *International Journal of Fracture* **119**, pp: 1-23
- [5] Ting, T. C. T. y Hwu, C. (1988) "Sextic formalism in anisotropic elasticity for almost non-semisimple matrix N " *International Journal of Solids and Structures* **24**, pp: 65-76.
- [6] Wang, Y. M. y Ting, T. C. T. (1997) "The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix N ", *International Journal of Solids and Structures* **34**, pp: 401-413
- [7] Pageau, S. P., Gadi, K. S., Biggers, Jr., S. B. y Joseph, P. F. (1996) "Standardized complex and logarithmic eigensolutions for n-material wedges and junctions", *International Journal of Fracture* **77**, pp: 51-76.
- [8] Munz, D. y Yang, Y. Y. (1993) "Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors", *International Journal of Fracture* **60**, pp: 169-177.
- [9] Helsing, J. y Jonsson, A. (2002) "On the accuracy of benchmark tables and graphical results in the applied mechanics literature", *Journal of Applied Mechanics* **69**, pp: 88-90.
- [10] Helsing, J. y Jonsson, A. (2002b) "On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**, pp: 433-453.
- [11] Qian, Z. Q. y Akisania, A. R. (1999) "Wedge corner stress behaviour of bonded dissimilar materials", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **32**, pp: 209-222.