

MODELO NUMÉRICO PARA PROBLEMAS DE FRACTURA EN MATERIALES COMPUESTOS MAGNETOELECTROELÁSTICOS BAJO CARGA DINÁMICA ARMÓNICA

A. Sáez^{1A}, R. Rojas^{1B}, F. García²

¹ Departamento de Mecánica de Medios Continuos, E.T.S. de Ingenieros,
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n,
41092 Sevilla, España.
E-mail: ^{1A}andres@us.es, ^{1B}rrojasdiaz@us.es

² Departamento de Ingeniería Civil, Escuela de Ingenieros Industriales,
Universidad de Málaga, Campus de El Ejido s/n,
29013 Málaga, España.
E-mail: fgsanchez@uma.es

RESUMEN

En este trabajo se implementa la formulación dual o mixta del método de los elementos de contorno (MEC) para el análisis de problemas de fractura en sólidos planos (2-D) magnetoelástico sometidos a cargas dinámicas de tipo armónico. La solución fundamental dinámica se obtiene, por aplicación de la transformada de Radon, como integrales de línea sobre una circunferencia de radio unidad. Esta solución puede descomponerse en la suma de una parte singular, independiente de la frecuencia y que coincide con la solución fundamental estática, más una parte regular que sí depende de la frecuencia. De esta manera, las integrales singulares e hipersingulares propias de este tipo de formulaciones pueden evaluarse mediante el mismo procedimiento de regularización previamente desarrollado por los autores para aplicaciones estáticas. Posteriormente, sólo resulta necesario añadir términos regulares para resolver el problema dinámico. En la parte final del trabajo se presentan resultados para la difracción de ondas longitudinales por grietas de diversa geometría.

ABSTRACT

A mixed or dual boundary element method is implemented for the study of crack problems in two-dimensional (2-D) magnetoelastostic solids under time-harmonic loading conditions. The Radon transform technique is used to derive the dynamic time-harmonic Green's functions for 2-D fully anisotropic magnetoelastostic media. The resulting dynamic fundamental solution is obtained in the form of line integrals over a unit circumference that can be split into singular plus regular terms. The singular terms correspond to the static magnetoelastostic Green's functions. In this manner, integrals containing the singular and hypersingular terms arising in the displacement and traction boundary integral equations are computed following the same procedure developed by the authors for statics, so that subsequently only regular (frequency dependent) terms need to be added in order to solve the dynamic problem. Results for scattering of P-waves by various crack configurations are presented and discussed.

PALABRAS CLAVE: Materiales magnetoelástico, Dinámica, Método de los elementos de contorno.

1. INTRODUCCIÓN

El reciente desarrollo de materiales compuestos formados por fases piezoeléctricas y elastomagnéticas ha dado lugar a materiales con acoplamiento magneto-electro-elástico. En particular el acoplamiento electro-magnético es una nueva propiedad del compuesto, no presente en ninguna de las dos fases por separado [1,2]. El material compuesto resultante tiene por tanto la capacidad de convertir energía entre los campos mecánico, eléctrico y magnético, aportando de esta manera nuevas posibilidades en aplicaciones de control.

Si bien existen materiales en la naturaleza que muestran un comportamiento acoplado magnetoelástico, la respuesta electromagnética es hasta dos órdenes de magnitud superior en el caso de los materiales compuestos.

En este trabajo se presenta un modelo numérico 2-D para el estudio de problemas de fractura en materiales magnetoelástico bajo cargas dinámicas armónicas, basado en la formulación hipersingular del método de los elementos de contorno (MEC).

En la primera parte del trabajo se presentan las ecuaciones de comportamiento de los sólidos magnetoelastoelectroelásticos para, a continuación, discutir alguno de los aspectos clave de la implementación numérica de la solución fundamental de Rojas-Díaz et al. [3]. Las técnicas de integración empleadas son una extensión de las propuestas por Sáez et al. [4] para sólidos piezoeléctricos. Se emplean elementos de tipo cuadrático, tanto continuos como discontinuos, y elementos a un cuarto en los bordes de la grieta, que permiten representar los desplazamientos de apertura de grieta y las discontinuidades en los potenciales eléctrico y magnético que la grieta introduce. A partir de los valores de desplazamientos y potenciales en los nodos del elemento a un cuarto se evalúan directamente los factores de intensidad de tensiones (FIT), de desplazamiento eléctrico (FIDE) y de inducción magnética (FIIM). En la parte final del trabajo se valida la formulación y se presentan nuevos resultados para varias configuraciones de interés.

2. ECUACIONES BÁSICAS DEL PROBLEMA MAGNETOELECTROELÁSTICO

Las ecuaciones que describen el comportamiento de un material magnetoelastoelectroelástico lineal 2-D pueden formularse de una forma análoga al problema elástico considerando un vector de desplazamientos generalizado que incluya, junto con los desplazamientos elásticos, los potenciales eléctrico (ϕ) y magnético (φ), y un tensor de tensiones generalizado que incorpore los desplazamientos eléctricos (D_i) y las inducciones magnéticas (B_i) [5]

$$u_I = \begin{cases} u_i & I=1,2 \\ \phi & I=3 \\ \varphi & I=4 \end{cases} ; \sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & J=1,2 \\ D_i & J=3 \\ B_i & J=4 \end{cases} \quad (1)$$

de manera que las ecuaciones del movimiento generalizadas se podrían escribir como

$$C_{iJKl} u_{K,iI} = -F_J + \rho \delta_{JK}^* \frac{\partial^2 u_K}{\partial t^2} \quad (2)$$

donde ρ es la densidad y C_{iJKl} es el tensor de constantes elásticas generalizado

$$C_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl} & J, K=1,2 \\ e_{ij} & J=1,2; K=3 \\ h_{ij} & J=1,2; K=4 \\ e_{ikl} & J=3; K=1,2 \\ -\kappa_{il} & J, K=3 \\ -\beta_{il} & J=3; K=4 \\ h_{ikl} & J=4; K=1,2 \\ -\beta_{il} & J=4; K=3 \\ -\gamma_{il} & J, K=4 \end{cases} \quad (3)$$

donde C_{ijkl} , κ_{il} y γ_{il} son el tensor de comportamiento elástico, las permitividades dieléctricas y las permeabilidades magnéticas, respectivamente y e_{ij} , h_{ij} y β_{il} son los coeficientes que definen los acoplamientos piezoeléctrico, elastomagnético y electromagnético, respectivamente. En la ecuación (2) δ_{JK}^* es la delta de Kronecker generalizada y F_J denota el vector de fuerzas de volumen generalizado

$$\delta_{JK}^* = \begin{cases} \delta_{jk} & J, K=1,2 \\ 0 & J, K=3,4 \end{cases} ; F_J = \begin{cases} b_j & J=1,2 \\ -f_e & J=3 \\ -f_m & J=4 \end{cases} \quad (4)$$

donde b_j son las fuerzas de volumen y f_e y f_m representan la densidad de carga eléctrica y magnética, respectivamente.

3. FORMULACIÓN DEL MEC

La formulación mixta del MEC para problemas de mecánica de la fractura se puede escribir haciendo uso de la notación generalizada en términos de las siguientes ecuaciones integrales de contorno (EIC) en desplazamientos y tracciones [4]

$$c_{IJ} u_J + \int_{\Gamma} p_{IJ}^* u_J d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{IJ}^* p_J d\Gamma \quad (5)$$

$$c_{IJ} p_J + N_r \int_{\Gamma} s_{rIJ}^* u_J d\Gamma = N_r \int_{\Gamma} d_{rIJ}^* p_J d\Gamma$$

donde c_{IJ} representa los denominados términos libres, que dependen de la geometría del contorno, p_J denota el vector de tracciones en el contorno generalizado, N_r es la normal exterior al contorno en el punto donde se plantean las EIC (5), u_{IJ}^* representan los desplazamientos de la solución fundamental o funciones de Green, p_{IJ}^* son las tracciones de la solución fundamental y s_{rIJ}^* y d_{rIJ}^* se definen posteriormente en la ecuación (18).

La solución fundamental 2-D armónica, definida como la respuesta de un plano infinito magnetoelastoelectroelástico provocada por la aplicación de una carga puntual dinámica armónica (entendida en sentido generalizado), ha sido recientemente obtenida por Rojas-Díaz et al. [3] mediante la utilización de la transformada de Radon. Esta solución se puede descomponer [3] en la suma de términos singulares, que coinciden con la solución fundamental estática, más términos regulares que sí dependen de la frecuencia de excitación. Este hecho permite regularizar los integrandos singulares e hipersingulares que aparecen en las EIC (5) mediante el mismo procedimiento desarrollado por los autores para aplicaciones estáticas.

Por otro lado, dadas las similitudes formales existentes entre la solución fundamental magnetoelástica y la previamente presentada por Wang y Zhang [7] para el caso piezoeléctrico, aspectos como la estrategia de mallado o la obtención de los parámetros de fractura siguen las mismas ideas expuestas en Sáez et al. [4] para el caso piezoeléctrico. En particular, las grietas se mallan con elementos cuadráticos discontinuos, mientras que el comportamiento del tipo $r^{1/2}$ que los desplazamientos generalizados muestran en el entorno del vértice de la grieta se modela mediante el empleo de elementos a un cuarto discontinuos. De manera análoga a [4], los factores de intensidad generalizados (FIT: K_I y K_{II} ; FIDE: K_D ; y FIIM: K_B) se obtienen directamente a partir de los valores nodales de los desplazamientos de apertura de grieta (DAG) generalizados (Δu_1 , Δu_2 , $\Delta \phi$ y $\Delta \varphi$) mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_D \\ K_B \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{8r}} \mathbf{H}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta \phi \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde r es la distancia entre el nodo de colocación en el que se evalúan los DAG y el vértice de la grieta y \mathbf{H} depende de las constantes del material [6].

4. SOLUCIÓN FUNDAMENTAL ARMÓNICA

Los desplazamientos de la solución fundamental armónica 2-D presentados en [3] se pueden expresar como

$$u_{KM}^*(\mathbf{x}, \omega) = u_{KM}^{*S}(\mathbf{x}) + u_{KM}^{*R}(\mathbf{x}, \omega) \quad (7)$$

siendo

$$u_{KM}^{*S}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=1} \frac{\mathcal{E}_{KM}^q}{\rho c_q^2 E_{pp}^q} \log|\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}| dL(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=1} \Lambda_{KM} \log|\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}| dL(\boldsymbol{\eta}) \quad (8)$$

$$u_{KM}^{*R}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=1} \frac{\mathcal{E}_{KM}^q}{\rho c_q^2 E_{yy}^q} \Phi^R(k_q, |\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}|) dL(\boldsymbol{\eta}) \quad (9)$$

donde las integrales de línea se definen sobre una circunferencia de radio unidad y

$$E_{km}^q = adj\{Z_{km} - \rho c_q^2 \delta_{km}\} \quad (10)$$

En (10) c_q representa las velocidades de fase y

$$Z_{km} = \Gamma_{km} + \alpha_m^4 \Gamma_{k4} + \alpha_m^5 \Gamma_{k5}$$

siendo

$$\alpha_m^4 = \frac{\Gamma_{4k} \Gamma_{55} - \Gamma_{45} \Gamma_{5k}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}} ; \quad \alpha_m^5 = \frac{\Gamma_{44} \Gamma_{5k} - \Gamma_{4k} \Gamma_{54}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}} \quad (11)$$

y

$$\Gamma_{KM} = C_{iKM} \eta_i \eta_l \quad (12)$$

$$\varepsilon_{KM}^q = \begin{cases} E_{km}^q & K, M = 1, 2, 3 \\ \alpha_l^K E_{lm}^q & K = 4, 5 ; M = 1, 2, 3 \\ \alpha_l^K \alpha_j^M E_{lj}^q & K, M = 4, 5 \end{cases} \quad (13)$$

$$\Lambda_{KM}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}} \left\{ \Gamma_{KM} (\delta_{4K} \delta_{5M} + \delta_{5K} \delta_{4M}) - \frac{\Gamma_{44} \Gamma_{55}}{\Gamma_{KM}} (\delta_{4K} \delta_{4M} + \delta_{5K} \delta_{5M}) \right\} \quad (14)$$

$$\Phi^R(k_q, |\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}|) = \Phi(k_q | \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}|) + 2 \log(| \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}|) \quad (15)$$

$$\Phi(\zeta) = i\pi e^{i\zeta} - 2[\cos(\zeta)ci(\zeta) + \sin(\zeta)si(\zeta)] \quad (16)$$

$$ci(\zeta) = -\int_{\zeta}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz ; \quad si(\zeta) = -\int_{\zeta}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \quad (17)$$

Las tracciones de la solución fundamental p_{MJ}^* se obtienen por derivación de los desplazamientos y sustitución en las ecuaciones de comportamiento. De manera análoga

$$d_{rIJ}^* = C_{rIM} u_{MJ,l}^* ; \quad s_{rIJ}^* = C_{rIM} p_{MJ,l}^* \quad (18)$$

5. APLICACIONES NUMÉRICAS

La formulación presentada se ha validado mediante la obtención de resultados para un material magnetoelástico degenerado de comportamiento cuasi-piezoeléctrico, obteniéndose en todos los casos un excelente acuerdo con soluciones previas disponibles para materiales piezoeléctricos [4].

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el problema de difracción de ondas longitudinales por una grieta con forma de arco circular (figura 1) inmersa en un medio infinito de material compuesto $BaTiO_3-CoFe_2O_4$ con fracción de volumen $V_f=0.5$, cuyas propiedades se resumen en la tabla 1. Las direcciones de polarización eléctrica y magnética coinciden con el eje y . Se han supuesto condiciones de contorno de grieta impermeable desde los puntos de vista eléctrico y magnético. La grieta se ha mallado con 8 elementos discontinuos curvos de tipo cuadrático y 2 elementos a un cuarto rectos de reducidas dimensiones (1/30 de la longitud de la grieta) en los vértices de la grieta.

Tabla 1. Propiedades del material compuesto BaTiO₃-CoFe₂O₄ con fracción de volumen V_f=0.5.

C ₁₁ (GPa)	C ₁₂ (GPa)	C ₁₃ (GPa)	C ₃₃ (GPa)	C ₄₄ (GPa)
226	125	124	216	44
e ₃₁ (C/m ²)	e ₃₃ (C/m ²)	e ₁₅ (C/m ²)		
-2.2	9.3	5.8		
h ₃₁ (N/Am)	h ₃₃ (N/Am)	h ₁₅ (N/Am)		
290.2	350	275		
κ ₁₁ (×10 ⁻¹⁰ C ² /Nm ²)	κ ₃₃ (×10 ⁻¹⁰ C ² /Nm ²)			
56.4	63.5			
β ₁₁ (×10 ⁻¹² Ns/VC)	β ₃₃ (×10 ⁻¹² Ns/VC)			
5.367	2737.5			
γ ₁₁ (×10 ⁻⁶ Ns ² /C ²)	γ ₃₃ (×10 ⁻⁶ Ns ² /C ²)			
297	83.5			

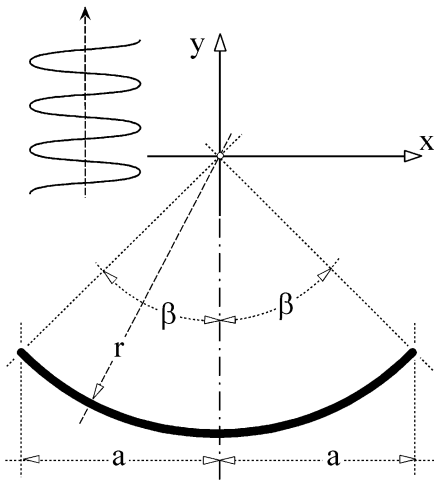


Figura 1. Difracción de ondas por grieta circular. Geometría del problema.

La onda P incidente viaja en dirección y y viene caracterizada por los siguientes desplazamientos generalizados

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ \phi_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \exp \left[i\omega \left(\frac{y}{c_p} + t \right) \right] \quad (19)$$

donde

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(C_{22} + \frac{e_{22}^2}{\kappa_{22}} + \frac{h_{22}^2}{\alpha_{22}} \right)} \quad (20)$$

En las figuras 2, 3, 4 y 5 se muestra el comportamiento de los FIT en modos I y II, el FIDE y el FIIM, respectivamente, para diversos semiángulos β frente a la frecuencia adimensional ωa/c_s, siendo c_s = √(C₆₆/ρ).

En las figuras se han introducido los siguientes parámetros

$$\sigma_0 = (C_{22} + e_{22}\beta_1 + h_{22}\beta_2) \frac{i\omega}{c_p} v_0 \quad ; \quad \nu = \frac{\kappa_{22}}{e_{22}} \quad ; \quad \mu = \frac{\gamma_{22}}{h_{22}}$$

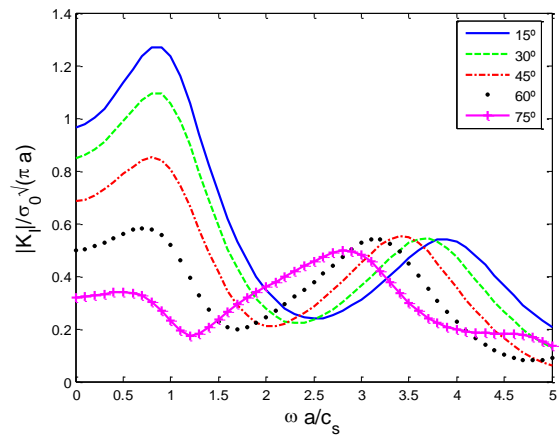


Figura 2. FIT en modo I normalizado vs frecuencia.

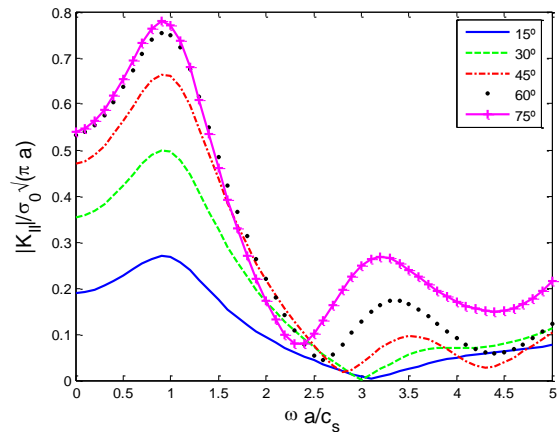


Figura 3. FIT en modo II normalizado vs frecuencia.

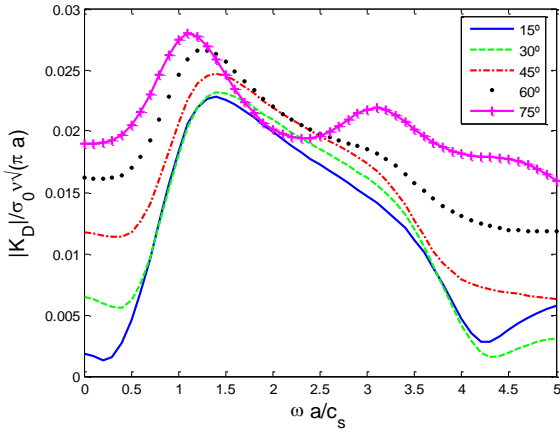


Figura 4. FIDE normalizado vs frecuencia.

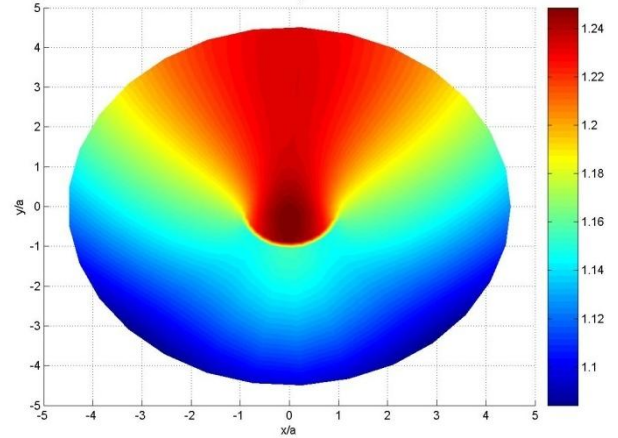


Figura 6. Difracción de ondas por grieta circular. Campo de desplazamientos elásticos v/v_0 para $\omega a/c_s = 0.25$.

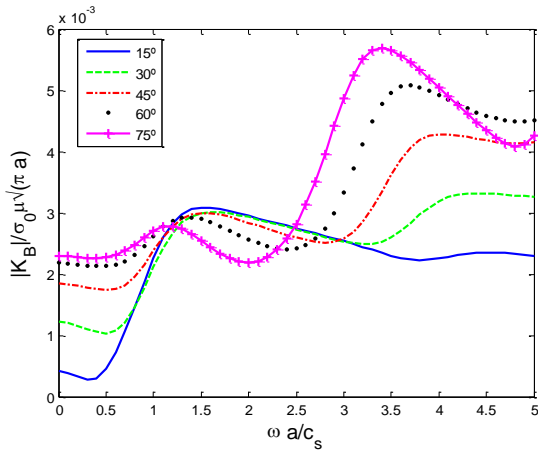


Figura 5. FIIM normalizado vs frecuencia.

En la figura 6 se muestra el campo total adimensional (suma del incidente más el difractado) de desplazamientos elásticos en dirección y para una frecuencia $\omega a/c_s = 0.25$ (v/v_0). Para esta misma frecuencia se recoge en la figura 7 la evolución espacial del potencial magnético (φ/φ_0).

Finalmente, en las figuras 8 y 9 se recogen, respectivamente, la evolución espacial de los campos de desplazamientos elásticos en dirección y (v/v_0) y del potencial magnético (φ/φ_0) para una frecuencia del movimiento incidente $\omega a/c_s = 1$.

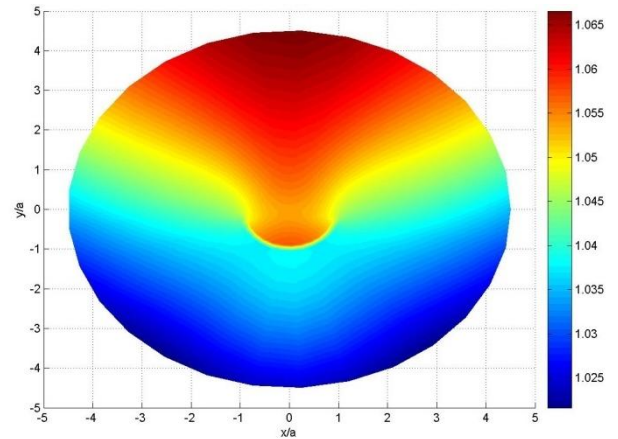


Figura 7. Difracción de ondas por grieta circular. Potencial magnético φ/φ_0 para $\omega a/c_s = 0.25$.

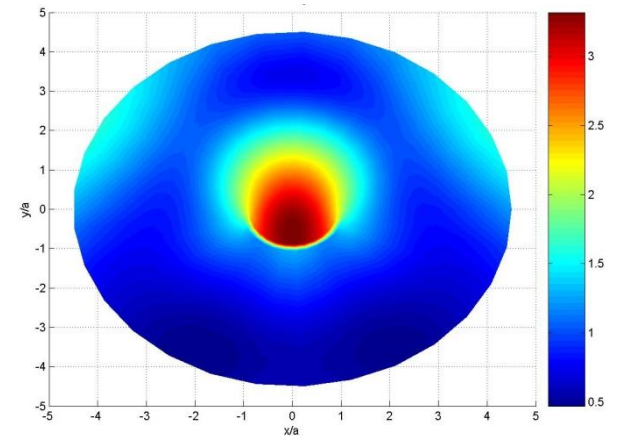


Figura 8. Difracción de ondas por grieta circular. Campo de desplazamientos elásticos v/v_0 para $\omega a/c_s = 1$.

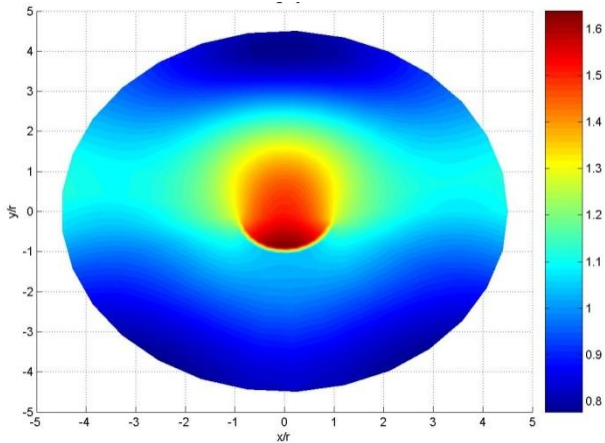


Figura 9. Difracción de ondas por grieta circular.
Potencial magnético φ/φ_0 para $\omega a/c_s = 1$.

- [5] Soh, A.K., Liu, J.X., 2005. On the constitutive equations of magnetoelastoelectric solids, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 2005; 16: 597-602.
- [6] F. García-Sánchez, R. Rojas-Díaz, A. Sáez and Ch. Zhang, Fracture of magnetoelastoelectric composite materials using boundary element method (BEM), *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2007; 47: 192-204.
- [7] C.-Y. Wang and Ch. Zhang, 3-D and 2-D dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids, *Engrg. Anal. Bound. Elem.*, 2005; 29: 454-465.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado e implementado un modelo numérico 2-D basado en la formulación hiper-singular del método de los elementos de contorno para el estudio de problemas de fractura en materiales magnetoelastoelectricos solicitados por cargas dinámicas de tipo armónico. El potencial del modelo propuesto se ha ilustrado mediante su aplicación a problemas de difracción de ondas por grietas de geometría curva.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la financiación recibida de la Junta de Andalucía a través del Proyecto de Investigación de Excelencia P06-TEP-02355.

REFERENCIAS

- [1] Van Suchtelen J. Product properties: a new application of composite materials, *Phillips Research Reports* 1972; 27: 28-37.
- [2] Nan CW. Magnetolectric effect in composite of piezoelectric and piezomagnetic phases, *Phys. Rev. B*, 1994; 50: 6082-6088.
- [3] Rojas-Díaz R, Sáez A, García-Sánchez F, Zhang Ch. Time-harmonic Green's functions for anisotropic Magnetoelastoelectricity, *International Journal of Solids and Structures*, 2008; 45: 144-158.
- [4] Sáez A, García-Sánchez F, Dominguez J. Hyper-singular BEM for Dinamyc Fracture in Piezoelectric Solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006; 196: 235-246.