

## MEJORA DE LA ESTIMACIÓN DE LOS FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES MEDIANTE XFEM CON ELEMENTOS DE TRANSICIÓN CORREGIDOS

José E. Tarancón, Ana Vercher, Eugenio Giner, F. Javier Fuenmayor

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España.  
E-mail: jetaranc@mcm.upv.es

### RESUMEN

El método de los elementos finitos extendido (XFEM) se ha convertido en una interesante técnica para el análisis de problemas de mecánica de la fractura, ya que permite hacer independiente la geometría de la grieta respecto de la malla de elementos finitos. Para ello se enriquecen los elementos afectados por la grieta con nuevos grados de libertad que introducen la discontinuidad del campo de desplazamientos en las caras de la grieta o que permiten representar el primer término del campo asintótico de desplazamientos alrededor del extremo de grieta. En la formulación clásica del método XFEM aparecen elementos de transición que conectan la zona enriquecida con el resto de la malla. Estos elementos están parcialmente enriquecidos con las funciones de enriquecimiento asociadas al campo asintótico de desplazamientos, por lo que en dichos elementos no pueden representarse correctamente dichas funciones ni tampoco campos lineales, lo que conlleva un aumento del error de discretización. En este trabajo se propone una mejora de los elementos de transición que aumenta la precisión del método XFEM, lo que permite estimar mejor los factores de intensidad de tensiones.

### ABSTRACT

The extended finite element method (XFEM) has become an interesting technique for the analysis of fracture mechanics problems, since it enables making the crack geometry independent of the finite element mesh. In this approach, the elements affected by the crack are enriched with new degrees of freedom that introduce the discontinuity of the displacements across the crack faces or that make it feasible to represent the crack tip asymptotic displacement fields. In the classic XFEM formulation they appear blending elements that connect the enriched zone with the rest of the mesh. These elements are partially enriched with the functions associated to the crack tip asymptotic displacement fields. Because of that, the enrichment functions cannot be represented properly in these elements and reproducing a linear field is ruled out. This produces an increment of the discretization error. In the present study it is proposed an improvement of the blending elements that results in greater accuracy of the XFEM method, enabling to estimate the stress intensity factors more accurately.

**PALABRAS CLAVE:** elementos finitos extendidos, error de discretización, factor de intensidad de tensiones.

### 1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos (FEM) ha sido ampliamente aplicado en mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL). Sin embargo, obtener soluciones precisas con el FEM clásico conlleva un alto coste computacional, ya que la malla debe ser conforme con la geometría de la grieta y en general, si se utilizan elementos estándares, se necesita un alto nivel de refinamiento alrededor de la misma. El método de los elementos finitos extendido (XFEM), introducido inicialmente por Belytschko y Black [1] y redefinido por Moës et al. [2], reduce estos inconvenientes ya que permite hacer independiente la malla de la geometría de la grieta. En este método la grieta no está representada por la frontera de los elementos sino que se representa enriqueciendo los nodos adecuados con nuevos grados de libertad que introducen la discontinuidad del campo de desplazamientos en las caras de la grieta (función escalón de Heaviside) y el primer término del campo

asintótico de desplazamientos alrededor del extremo de grieta (funciones singulares) usando el método de la partición de la unidad (PUM) [3].

Aunque el método XFEM permite hacer análisis de fractura con gran precisión, Stazi et al. [4] observan que la velocidad de convergencia del error no es óptima con respecto al tamaño de los elementos (utilizando refinamiento uniforme) y que no mejora al aumentar el orden polinómico de la interpolación. Esto parece indicar que la singularidad no está bien capturada. Por otro lado, Chessa et al. [5] observan que en métodos basados en un enriquecimiento local mediante partición de la unidad, como el XFEM, una construcción apropiada de los elementos de transición puede ser crucial para una buena eficiencia (velocidad de convergencia óptima). En los elementos de transición (los situados entre la zona enriquecida y la no enriquecida) el enriquecimiento es parcial y no forma una partición de la unidad, ya que sólo tienen

enriquecidos algunos de sus nodos. Estos autores proponen dos técnicas para mejorar la convergencia, pero los ejemplos que presentan no incluyen funciones de enriquecimiento singulares. Estas técnicas se basan en una reformulación de los elementos de transición para recuperar en la medida de lo posible la partición de la unidad.

Recientemente, para obtener la velocidad de convergencia óptima, Laborde et al. [6] por un lado y Béchet et al. [7] por otro, han propuesto utilizar una zona de enriquecimiento alrededor del extremo de grieta independiente del tamaño de los elementos, lo que denominan enriquecimiento geométrico o en área fija.

En este trabajo se propone una mejora de los elementos de transición que permite compensar en cierta medida los efectos del enriquecimiento parcial existente en estos elementos. La técnica propuesta es una extensión del trabajo de Chessa et al. [5] aplicado a MFEL. Esta mejora de los elementos de transición permite aumentar la precisión del método XFEM sin incremento significativo del coste computacional, aunque para obtener la velocidad de convergencia óptima sigue siendo necesario realizar el enriquecimiento en una zona independiente del tamaño de elemento (enriquecimiento geométrico). Esto permite, por ejemplo, estimar los factores de intensidad de tensiones con mayor precisión.

El contenido del trabajo es como sigue. En la Sección 2 se describe brevemente la formulación de XFEM para el modelado de grietas. En la Sección 3 se discute sobre los aspectos que influyen en la velocidad de convergencia del error en XFEM. En la Sección 4 se propone corregir los elementos de transición enriqueciéndolos con funciones de forma jerárquicas de grado mayor que la interpolación estándar utilizada. En la Sección 5 se describe brevemente el método de extracción de los factores de intensidad de tensiones utilizados para obtener los resultados numéricos que se presentan en la Sección 6.

## 2. XFEM PARA MODELADO DE GRIETAS

En la formulación mediante XFEM aplicada a problemas de MFEL, la aproximación estándar de EF para los desplazamientos se enriquece con dos tipos de funciones: una función escalón para representar la discontinuidad en la grieta,  $H(\mathbf{x})$ , y unas funciones singulares que permiten representar el primer término del campo asintótico de desplazamientos alrededor del extremo de grieta,  $F^\alpha(\mathbf{x})$  [2]. La función  $H(\mathbf{x})$  es una función Heaviside modificada para que tome el valor  $-1$  en la región del dominio que queda a un lado de la grieta y el valor  $1$  en la región que queda al otro lado, definida como

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } d(\mathbf{x}) < 0 \\ +1 & \text{si } d(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $d(\mathbf{x})$  es una función distancia signada a la grieta. Las funciones  $F^\alpha(\mathbf{x})$  forman una base del primer término del campo asintótico de desplazamientos alrededor de un extremo de grieta:

$$F^\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2)$$

donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares en el sistema de coordenadas local del extremo de grieta. Nótese que sólo  $F^1(\mathbf{x})$  es discontinua sobre la grieta.

La aproximación mediante XFEM queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} \tilde{N}_k(\mathbf{x}) \left( \sum_{\alpha=1}^4 F^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{c}_k^\alpha \right) \quad (3)$$

donde  $I$  es el conjunto de todos los nodos de la malla,  $J$  es el conjunto de nodos enriquecidos con la función de Heaviside y  $K$  es el conjunto de nodos enriquecidos con las funciones singulares asociadas al campo asintótico alrededor de un extremo de grieta.  $N_i$  son las funciones de forma de EF estándares asociadas al nodo  $i$  y  $\mathbf{a}_i$  son los grados de libertad nodales de la aproximación de EF clásica (desplazamientos nodales en el caso de nodos no enriquecidos). Los coeficientes  $\mathbf{b}_j$  son los grados de libertad asociados a la función Heaviside.  $\tilde{N}_k$  son las funciones de forma estándar de orden lineal utilizadas para la partición de la unidad de las funciones singulares, y  $\mathbf{c}_k^\alpha$  son los correspondientes grados de libertad. Para la partición de la unidad asociada a la función Heaviside se utilizan, en este trabajo, las mismas funciones de forma empleadas en la interpolación estándar, tal como se recomienda en [6].

Usualmente sólo los elementos que contienen un extremo de grieta están totalmente enriquecidos con las funciones singulares, como en la figura 1(a). Es posible aumentar el tamaño de la zona enriquecida añadiendo a ésta una o varias capas de elementos vecinos. En cualquiera de estos casos el tamaño de la zona enriquecida es proporcional al tamaño de elemento. Este tipo de enriquecimiento se ha denominado topológico. Otro esquema de enriquecimiento, denominado geométrico, permite hacer independiente el tamaño de la zona enriquecida del tamaño de elemento [6, 7]. La estrategia consiste en, partiendo de los conjuntos de nodos anteriores, añadir a  $K$  todos los nodos que estén dentro de una determinada zona geométrica, habitualmente un círculo centrado en el extremo de grieta con radio predefinido  $R$ , como se muestra en la figura 1(b). De esta manera algunos nodos pueden ser enriquecidos con ambos tipos de funciones de enriquecimiento (pertenecen tanto a  $J$  como a  $K$ ).

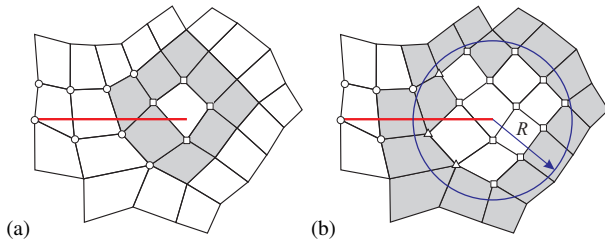


Figura 1. Nodos enriquecidos con enriquecimiento de tipo: (a) topológico; (b) geométrico. Los nodos indicados con un círculo pertenecen a  $J$ , con un cuadrado a  $K$  y con un triángulo a  $J$  y  $K$  simultáneamente.

En la figura 1 se muestran también los elementos de transición (en color gris), que son aquellos enriquecidos parcialmente con las funciones singulares (nodos  $K$ ). Estas funciones de enriquecimiento no se pueden representar correctamente en estos elementos debido a que no se cumple la partición de la unidad. Además, el enriquecimiento parcial en estos elementos produce términos no lineales en la aproximación que impiden representar campos lineales cuando está activo el enriquecimiento.

**3. CONVERGENCIA DEL ERROR EN XFEM**

El método XFEM permite obtener soluciones precisas en los problemas de MFEL sin utilizar mallas muy refinadas, comportamiento que es de esperar al ser posible representar localmente el campo asintótico de desplazamientos mediante las funciones singulares incorporadas en la interpolación. Al incluir la singularidad en las bases de la interpolación de elementos finitos también cabría esperar que se consiguiera la velocidad de convergencia óptima con refinamientos  $h$ -uniformes, como ocurre con soluciones suaves cuando se utiliza el FEM clásico. Sin embargo no ocurre así, ya que se conserva la velocidad de convergencia  $O(h^{1/2})$  en el error en norma energética con independencia del orden polinómico de la interpolación, característica de este tipo de problemas de MFEL cuando el refinamiento es uniforme y no se captura bien la singularidad [4].

En otro tipo de aplicaciones donde no hay campos singulares, Chessa et al. [5] demuestran que con el método XFEM, y con cualquier método de enriquecimiento local mediante partición de la unidad, los elementos de transición son cruciales para obtener una buena eficiencia (velocidad de convergencia óptima) debido a la falta de partición de la unidad en dichos elementos (donde el enriquecimiento es parcial). Estos autores realizan un análisis del error de interpolación que aparece en un elemento de transición unidimensional cuando se enriquece con funciones polinómicas para reproducir una discontinuidad en el gradiente y muestran que éste es de mayor orden que en el resto de elementos. Estos autores proponen dos métodos para recuperar en la medida de lo posible la partición de la unidad en los elementos de transición,

bien modificando su formulación (método de deformación mejorada) o bien añadiendo de forma jerárquica funciones polinómicas de orden superior en estos elementos. Ambos métodos buscan compensar los términos no deseados que aparecen en la interpolación de desplazamientos debido al enriquecimiento parcial.

Por otro lado, de nuevo en el ámbito de MFEL, Laborde et al. [6] analizan el error en norma  $L^2$  en un elemento de transición unidimensional para una función de enriquecimiento arbitraria y también muestran que la velocidad de convergencia es inferior a la óptima, siendo la pérdida de velocidad de orden  $O(h^{1/2})$  en elementos lineales y cuadráticos. Pero estos autores argumentan que para obtener una convergencia óptima es necesario que la zona de enriquecimiento sea independiente del tamaño de elemento, es decir, que sea una zona geométrica fija, lo que avalan con los resultados numéricos que presentan. Béchet et al. [24] también utilizan una zona de enriquecimiento fija para obtener la velocidad de convergencia óptima. Este tipo de enriquecimiento es el denominado enriquecimiento en área fija o geométrico descrito anteriormente. Un inconveniente de esta técnica es el peor número de condicionamiento de la matriz de rigidez, que crece rápidamente con el número de nodos enriquecidos con las funciones singulares.

**4. ELEMENTO DE TRANSICIÓN MEJORADO**

En este trabajo se extiende el trabajo de Chessa et al. [5] a los problemas de MFEL, mejorando los elementos de transición para reducir los efectos no deseados del enriquecimiento parcial. Estos elementos se corrigen aumentando localmente el orden polinómico de la interpolación estándar, consiguiendo una mayor precisión tanto a nivel local como global. Una forma simple de aumentar el orden de dicha interpolación es añadiendo convenientemente funciones de forma jerárquicas para compensar los términos no deseados en la interpolación de los elementos de transición debidos al enriquecimiento parcial. Para ello, en problemas bidimensionales, se añaden nodos jerárquicos en los lados comunes de los elementos de transición, que son aquellos que conectan un nodo enriquecido (con las funciones singulares) con un nodo no enriquecido con este tipo de funciones, es decir, lados que conectan un nodo que pertenece a  $K$  con otro que no pertenece a  $K$ . Si las funciones jerárquicas que se añaden son de orden cúbico o superior también pueden añadirse nodos jerárquicos en el interior de los elementos de transición (modos burbuja).

La aproximación (3) se modifica de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j + \\
 & \sum_{k \in K} \tilde{N}_k(\mathbf{x}) \left( \sum_{\alpha=1}^4 F^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{c}_k^\alpha \right) + \sum_{p \in P} \hat{N}_p(\mathbf{x}) \mathbf{d}_p + \quad (4) \\
 & \sum_{q \in Q} \hat{N}_q(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{e}_q
 \end{aligned}$$

donde  $P$  es el conjunto de los nodos jerárquicos añadidos que están asociados a lados que conectan un nodo enriquecido (que pertenece a  $K$ ) con uno estándar, o que están asociados a modos burbuja en los elementos de transición no divididos por la grieta.  $Q$  es el conjunto del resto de nodos jerárquicos añadidos, es decir, los asociados a lados que conectan un nodo enriquecido de  $K$  con un nodo enriquecido de  $J$  (los que incorporan la función de Heaviside) y que no pertenezca a  $K$ , o asociados al interior de los elementos de transición divididos por la grieta.  $\hat{N}_p$  y  $\hat{N}_q$  son las funciones de forma jerárquicas correspondientes a los nodos jerárquicos, y  $\mathbf{d}_p$  y  $\mathbf{e}_q$  son los respectivos grados de libertad. La división de los nodos jerárquicos añadidos en  $P$  y  $Q$ , con sus diferentes funciones de interpolación, es necesaria para que la mejora de los elementos de transición tenga en cuenta la discontinuidad presente en los elementos divididos por la grieta. Con la modificación propuesta en los elementos de transición la continuidad  $C^0$  de la aproximación no se altera. Los detalles sobre la definición de las funciones de forma jerárquicas pueden consultarse, por ejemplo, en [8].

En este trabajo se han utilizado elementos cuadriláteros lineales y cuadráticos. En la figura 2 se muestran dos ejemplos con los diferentes tipos de nodos jerárquicos añadidos en los elementos de transición.

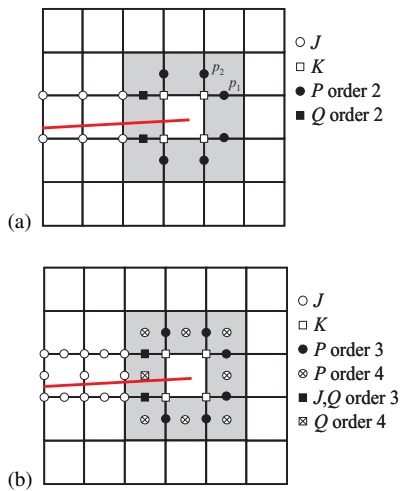


Figura 2. Nodos jerárquicos añadidos en los elementos de transición: (a) lineales; (b) cuadráticos.

### 5. CÁLCULO DE LOS FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Para extraer los factores de intensidad de tensiones (FIT) se ha utilizado la integral de interacción [9], que permite obtener  $K_I$  y  $K_{II}$  en problemas de modo mixto. La integral de interacción en forma de dominio viene dada por

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (5)$$

donde los campos indicados con el superíndice <sup>(1)</sup> son los correspondientes a la aproximación numérica de la solución del problema analizado y los indicados con <sup>(2)</sup> son campos auxiliares que representan el primer término de los campos asintóticos para los modos I o II,  $u_i$  es el campo de desplazamiento en la dirección  $x_i$  (sistema de coordenadas locales en el extremo de grieta con  $x_1$  en la dirección en que se extiende la grieta, véase la figura 3),  $\sigma_{ij}$  es el campo de tensiones,  $\varepsilon_{ij}$  es el campo de deformaciones,  $W^{(1,2)}$  es la energía de deformación en términos de los productos interiores  $\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $q$  es una función de ponderación suficientemente suave que debe valer 0 en el contorno exterior del dominio de extracción y 1 en el extremo de grieta. A partir de (5) se pueden calcular los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  como

$$K_I = E' I^{(1,I)} / 2, \quad K_{II} = E' I^{(1,II)} / 2 \quad (6)$$

donde  $E' = E$  en el caso de tensión plana y  $E' = E / (1 - \nu^2)$  en deformación plana, siendo  $E$  el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. La función de ponderación  $q$  utilizada en este trabajo toma valor  $q = 1$  para los nodos contenidos en un círculo de radio  $r_q$  medido desde el extremo de grieta y  $q = 0$  para el resto de nodos.

### 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se describen los resultados obtenidos al aplicar el método XFEM con los elementos de transición corregidos. Para analizar el error en la aproximación se ha tomado el clásico problema de Westergaard con solución exacta conocida. Se considera una grieta de longitud  $2a$  en una placa infinita cargada biaxialmente con tracciones uniformes en el infinito (figura 3). La solución exacta de este problema para condiciones de modo mixto puede encontrarse en [10].

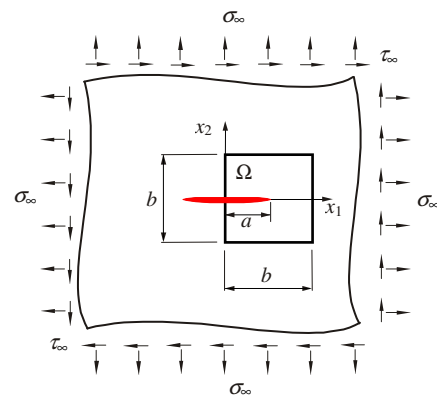


Figura 3. Placa infinita con grieta de longitud  $2a$  sometida a una carga biaxial remota  $\sigma_\infty$  y una carga tangencial remota  $\tau_\infty$ .

Las magnitudes que se analizan son el error local en norma energética y el error en los factores de intensidad

de tensiones. La norma energética de la solución de desplazamientos se define como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega} \quad (7)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\}^T$  es el campo de tensiones y  $\mathbf{D}$  es la matriz de elasticidad que relaciona las deformaciones con las tensiones. Dada una solución  $\mathbf{u}^h$  de elementos finitos con un campo de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}^h$ , el error en norma energética se define como

$$\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega} \quad (8)$$

El error se ha calculado a nivel local (de cada elemento).

Para el análisis numérico se ha tomado el dominio finito  $\Omega$  representado en la figura 3 con  $a = 1$  y  $b = 2$ . En el contorno del dominio se ha impuesto el campo de desplazamientos exacto con condiciones de modo mixto, tales que  $K_I = 100$  y  $K_{II} = 100$ . Las propiedades del material consideradas son módulo de Young  $E = 10^7$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.333$ . Para los análisis de convergencia se ha utilizado una secuencia de mallas estructuradas de elementos cuadriláteros (lineales y cuadráticos) con 9, 17, 33, 65 y 129 elementos en cada dirección respectivamente. Para extraer los FIT se han calculado las integrales de interacción (5), con  $r_q = 0.9$  para definir la función de ponderación  $q$ .

En la figura 4 se representan las distribuciones del error local en norma energética obtenido en la malla de  $33 \times 33$  elementos lineales cuando se utiliza, respectivamente, el esquema de enriquecimiento geométrico con el XFEM estándar y con el elemento de transición corregido. El color más oscuro se corresponde con el valor máximo del error local obtenido en el análisis con XFEM estándar, y los colores más claros con errores más pequeños (el color blanco sería error nulo).

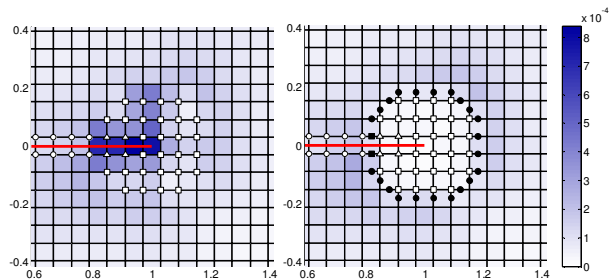


Figura 4. Error en norma energética en la malla de elementos lineales con XFEM estándar (izquierda) y con elementos de transición corregidos (derecha).

Con el XFEM estándar el error es mayor en la zona enriquecida con las funciones singulares, especialmente en los elementos que contienen las caras de grieta. Se observa como la mejora de los elementos de transición reduce notablemente el error en toda la zona enriquecida. La misma información se representa en la

figura 5 para el caso de elementos cuadráticos. En este caso el error con XFEM estándar es mayor en los elementos de transición y al corregirlos aumenta de nuevo la precisión en toda la zona enriquecida.

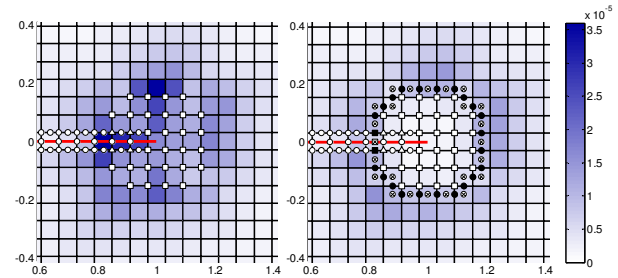


Figura 5. Distribución del error en norma energética en la malla de elementos cuadráticos con XFEM estándar (izquierda) y con elementos de transición corregidos (derecha).

En la figuras 6 y 7 se representa la convergencia del error relativo en el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  frente al número de grados de libertad para elementos lineales y cuadráticos respectivamente. Se compara el error obtenido con XFEM estándar y corrigiendo los elementos de transición (XFEM+EBE) utilizando tanto enriquecimiento topológico como geométrico. La velocidad de convergencia óptima es 1 para elementos lineales y 2 para cuadráticos.

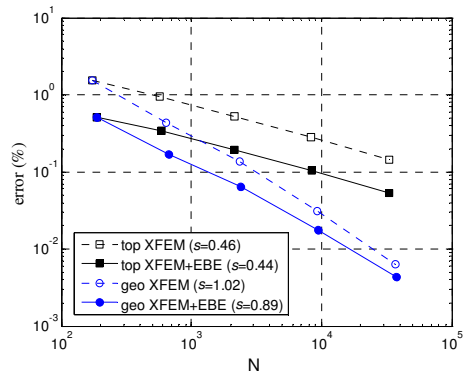


Figura 6. Convergencia del error en  $K_I$  para elementos lineales.

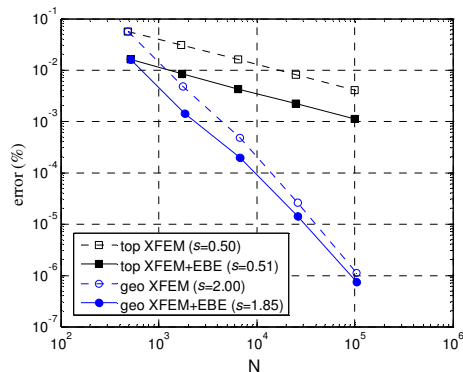


Figura 7. Convergencia del error en  $K_I$  para elementos cuadráticos.

Se comprueba que la mejora propuesta en los elementos de transición aumenta siempre la precisión y que para alcanzar la velocidad de convergencia óptima es necesario utilizar el esquema de enriquecimiento geométrico. La misma información se representa en las figuras 8 y 9 para el factor  $K_{II}$ .

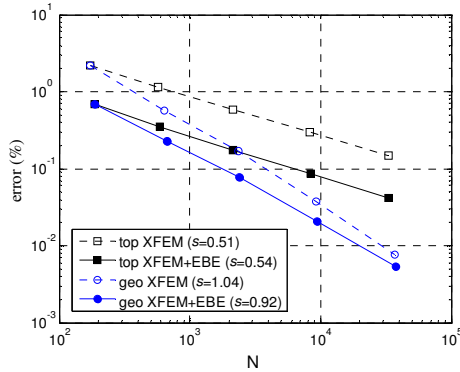


Figura 8. Convergencia del error en  $K_{II}$  para elementos lineales.

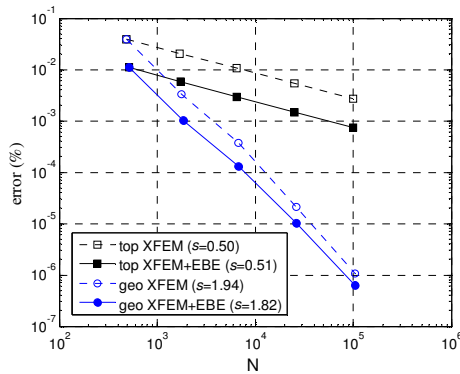


Figura 9. Convergencia del error en  $K_{II}$  para elementos cuadráticos.

## 7. CONCLUSIONES

Se ha conseguido mejorar la precisión en los análisis de MFEL mediante XFEM aumentando el orden polinómico de la aproximación tan sólo en los elementos de transición. Para ello se han añadido funciones de forma jerárquicas en el interior de la zona de transición (implementación sencilla y eficiente). Además de aumentar la precisión de magnitudes globales como los factores de intensidad de tensiones, la mejora introducida reduce el error local en norma energética en los elementos enriquecidos (no sólo en los de transición), lo que indica que los campos de tensiones obtenidos también mejoran.

El aumento de precisión se produce tanto con enriquecimientos de tipo topológico como de tipo geométrico. Se ha comprobado que para obtener la velocidad de convergencia del error óptima es necesario utilizar enriquecimiento de tipo geométrico.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo recibido por parte del Ministerio de Ciencia y Tecnología a través del proyecto de investigación DPI2007-66995-C03-02, y el apoyo de la Conselleria d'Empresa, Universitat i Ciència de la Generalitat Valenciana mediante el proyecto GV06/124.

## REFERENCIAS

- [1] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; 45(5):601-620.
- [2] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; 46(1):131-150.
- [3] Melenk JM, Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996; 139(1-4):289-314.
- [4] Stazi FL, Budyn E, Chessa J, Belytschko T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics* 2003; 31:38-48.
- [5] Chessa J, Wang H, Belytschko T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; 57(7):1015-1038.
- [6] Laborde P, Pommier J, Renard Y, Salaün M. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 64:354-381.
- [7] Béchet E, Minnebo H, Moës N, Burgardt B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 64:1033-1056.
- [8] Szabó, BA, Babuška, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [9] Moran B, Shih CF. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics* 1987; 27(6):615-642.
- [10] Giner E, Fuenmayor FJ, Baeza L, Tarancón JE. Error estimation for the finite element evaluation of  $G_I$  and  $G_{II}$  in mixed-mode linear elastic fracture mechanics. *Finite Element Analysis and Design* 2005; 41:1079-1104.